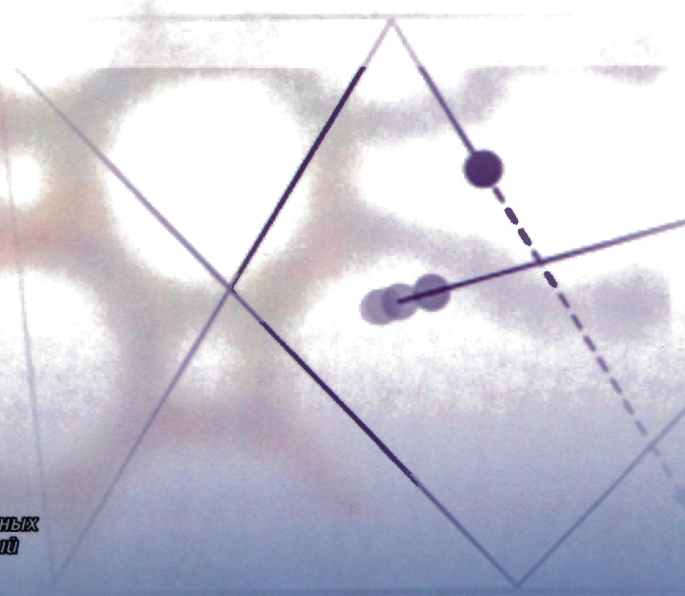


Н. Чернов, Р. Маркарян

ХАОТИЧЕСКИЕ БИЛЛИАРДЫ





БИБЛИОТЕКА ЖУРНАЛА
«РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА»



Редколлегия серии:

А. В. Борисов, В. В. Козлов, И. С. Мамаев

Вышла в свет:

Табачников С.

Геометрия и билиарды

Теория математических билиардов описывает движение материальной точки в области с упругим отражением от границы или, что то же самое, поведение лучей света в области с зеркальной границей. В книге отражены связи теории билиардов с дифференциальной геометрией, классической механикой и геометрической оптикой. Кроме того, подробно изучаются вариационные принципы билиардной динамики, симплектическая геометрия лучей света и интегральная геометрия, существование и несуществование каустик, оптические свойства кривых и поверхностей второго порядка, вполне интегрируемые билиарды, периодические билиардные траектории, билиарды в многоугольниках, механизмы возникновения хаоса, а также менее известные внешние билиарды.

Особенностью издания, основанного на специальном курсе для студентов, является большое количество отступлений: эволюты и эвольвенты, теорема о четырех вершинах, математическая теория радуги, распределение первых цифр в различных последовательностях, теория Морса, теорема Пуанкаре о возвращении, четвертая проблема Гильберта, теорема Понселе и многое другое. Книга богато иллюстрирована. В дополнении, написанном для русского издания, освещены результаты самых последних исследований.

ХАОТИЧЕСКИЕ БИЛЛИАРДЫ

**Mathematical
Surveys
and
Monographs
Volume 127**

Chaotic Billiards

**Nikolai Chernov
Roberto Markarian**



American Mathematical Society

Н. Чернов
Р. Маркарян

Хаотические бильярды

Перевод с английского
Ю. Сагдеевой и П. Голубцова

Под редакцией
Н. Чернова



Москва ♦ Ижевск

2012

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Ч 493

Интернет-магазин

MAFFES

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

Чернов Н., Маркарян Р.

Хаотические билиарды. — М.—Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2012. — 464 с.

В этой книге рассматривается один из самых волнующих, но самых трудных вопросов современной теории динамических систем — хаотические билиарды. В физике с помощью моделей билиардов описываются различные механические процессы, молекулярная динамика и оптические явления.

За последние тридцать пять лет в теории хаотического билиарда достигнуты значительные успехи, но в силу разбросанности основных результатов по малодоступным научным статьям она остается трудной для начинающих. Это первая и пока единственная книга, в которой полностью и систематически изложены все основные факты о хаотических билиардах. Книга содержит все необходимые определения, полные доказательства всех основных теорем и множество примеров и иллюстраций, помогающих читателю понять материал. Сотни тщательно разработанных упражнений позволяют читателю не только ознакомиться с хаотическими билиардами, но и усвоить данную тему.

Книга адресована аспирантам и молодым исследователям в области физики и математики. Условием для работы с ней является прохождение последипломных курсов теории меры, вероятности, римановой геометрии, топологии и комплексного анализа. Некоторые из этих материалов собраны в приложениях к данной книге.

ISBN 978-5-4344-0080-0

ББК 22.161.6

Оригинальное издание опубликовано на английском языке издательством *American Mathematical Society* под названием *Chaotic Billiards*.

© 2006 *American Mathematical Society*. Перевод выполнен и опубликован Ижевским институтом компьютерных исследований по соглашению с *American Mathematical Society*.

© Перевод на русский язык:

Ижевский институт компьютерных исследований, 2012

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие	13
Символы и обозначения	17
ГЛАВА 1. Простые примеры	19
1.1. Бильиард в круге	19
1.2. Бильиард в квадрате	25
1.3. Простая механическая модель	30
1.4. Бильиард в эллипсе	33
1.5. Хаотический бильиард: автомат для игры в пинбол	38
ГЛАВА 2. Основные построения	43
2.1. Бильиардные столы	43
2.2. Неограниченные бильиардные столы	47
2.3. Бильиардный поток	47
2.4. Накопление времени столкновений	50
2.5. Фазовое пространство для потока	52
2.6. Координатное представление потока	54
2.7. Гладкость потока	56
2.8. Продолжение потока по непрерывности	58
2.9. Отображение столкновений	59
2.10. Координаты для отображения и его особые точки	61
2.11. Производная отображения	63
2.12. Инвариантная мера отображения	65
2.13. Средняя длина свободного пробега	67
2.14. Инволюция	69
ГЛАВА 3. Показатели Ляпунова и гиперболичность	71
3.1. Показатели Ляпунова: общие факты	71
3.2. Показатели Ляпунова для отображения	74
3.3. Показатели Ляпунова для потока	77
3.4. Гиперболичность как источник хаоса	82
3.5. Гиперболичность и численные эксперименты	84

3.6. Координаты Якоби	85
3.7. Касательные и фронты волны	87
3.8. Непрерывные дроби, связанные с билиардами	90
3.9. Якобиан для касательных	93
3.10. Касательные в пространстве столкновений	95
3.11. Устойчивые и неустойчивые прямые	96
3.12. Энтропия	98
3.13. Доказательство гиперболичности: конусные методы	101
ГЛАВА 4. Рассеивающие билиарды	105
4.1. Классификация и примеры	105
4.2. Другая механическая модель	108
4.3. Рассеивающиеся фронты волны	110
4.4. Гиперболичность	114
4.5. Устойчивые и неустойчивые кривые	117
4.6. Доказательство предложения 4.29	120
4.7. Еще о непрерывных дробях	127
4.8. Особенности (локальный анализ)	132
4.9. Особенности (глобальный анализ)	136
4.10. Особенности для билиардных столов типа В	139
4.11. Устойчивые и неустойчивые многообразия	142
4.12. Размер неустойчивых многообразий	145
4.13. Дополнительные факты о неустойчивых многообразиях	148
4.14. Расширение на билиардные столы типа В	151
ГЛАВА 5. Динамика неустойчивых многообразий	155
5.1. Измеримое разбиение на неустойчивые многообразия	155
5.2. u -SRB плотности	157
5.3. Контроль за искажением и полосы однородности	162
5.4. Однородные неустойчивые многообразия	164
5.5. Размер H -многообразий	166
5.6. Ограничения на искажения	170
5.7. Голономное отображение	176
5.8. Абсолютная непрерывность	180
5.9. Две леммы о росте	186
5.10. Доказательство двух лемм о росте	189
5.11. Третья лемма о росте	196
5.12. Размер H -многообразий (локальная оценка)	202
5.13. Фундаментальная теорема	204

ГЛАВА 6. Эргодические свойства	207
6.1. История	207
6.2. Метод Хопфа: эвристический подход	208
6.3. Метод Хопфа: предварительная подготовка	210
6.4. Метод Хопфа: главное построение	212
6.5. Локальная эргодичность	216
6.6. Глобальная эргодичность	222
6.7. Свойства перемешивания	223
6.8. Эргодичность и инвариантные многообразия для билиардных потоков	226
6.9. Свойства перемешивания потока и 4-петли	228
6.10. Доказательство К-перемешивания с использованием 4-петель	231
6.11. Свойства перемешивания для потоков рассеивающих билиардов	234
ГЛАВА 7. Статистические свойства	237
7.1. Введение	237
7.2. Определения	238
7.3. Исторический обзор	243
7.4. Стандартные пары и семейства	246
7.5. Лемма спаривания	251
7.6. Свойство равномерного распределения	255
7.7. Экспоненциальное убывание корреляций	257
7.8. Центральная предельная теорема	261
7.9. Другие предельные теоремы	268
7.10. Статистика столкновений и диффузия	272
7.11. Сплошные прямоугольники и прямоугольники Кантора	277
7.12. «Магнитный» прямоугольник	281
7.13. Промежутки, восстановление, остановка	287
7.14. Построение отображения спаривания	291
7.15. Экспоненциальная оценка хвоста	299
ГЛАВА 8. Биллиарды Бунимовича	303
8.1. Введение	303
8.2. Механизм дефокусировки	304
8.3. Столы Бунимовича	306
8.4. Гиперболичность	308
8.5. Неустойчивые волновые фронты и непрерывные дроби	313
8.6. Еще немного непрерывных дробей	316
8.7. Устранение несущественных столкновений	322

8.8. Стадионы	326
8.9. Равномерная гиперболичность	331
8.10. Устойчивые и неустойчивые кривые	335
8.11. Конструкция устойчивых и неустойчивых многообразий	339
8.12. u -SRB плотности и ограничения на искажения	343
8.13. Абсолютная непрерывность	347
8.14. Леммы о росте	352
8.15. Эргодичность и статистические свойства	362
Глава 9. Фокусирующие хаотические бильярды общего вида	367
9.1. Доказательство гиперболичности с помощью техники конусов	368
9.2. Доказательство гиперболичности с помощью квадратичных форм	371
9.3. Квадратичные формы в бильярдах	374
9.4. Построение гиперболических бильярдов	376
9.5. Абсолютно фокусирующие дуги	381
9.6. Поле конусов для абсолютно фокусирующих дуг	385
9.7. Непрерывные дроби	388
9.8. Особенности	390
9.9. Приложение теории Песина и Катка – Стрельцина	396
9.10. Инвариантные многообразия и абсолютная непрерывность	400
9.11. Доказательство эргодичности с помощью «регулярных накрытий»	402
Послесловие	411
Приложение А. Теория меры	413
Приложение В. Теория вероятности	427
Приложение С. Эргодическая теория	437
Литература	451
Предметный указатель	461

Предисловие

Биллиарды представляют собой математические модели, позволяющие описать многие физические явления, при которых одна или несколько частиц движутся в контейнере и сталкиваются с его стенками и/или друг с другом. Динамические свойства таких моделей определяются формой стенок контейнера и могут варьироваться от абсолютно правильных (интегрируемых) до совершенно хаотических. Наибольший интерес у ученых вызывают (далеко не простые) хаотические биллиарды. В их число входят классические модели твердых шаров, которые в девятнадцатом веке изучал Л. Больцман, газ Лоренца, введенный в 1905 году для описания электричества, а также современные рассеивающие биллиардные столы, которые придумал Яков Синай.

Математическая теория хаотических биллиардов возникла в 1970 году, когда Яков Синай опубликовал свой продуктивный труд [Sin70], так что на сегодняшний день ей всего 35 лет. Однако за эти годы она росла и развивалась с удивительной скоростью, превратившись в прочную и процветающую область современной теории динамических систем и статистической механики.

Неудивительно, что многие молодые математики и ученые обращаются к хаотическим биллиардам в надежде изучить некоторые из этих, а также аналогичных физических моделей. Однако такие исследования нередко оказываются крайне сложными для многих новичков и неспециалистов не только из-за внутренней сложности, свойственной данному предмету, но и в большой степени из-за отсутствия доступных для понимания вводных учебников.

Да, существует масса замечательных книг, в которых описаны математические биллиарды общего вида [Ta95, KT91, KS86, GZ90, CFS82], но они практически не касаются хаотических моделей. Кроме того, есть ряд работ обзорного типа, посвященных именно хаотическим биллиардам (см. [DS00, HB00, CM03]), но это книги, скорее, популярного толка; в них лишь приводятся выборочные аргументы, и редко когда дело доходит до реальных механизмов действия. Таким образом, у читателей, стремящихся «дойти до сути» и стать профессионалами (здесь мы говорим о выпускниках ВУЗов

и аспирантах), не остается особого выбора: они могут либо учиться у своих научных руководителей или других специалистов путем личного общения, либо читать публикации в оригинале (причем большинство из них представляют собой очень длинные статьи с массой технических подробностей, переведенные с русского языка). Тут студенты быстро обнаруживают, что некоторые важные факты и методы можно найти только в середине длинных и толстых статей. Хуже того, некоторые из этих фактов даже и не публиковались: они считаются как бы само собой разумеющимися.

В этой книге сделана попытка систематизировать азы математической теории хаотических билиардов. Мы опишем все базовые факты, представим полные доказательства, интуитивные объяснения и массу иллюстраций. Нашу книгу могут использовать студенты, а также люди, занимающиеся самообразованием. Она начинается с самых элементарных примеров и формальных определений, после чего читатель шаг за шагом углубляется в дебри созданной Синаем теории гиперболичности и эргодичности хаотических билиардов, равно как и более поздних достижений, связанных с их статистическими свойствами (распадом корреляций и теоремами о пределе).

Мы должны предупредить своего читателя, что наша книга предназначена для активного обучения. В ней содержится масса задач самого разного типа: одни служат небольшими этапами в доказательствах важных теорем, другие представляют интересные примеры и контрпримеры, а третьи даны для того, чтобы читатель мог потренироваться в их решении (причем некоторые из задач совсем не просты). Нам бы очень хотелось, чтобы читатель решал задачи по мере чтения книги, поскольку только так он сможет наилучшим образом понять основные концепции и в конечном итоге отработать все методы, необходимые для освоения теории билиардов.

Наша книга ограничивается двумерными хаотическими билиардами; прежде всего, рассеивающими столами Синая и круговыми столами Бунимовича (впрочем, в последней главе мы скажем несколько слов о некоторых других хаотических билиардах на плоскости). Подобное ограничение обусловлено целым рядом веских причин. Во-первых, билиарды Синая и Бунимовича являются старейшими и наиболее хорошо изученными (например, статистические свойства определены только для таких билиардов и ни для каких других). В настоящее время о других хаотических билиардах нам известно намного меньше; работа над некоторыми из них (особенно в связи с газами, состоящими из твердых шаров) еще не закончена и, возможно, станет темой будущих учебников. Во-вторых, два класса, представленные в данной книге, составляют самую суть всей теории хаотических билиардов. Весь используемый здесь аппарат базируется на оригинальных

работах Синая и Бунимовича, однако их фундаментальные труды для современных студентов и аспирантов, увы, практически недоступны, поскольку полученные ими результаты не корректировались и даже не переиздавались с середины 1970-х годов (после книги Галлавотти [Ga74]). Такая попытка сделана в нашей книге. Мы не стали рассматривать многоугольные билиарды, хотя некоторые из них являются умеренно хаотическими (эргодическими). Обзор многоугольных билиардов имеется в [Gut86, Gut96].

Мы полагаем, что читатель владеет математикой в объеме стандартных вузовских курсов: линейной алгеброй, теорией мер, топологией, римановой геометрией, комплексным анализом, теорией вероятностей. Мы также надеемся, что читатель знаком с эргодической теорией. Хотя последняя обычно не изучается в ВУЗах, она совершенно необходима для чтения этой книги. Однако здесь мы не намерены эту теорию излагать, поскольку она описана во многих замечательных учебниках [Wa82, Man83, KH95, Pet83, CFS82, DS00, BrS02, Dev89, Sin76] (см. также нашу предыдущую книгу [CM03]). Для удобства читателя в приложениях приведены базовые определения и факты из эргодической теории, теории вероятностей и теории мер.

Благодарности. Авторы выражают благодарность многим своим коллегам, прочитавшим рукопись и внесшим массу полезных поправок, в частности: П. Балинту, Д. Долгопяту, К. Ливерани, Г. Дель-Маньо и Г.-К. Жанг. Нам очень хотелось бы отметить тот теплый прием, который мы получили в IMPA (Институт теоретической и прикладной математики, Рио-де-Жанейро), где был подготовлен окончательный вариант этой книги. За ценные комментарии мы также благодарим рецензентов, имен которых здесь не упоминаем. И, наконец, нельзя не отметить, что эта книга была написана с подачи Сергея Гельфанда и благодаря его постоянной поддержке. Первый автор получил частичную поддержку благодаря гранту NSF (Государственного фонда поддержки науки, США) DMS-0354775. Второй автор отчасти был поддержан проектом PDT-Conicut (Уругвай).

Символы и обозначения

$\mathcal{D}$	бильярдный стол	Раздел	2.1
Γ	граница бильярдного стола		2.1
Γ_+	объединение рассеивающих компонент границы Γ		2.1
Γ_-	объединение фокусирующих компонент границы Γ		2.1
Γ_0	объединение нейтральных компонент границы Γ		2.1
$\tilde{\Gamma}$	регулярная часть границы бильярдного стола		2.1
Γ_*	угловые точки на бильярдном столе		2.1
ℓ	степень гладкости границы $\Gamma = \partial\mathcal{D}$		2.1
n	нормальный вектор к границе бильярдного стола		2.3
T	касательный вектор к границе бильярдного стола		2.6
$\mathcal{K}$	кривизна границы бильярдного стола (имеющая знак)		2.1
Φ^t	бильярдный поток		2.5
Ω	фазовое пространство бильярдного потока		2.5
$\tilde{\Omega}$	часть фазового пространства, где динамика определена в любой момент времени		2.5
π_q, π_v	проекции Ω в подпространства положения и скорости		2.5
ω	угловая координата в фазовом пространстве Ω		2.6
η, ξ	координаты Якоби в фазовом пространстве Ω		3.6
μ_Ω	инвариантная мера для потока Φ^t		2.6
$\mathcal{F}$	отображение столкновений или бильярдное отображение		2.9
$\mathcal{M}$	пространство столкновений (фазовое пространство бильярдного отображения)		2.9
$\tilde{\mathcal{M}}$	часть $\mathcal{M}$, где определены все итерации $\mathcal{F}$		2.9
$\widehat{\mathcal{M}}$	часть $\mathcal{M}$, где все итерации $\mathcal{F}$ гладкие		2.11
r, φ	координаты в пространстве столкновений $\mathcal{M}$		2.10
μ	инвариантная мера для отображения столкновений $\mathcal{F}$		2.12
S_0	граница пространства столкновений $\mathcal{M}$		2.10
$S_{\pm 1}$	множество сингулярностей для отображения $\mathcal{F}^{\pm 1}$		2.10
$S_{\pm n}$	множество сингулярностей для отображения $\mathcal{F}^{\pm n}$		2.11

$S_{\pm\infty}$	то же, что и $\bigcup_{n \geq 1} S_{\pm n}$	4.11
$Q_n(x)$	связная компонента $M \setminus S_n$, содержащая x	4.11
ν	($= d\varphi/dr$) угол наклона гладких кривых в M	3.10
τ	время возврата (время между столкновениями)	2.9
$\bar{\tau}$	среднее время возврата (средняя длина свободного пробега)	2.12
$\lambda_x^{(i)}$	показатель Ляпунова в точке x	3.1
E_x^s, E_x^u	устойчивое и неустойчивое касательные подпространства в точке x	3.13
C_x^s, C_x^u	устойчивый и неустойчивый конусы в точке x	3.13
Λ	(минимальный) коэффициент расширения неустойчивых векторов	4.4
$\mathcal{B}$	кривизна волновых фронтов	3.7
$\mathcal{R}$	параметр столкновения	3.6
$\mathbb{H}_k$	полосы однородности	5.3
$\mathbb{S}_k$	линии, разделяющие полосы однородности	5.3
k_0	минимальный ненулевой показатель полос однородности	5.3
$M_{\mathbb{H}}$	новое пространство столкновений (объединение полос однородности)	5.4
h	голономное отображение	5.7
$\mathcal{I}$	отображение инволюции	2.14
m	мера Лебега для линий и кривых	5.9
$ W $	длина кривой W	4.5
$ W _p$	длина кривой W в p -метрике	4.5
$\mathcal{J}_W \mathcal{F}^n(x)$	якобиан сужения $\mathcal{F}^n$ на кривую W в точке $x \in W$	5.2
$r_W(x)$	расстояние от $x \in W$ до ближайшей конечной точки кривой W	4.12
$r_n(x)$	расстояние от $\mathcal{F}^n(x)$ до ближайшей конечной точки компоненты $\mathcal{F}^n(W)$, содержащей $\mathcal{F}^n(x)$	5.9
$p_W(x)$	расстояние от $x \in W$ до ближайшей конечной точки W в p -метрике	4.13
$\rho_W(x)$	плотность u -SRB меры на неустойчивом многообразии W	5.2
$\asymp$	«того же порядка величины»	4.3
L	функция потолка для взвешенных потоков	2.9

ГЛАВА 1

Простые примеры

Начнем с нескольких простых примеров математических бильярдov, с помощью которых опишем базовые особенности динамики бильярдov. Эта глава адресована абсолютному новичку. Читатель, хоть сколько-нибудь знакомый с бильярдами, может смело пропустить ее, так как все формальные определения будут даны во второй главе.

1.1. Бильярд в круге

Обозначим через $\mathcal{D}$ единичный диск $x^2 + y^2 \leq 1$. Предположим, что внутри $\mathcal{D}$ с постоянной скоростью движется точечная (безразмерная) частица, которая отскакивает от границы данной области $\partial\mathcal{D}$ в соответствии с классическим правилом: *угол падения равен углу отражения*; см. ниже.

Обозначим через $q_t = (x_t, y_t)$ координаты движущейся частицы в момент времени t , а через $v_t = (u_t, w_t)$ — ее вектор скорости. Тогда положение и скорость этой частицы в момент времени $t + s$ можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned}x_{t+s} &= x_t + u_t s, & u_{t+s} &= u_t, \\y_{t+s} &= y_t + w_t s, & w_{t+s} &= w_t,\end{aligned}\tag{1.1}$$

пока частица остается внутри области $\mathcal{D}$ (не контактируя с $\partial\mathcal{D}$).

При столкновении частицы с границей $\partial\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 = 1\}$ ее вектор скорости v отражается от касательной к $\partial\mathcal{D}$ в точке столкновения; см. рис. 1.1.

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Показать, что новый вектор скорости (после столкновения) связан со старым вектором скорости (до столкновения) правилом

$$v^{\text{нов.}} = v^{\text{стар.}} - 2\langle v^{\text{стар.}}, n \rangle n,\tag{1.2}$$

где $n = (x, y)$ — единичный вектор нормали к окружности $x^2 + y^2 = 1$, а $\langle v, n \rangle = vx + wy$ — скалярное произведение.

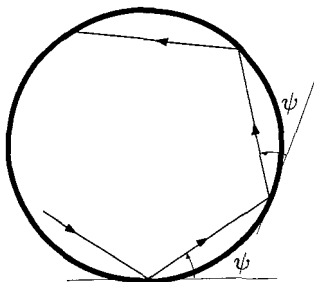


Рис. 1.1. Движение бильярда в круге

После отражения частица возобновляет свое свободное движение (1.1) в пределах диска $\mathcal{D}$, и это движение продолжается до следующего столкновения с границей $\partial\mathcal{D}$. Затем она снова отскакивает и так далее. Такое движение может происходить неопределенно долго как в прошлом, так и в будущем.

Например, если частица движется по диаметру диска, то ее вектор скорости будет поворачиваться в противоположную сторону при каждом столкновении с границей диска, так что частица будет носиться вперед-назад по одному и тому же диаметру вечно. Другие примеры периодического движения представлены на рис. 1.2, где частица пересекает стороны нескольких правильных многоугольников.

При изучении динамических систем основная цель заключается в описании эволюции системы на протяжении длительных периодов времени и ее асимптотического поведения в пределе $t \rightarrow \infty$. Именно такое описание и будет предметом нашего пристального внимания.

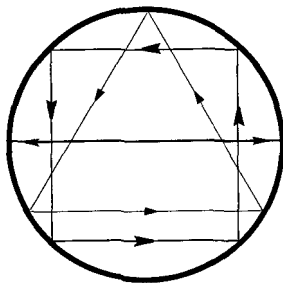


Рис. 1.2. Периодическое движение в круге

Параметризуем единичную окружность $x^2 + y^2 = 1$ с помощью полярного (в направлении против часовой стрелки) угла $\theta \in [0, 2\pi]$ (поскольку θ — это циклическая координата, ее значения 0 и 2π тождественны). Кроме того, обозначим через $\psi \in [0, \pi]$ угол отражения, как показано на рис. 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Следует отметить, что на самом деле θ — это длина дуги окружности $\partial\mathcal{D}$. При изучении бильярдных столов $\mathcal{D}$ более общего типа всегда будем параметризовать границу $\partial\mathcal{D}$ длиной ее дуги. Вместо ψ для описания отражения также можно использовать угол $\varphi = \pi/2 - \psi \in [-\pi/2, \pi/2]$, который образует вектор скорости после столкновения с направленной внутрь нормалью к $\partial\mathcal{D}$. Вообще, все основные формулы в нашей книге выражаются скорее через φ , чем через ψ , однако в данном случае мы продолжим использовать ψ .

Пусть при любом $n \in \mathbb{Z}$ величина θ_n обозначает n -ую точку столкновения, а величина ψ_n — соответствующий угол отражения.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Показать, что

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + 2\psi_n \pmod{2\pi}, \\ \psi_{n+1} &= \psi_n\end{aligned}\tag{1.3}$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Сделаем теперь два важных замечания.

- Все расстояния между точками отражения равны.
- Угол отражения остается неизменным.

Следствие 1.4. *Предположим, что (θ_0, ψ_0) — это параметры начального столкновения. Тогда*

$$\begin{aligned}\theta_n &= \theta_0 + 2n\psi_0 \pmod{2\pi}, \\ \psi_n &= \psi_0.\end{aligned}$$

Любое столкновение характеризуется двумя числами: точкой θ и углом ψ . Вся совокупность столкновений образует *пространство столкновений* с координатами θ и ψ . Это пространство представляет собой цилиндр, поскольку θ — циклическая координата; см. рис. 1.3. Обозначим пространство столкновений через $\mathcal{M}$. Движение частицы от столкновения к столкновению соответствует отображению $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, которое мы называем *отображением столкновения*. Для бильярда в круге оно задается уравнениями (1.3).

Заметим, что отображение $\mathcal{F}$ оставляет каждый горизонтальный уровень $C_\psi = \{\psi = \text{const}\}$ цилиндра $\mathcal{M}$ инвариантным. Более того, ограничение $\mathcal{F}$ на C_ψ представляет собой поворот окружности C_ψ на угол 2ψ . От круга к кругу угол поворота постоянно меняется, увеличиваясь от 0 внизу $\{\psi = 0\}$ до 2π вверх $\{\psi = \pi\}$ (таким образом, $\mathcal{F}$ фактически удерживает нижний и верхний круги в неподвижном положении). Цилиндр $\mathcal{M}$ «закручивается вверх» («развинчивается») отображением $\mathcal{F}$; см. рис. 1.3.

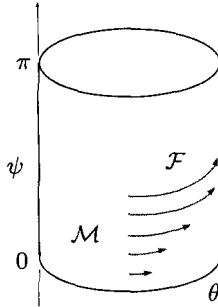


Рис. 1.3. Действие отображения столкновения $\mathcal{F}$ на пространство столкновений $\mathcal{M}$

Жесткий поворот круга — базовый пример из эргодической теории; см. приложение С. Он сохраняет меру Лебега на круге. Повороты на рациональные углы являются периодическими, а повороты на иррациональные углы — эргодическими.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Показать, что если угол $\psi < \pi$ — рациональный, кратный π , то есть $\psi/\pi = m/n$ (несократимая дробь), то вращение круга C_ψ является периодическим и имеет минимальный период n , то есть каждая точка на этом круге является периодической и имеет период n , а именно: $\mathcal{F}^n(\theta, \psi) = (\theta, \psi)$ при любых $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Если отношение ψ/π иррационально, то вращение C_ψ является эргодическим относительно меры Лебега. Более того, оно является *однозначно эргодическим*, что означает единственность инвариантной меры. Вследствие этого для любой точки $(\psi, \theta) \in C_\psi$ ее образы $\{\theta + 2n\psi, n \in \mathbb{Z}\}$ являются плотными и равномерно распределенными¹ на C_ψ . Последний факт часто называют теоремой Вейля [Pet83, с. 49–50].

¹Последовательность точек $x_n \in C$ на круге C называется равномерно распределенной, если для любого интервала $I \subset C$ справедливо следующее: $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n : 0 < n < N, a_n \in I\}}{N} = \frac{\text{длина}(I)}{\text{длина}(C)}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Показать, что каждый участок траектории движения частицы между последовательными столкновениями касателен меньшей окружности $S_\psi = \{x^2 + y^2 = \cos^2 \psi\}$, концентрической диску $\mathcal{D}$. Показать, что если отношение ψ/π иррационально, то траектория плотно заполняет кольцо между $\partial\mathcal{D}$ и меньшей окружностью S_ψ (см. рис. 1.4).

Примечание. Из рис. 1.4 явствует, что траектория движения частицы выглядит плотнее вблизи внутренней границы кольца (она «сфокусирована» на внутренней окружности). Если бы траекторией движения частицы был луч лазера, а в роли границы единичного диска выступало идеальное зеркало, то на внутреннем круге было бы «жарковато». Именно поэтому внутренняя окружность получила название *каустики* (с греческого языка это слово переводится как «горение»).

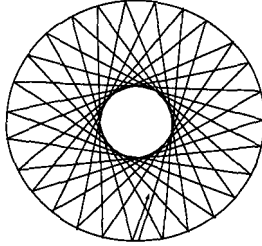


Рис. 1.4. Непериодическая траектория

УПРАЖНЕНИЕ 1.7. Может ли траектория движения частицы быть плотной по всему диску $\mathcal{D}$? Ответ: нет.

УПРАЖНЕНИЕ 1.8. Сохраняет ли отображение $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ абсолютно непрерывную инвариантную меру $d\mu = f(\theta, \psi) d\theta d\psi$ на $\mathcal{M}$? Ответ: любая мера, плотность которой $f(\theta, \psi) = f(\psi)$ не зависит от θ , является $\mathcal{F}$ -инвариантной.

Теперь можно зафиксировать скорость движения частицы с помощью следующих фактов.

УПРАЖНЕНИЕ 1.9. Показать, что $\|v_t\| = \text{const}$, в силу чего скорость частицы остается неизменной на протяжении всего движения.

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Показать, что при изменении скорости частицы (например, полагая $\|v_{\text{нов.}}\| = c\|v_{\text{стар.}}\|$ при некотором значении $c > 0$) траектория ее движения останется неизменной с точностью до простого изменения масштаба времени: $q_t^{\text{нов.}} = q_{ct}^{\text{стар.}}$ и $v_t^{\text{нов.}} = cv_{ct}^{\text{стар.}}$ при любых $t \in \mathbb{R}$.

Таким образом, скорость движения частицы остается постоянной, а ее величина не играет никакой роли. Обычно скорость принимают равной единице: $\|v\| = 1$. Тогда вектор скорости в момент времени t можно описать угловой координатой ω_t , так что $v_t = (\cos \omega_t, \sin \omega_t)$, а $\omega_t \in [0, 2\pi]$, причем крайние точки 0 и 2π тождественны.

Далее, отображение столкновений $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ представляет только столкновения. Чтобы описать движение частицы внутри $\mathcal{D}$, рассмотрим все возможные *состояния* (q, v) , где $q \in \mathcal{D}$ — это положение, а $v \in S^1$ — вектор скорости частицы. Тогда пространство всех состояний (называемое *фазовым пространством*) является трехмерным многообразием $\Omega := \mathcal{D} \times S^1$, которое, естественно, представляет собой заполненный тор (бублик).

Движение билиардной частицы индуцирует непрерывную группу преобразований тора Ω на самого себя. Точнее говоря, для любых $(q, v) \in \Omega$ и любого $t \in \mathbb{R}$ билиардная частица, которая начинает свое движение из точки (q, v) , в момент времени t окажется в некоторой точке $(q_t, v_t) \in \Omega$. Таким образом, получим отображение $(q, v) \mapsto (q_t, v_t)$ на Ω , которое обозначается через Φ^t . Семейство отображений $\{\Phi^t\}$ является *группой*, то есть $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s}$ для любых $t, s \in \mathbb{R}$. Это семейство называется *билиардным потоком* на фазовом пространстве.

Рассмотрим модификацию билиарда в круге. Обозначим через $\mathcal{D}_+$ верхний полудиск $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$, и предположим, что точечная частица движется внутри области $\mathcal{D}_+$ и отскакивает от границы $\partial\mathcal{D}_+$. (Здесь, впрочем, возникает один деликатный вопрос: что произойдет, если частица ударится о границу $\partial\mathcal{D}_+$ в точке $(1, 0)$ или $(-1, 0)$, ведь в этих точках не существует касательной к $\partial\mathcal{D}_+$? К этому вопросу мы вернемся в следующем разделе.)

Данную модель можно свести к билиарду в полном единичном диске $\mathcal{D}$ с помощью нехитрого действия. Обозначим через $\mathcal{D}_-$ замыкание $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_+$, то есть зеркальное отражение $\mathcal{D}_+$ от оси x : $L = \{y = 0\}$. Когда частица ударяется о линию L , ее траектория отражается от L , но мы изображаем ее продолжение (зеркальное отражение) ниже L . Эта траектория будет эволюционировать в $\mathcal{D}_-$ симметрично действительной траектории в $\mathcal{D}_+$ до тех пор, пока последняя не коснется L вновь. Тогда две эти траектории сольются и будут совпадать в $\mathcal{D}_+$ до следующего столкновения с L , после которого они вновь разойдутся (одна уйдет в $\mathcal{D}_-$, а другая — в $\mathcal{D}_+$), и т. д.

Важно, что вторая (мнимая) траектория в действительности никогда не отражается от линии L ; она каждый раз пересекает эту линию. Таким образом, она эволюционирует как траектория билиарда в полном диске $\mathcal{D}$, что было описано выше. Свойства билиардных траекторий в $\mathcal{D}_+$ несложно

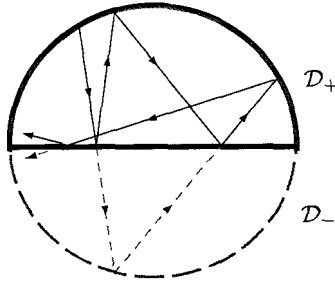


Рис. 1.5. Биллиард в верхнем полукруге

вывести из рассмотренных выше свойств биллиардов, заключенных в полные диски $\mathcal{D}$. Редукция такого типа достаточно широко распространена при изучении биллиардов.

УПРАЖНЕНИЕ 1.11. Доказать, что периодические траектории в полудиске $\mathcal{D}_+$ соответствуют периодическим траекториям в полном диске $\mathcal{D}$. Обратите внимание, что периоды (число отражений) при этом могут отличаться.

УПРАЖНЕНИЕ 1.12. Исследовать движение биллиарда в четверти единичного диска $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

1.2. Биллиард в квадрате

В данном разделе описан еще один простой пример: биллиард в единичном квадрате $\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$; см. рис. 1.6. Законы движения остаются теми же, однако эта система имеет свои особенности.

Во-первых, когда движущаяся частица ударяется в вершину квадрата $\mathcal{D}$, правило отражения (1.2) перестает работать (так как к вершине невозможно провести нормаль n). В этом случае частица останавливается и траектория ее движения заканчивается. Эту исключительную ситуацию мы обсудим позднее. Для начала рассмотрим регулярные траектории, не попадающие в вершины.

Обозначим через $v_t = (u_t, w_t)$ вектор скорости движущейся частицы в момент времени t (в координатах x, y). Если в момент времени t частица ударяется о вертикальную стенку квадрата $\mathcal{D}$, то u_t изменяет знак ($u_{t+0} = -u_{t-0}$), а w_t остается неизменной. Если частица ударяется о горизонтальную сторону $\mathcal{D}$, то знак изменяет w_t ($w_{t+0} = -w_{t-0}$), а u_t остается

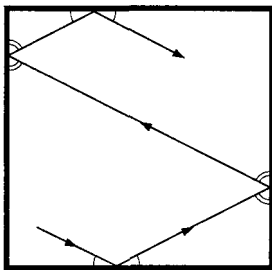


Рис. 1.6. Биллиард, ограниченный квадратом

неизменной. Таким образом,

$$u_t = (-1)^m u_0 \quad \text{и} \quad w_t = (-1)^n w_0, \quad (1.4)$$

где m и n обозначают число столкновений с вертикальной и горизонтальной сторонами $\mathcal{D}$ в промежуток времени $(0, t)$ соответственно.

УПРАЖНЕНИЕ 1.13. Показать, что при $u_0 \neq 0$ и $w_0 \neq 0$ (полагая, что частица никогда не ударяется в вершину) все четыре комбинации $(\pm u_0, \pm w_0)$ появляются на траектории движения частицы бесконечное число раз.

А теперь воспользуемся хитростью, представленной на рис. 1.5. Вместо того чтобы отразить от стороны $\partial\mathcal{D}$ траекторию движения частицы биллиарда, мы отражаем от этой стороны сам квадрат $\mathcal{D}$, и пусть частица переходит прямо в зеркальное отражение $\mathcal{D}$. Если сделать это для каждого столкновения, наша частица будет двигаться по прямой через многочисленные копии $\mathcal{D}$, полученные с помощью последовательных отражений (частица «пронзает» цепочку квадратов; см. рис. 1.7). Такое построение называется *разверткой* биллиардной траектории. Чтобы восстановить исходную траекторию в $\mathcal{D}$, нужно *свернуть* результирующую цепочку соседних копий $\mathcal{D}$ обратно в $\mathcal{D}$.

Мы обозначаем копии квадрата $\mathcal{D}$ через

$$\mathcal{D}_{m,n} = \{(x, y) : m \leq x \leq m+1, n \leq y \leq n+1\}. \quad (1.5)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.14. Показать, что если m и n — четные числа, то процедура сворачивания преобразует $\mathcal{D}_{m,n}$ обратно в $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{0,0}$ с помощью перемещений $x \mapsto x - m$ и $y \mapsto y - n$, тем самым сохраняя ориентацию

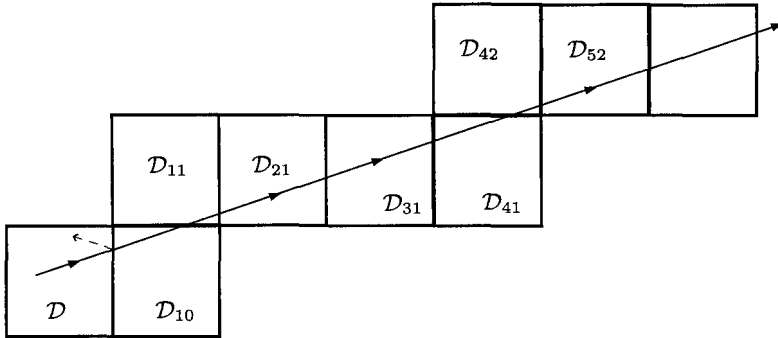


Рис. 1.7. Развертка бильярдной траектории

как x , так и y . В случае нечетного значения m ориентация x изменяется на противоположную (точнее говоря, $x \mapsto m+1-x$). При нечетном n противоположной становится ориентация y (а именно: $y \mapsto n+1-y$). Заметим, что эти правила не зависят от конкретной траектории, которая изначально подверглась развертке.

Квадраты $D_{m,n}$ с $m, n \in \mathbb{Z}$, подобно плитке, покрывают всю плоскость $\mathbb{R}^2$. Любая регулярная бильярдная траектория разворачивается в ориентированную прямую на плоскости, а любая ориентированная прямая (избегающая узлов целочисленной решетки) может быть свернута назад в бильярдную траекторию. Траектория ударяется в вершину D тогда и только тогда, когда соответствующая ей прямая попадает в узел целочисленной решетки.

Ясно, что структура квадратов $D_{m,n}$ при соответствующих правилах сворачивания является периодической, причем квадрат 2×2

$$\mathbb{K}_2 = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 2\}$$

играет роль фундаментальной области: вся плоскость покрыта параллельными переносами $\mathbb{K}_2$. Таким образом, стандартная проекция $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{K}_2$ преобразует развернутые траектории в ориентированные прямые на торе Tor^2 размера 2×2 (последний получается при отождествлении противоположных сторон квадрата $\mathbb{K}_2$). Следовательно, бильярд, ограниченный единичным квадратом D , сводится к простому линейному потоку на плоском 2×2 -торе Tor^2 , в котором точки движутся с постоянной (единичной) скоростью.

Линейный поток на плоском торе служит одним из стандартных примеров в эргодической теории; см. приложение С, а также [КН95, Pet83, Sin76]. Его главные свойства можно сформулировать так:

- если траектория имеет рациональный тангенс угла наклона $dy/dx \in \mathbb{Q}$, значит, она является периодической (проходит вдоль замкнутой геодезической);
- если траектория имеет иррациональный тангенс угла наклона $dy/dx \notin \mathbb{Q}$, значит, она плотная (ее замыканием служит весь тор).

Вышесказанное можно перевести в следующую альтернативу для регулярных билиардных траекторий в единичном квадрате $\mathcal{D}$.

Следствие 1.15. *Если $w_0/u_0 \in \mathbb{Q}$, то соответствующая регулярная билиардная траектория в единичном квадрате $\mathcal{D}$ является периодической. Если $w_0/u_0 \notin \mathbb{Q}$, то соответствующая регулярная билиардная траектория является плотной.*

УПРАЖНЕНИЕ 1.16. Распространить полученный результат на билиард в прямоугольнике $\mathcal{R}$ со сторонами a и b . Ответ: регулярная билиардная траектория в прямоугольнике $\mathcal{R}$ является периодической тогда и только тогда, когда $(aw_0)/(bu_0) \in \mathbb{Q}$; во всех остальных случаях она будет плотной. Указание: преобразуйте прямоугольник в единичный квадрат, изменив масштаб координат: $(x, y) \mapsto (x/a, y/b)$. Докажите, что при этом билиардные траектории в $\mathcal{R}$ преобразуются в билиардные траектории из $\mathcal{D}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.17. Распространить полученный результат на билиарды в следующих многоугольниках: равностороннем треугольнике, прямоугольном равнобедренном треугольнике, прямоугольном прямоугольнике с острым углом, равным $\pi/6$, и правильном шестиугольнике. Что общего между этими многоугольниками? (Обратите внимание, что билиард в шестиугольнике не сводится к геодезическому потоку на торе. Можно ли его свести к геодезическому потоку на другом многообразии?)

Фазовое пространство билиардной системы в единичном квадрате $\mathcal{D}$ представляет собой трехмерное многообразие $\Omega = \mathcal{D} \times S^1$; см. предыдущий раздел. Билиардный поток Φ^t определен на регулярных траекториях для любого времени, $-\infty < t < \infty$. На исключительных траекториях (которые в тот или иной момент времени приводят к вершине $\mathcal{D}$) поток определяется только до момента завершения траектории на вершине.

УПРАЖНЕНИЕ 1.18. Показать, что множество исключительных траекторий представляет собой счетное объединение двумерных поверхностей на Ω .

Мы видим, что с позиций топологии и теории мер множеством исключительных траекторий можно пренебречь (поскольку оно имеет нулевую меру Лебега и является множеством типа F_σ , то есть счетным объединением замкнутых подмножеств, нигде не являющихся плотными), однако его существование все же вызывает некоторое беспокойство. Тем не менее, когда речь заходит о бильярде, ограниченном квадратом, от этих множеств можно избавиться раз и навсегда, продолжив бильiardный поток согласно условию непрерывности.

УПРАЖНЕНИЕ 1.19. Показать, что по условию непрерывности поток Φ^t можно единственно возможным образом продолжить для всех исключительных траекторий. В этом случае каждая траектория, которая попадает в вершину D , просто изменит свое направление и будет двигаться точно в обратную сторону; см. рис. 1.8.

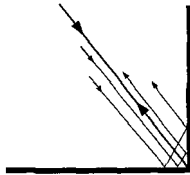


Рис. 1.8. Продолжение потока вблизи вершины

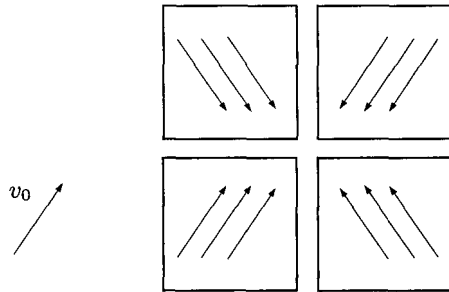
Вышеприведенное продолжение определяет бильiardный поток Φ^t на всем фазовом пространстве Ω , обеспечивая его повсеместную непрерывность. Далее везде будем считать, что это продолжение существует. Отметим все же, что в бильярдах общего вида такие приятные продолжения редко бывают возможны; см. раздел 2.8.

Вот теперь действие потока Φ^t на фазовом пространстве Ω можно полностью описать следующим образом. Для каждого единичного вектора $v_0 = (u_0, w_0) \in S^1$ рассмотрим множество

$$\mathcal{L}_{v_0} = \{(q, v) \in \Omega : q \in \mathcal{D}, v = (\pm u_0, \pm w_0)\}$$

(два знака, безусловно, не зависят друг от друга). В силу (1.4), каждое множество $\mathcal{L}_{v_0}$ остается инвариантным под действием потока Φ^t .

Предположим для начала, что $u_0 \neq 0$ и $v_0 \neq 0$. Тогда $\mathcal{L}_{v_0}$ представляет собой объединение четырех квадратов, полученных «разрезанием» Ω на четыре «уровня», соответствующих векторам $(\pm u_0, \pm w_0)$; см. рис. 1.9.

Рис. 1.9. Четыре квадрата, составляющих $\mathcal{L}_{v_0}$

УПРАЖНЕНИЕ 1.20. Убедиться, что четыре квадрата, составляющие множество $\mathcal{L}_{v_0}$, можно склеить по границам, получив гладкую замкнутую безграничную поверхность $(2 \times 2\text{-тор}) \mathbb{T}_{v_0}^2$, на которой билиардный поток совпадает с линейным потоком вдоль вектора v_0 (то есть поток на $\mathbb{T}_{v_0}^2$ будет определяться дифференциальными уравнениями $\dot{x} = u_0, \dot{y} = w_0$). Указание: сборка тора $\mathbb{T}_{v_0}^2$ из квадратов $\mathcal{L}_{v_0}$ весьма напоминает редукцию билиардной динамики в $\mathcal{D}$ к геодезическому потоку на $2 \times 2\text{-торе}$, описанную выше (на самом деле две эти операции эквивалентны).

В эргодической теории (см. приложение С) хорошо известно, что линейный поток на двумерном торе, определенном $\dot{x} = u_0, \dot{y} = w_0$, является периодическим, если $w_0/u_0 \in \mathbb{Q}$, и эргодическим (более того, единственным эргодическим) при $w_0/u_0 \notin \mathbb{Q}$. В последнем случае каждая траектория будет плотной и равномерно распределенной² на торе.

В двух оставшихся случаях (когда $u_0 = 0$ и когда $w_0 = 0$) множество $\mathcal{L}_{v_0}$ состоит всего из двух квадратов. Их анализ мы оставляем читателю в качестве несложного упражнения.

Вышесказанное полностью описывает действие потока $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$ для билиарда в единичном квадрате.

1.3. Простая механическая модель

В качестве мотивации для изучения билиардов обычно описывается простая модель двух движущихся частиц в одномерном контейнере. Она сводится к билиарду в прямоугольном треугольнике, который аналогичен билиарду в квадрате. Опишем здесь эту модель; см. также [CFS82, CM03].

²Линия x_t на двумерном торе Tor^2 называется равномерно распределенной, если для любого треугольника $R \subset \text{Tor}^2$ справедливо следующее: $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{m}(\{t : 0 < t < T, x_t \in R\})/T = \text{площадь}(R)/\text{площадь}(\text{Tor}^2)$, где $\mathbf{m}$ — это мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим систему, состоящую из двух точечных частиц с массами m_1 и m_2 на единичном интервале $0 \leq x \leq 1$. Частицы движутся свободно и упруго сталкиваются друг с другом и со «стенками» в точках $x = 0$ и $x = 1$. Обозначим через x_1 и x_2 положения частиц, а через u_1 и u_2 — их скорости. Поскольку частицы соударяются при столкновении, их положения остаются упорядоченными, поэтому будем полагать, что $x_1 \leq x_2$ в любой момент времени.



Рис. 1.10. Две частицы на единичном интервале

Теперь опишем столкновения. Когда частица ударяется о стенку, это приводит лишь к изменению направления вектора скорости. Когда две частицы сталкиваются друг с другом, мы обозначаем через u_i^+ скорость до столкновения, а через u_i^- — скорость после столкновения i -й частицы, $i = 1, 2$. Закон упругих столкновений требует сохранения общего импульса, то есть

$$m_1 u_1^+ + m_2 u_2^+ = m_1 u_1^- + m_2 u_2^-,$$

и общей кинетической энергии, то есть

$$m_1 [u_1^+]^2 + m_2 [u_2^+]^2 = m_1 [u_1^-]^2 + m_2 [u_2^-]^2. \quad (1.6)$$

Решая эти уравнения, получаем

$$u_1^+ = u_1^- + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (u_2^- - u_1^-)$$

и

$$u_2^+ = u_2^- + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (u_1^- - u_2^-)$$

(авторы рекомендуют читателю вывести эти формулы самостоятельно). Заметим, что при $m_1 = m_2$ частицы просто обмениваются векторами скорости: $u_1^+ = u_2^-$ и $u_2^+ = u_1^-$.

Вообще, переменные x_i и u_i неудобны, поэтому будем работать с новыми переменными, определяемыми равенствами

$$q_i = x_i \sqrt{m_i} \quad \text{и} \quad v_i = dq_i/dt = u_i \sqrt{m_i} \quad (1.7)$$

при $i = 1, 2$. Теперь положения частиц описываются с помощью точки $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ (она называется *точкой конфигурации*). Множество всех точек конфигурации (называемое *пространством конфигурации*) представляет собой прямоугольный треугольник

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{q} = (q_1, q_2) : 0 \leq q_1/\sqrt{m_1} \leq q_2/\sqrt{m_2} \leq 1\}.$$

Скорости частиц описывает вектор $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Заметим, что закон сохранения энергии (1.6) предполагает, что $\|\mathbf{v}\| = \text{const}$, поэтому можно принять, что $\|\mathbf{v}\| = 1$.

Состояние системы описывается парой $(\mathbf{q}, \mathbf{v})$. Точка конфигурации $\mathbf{q}$ движется в области $\mathcal{D}$ со скоростью $\mathbf{v}$. Когда первая частица сталкивается со стенкой ($x_1 = 0$), точка конфигурации ударяется в левую сторону $q_1 = 0$ треугольника $\mathcal{D}$. Когда вторая частица сталкивается со стенкой ($x_2 = 1$), точка $\mathbf{q}$ ударяется в верхнюю часть $q_2/\sqrt{m_2} = 1$ треугольника $\mathcal{D}$. Когда частицы сталкиваются друг с другом, точка $\mathbf{q}$ ударяется в гипотенузу $q_1/\sqrt{m_1} = q_2/\sqrt{m_2}$ треугольника $\mathcal{D}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.21. Доказать, что вектор скорости $\mathbf{v}$ изменяется при столкновениях таким образом, что отражается от $\partial\mathcal{D}$ согласно закону, который гласит, что «угол падения равен углу отражения».

Таким образом, движение точки конфигурации $\mathbf{q}$ подчиняется законам бильярда. Следовательно, эволюцию механической модели двух частиц на единичном интервале можно свести к динамике бильярда в прямоугольном треугольнике.

При $m_1 = m_2$ получим бильярд в прямоугольном равнобедренном треугольнике, который несложно свести к бильярду, заключенному в квадрат; см. задачу 1.17. Для общего отношения масс m_1/m_2 мы получаем бильярд в прямоугольном треугольнике общего вида, который может быть довольно сложным (такие бильярды в своей книге мы не рассматриваем).

Сложность возникает, когда траектория бильярда попадает в угловую точку $\mathcal{D}$. Попадание в вершину прямого угла соответствует событию, когда две частицы одновременно сталкиваются с противоположными стенками. В этом случае их дальнейшее движение уже является четко определенным, в силу чего бильярдную траекторию можно без труда продолжить; см. задачу 1.19.

Однако попадание в вершину острого угла $\mathcal{D}$ соответствует событию, когда две частицы одновременно сталкиваются с *одной и той же* стенкой ($x = 0$ или $x = 1$). В этом случае для общих m_1 и m_2 бильярдный поток невозможно продолжить по принципу непрерывности, так как сосед-

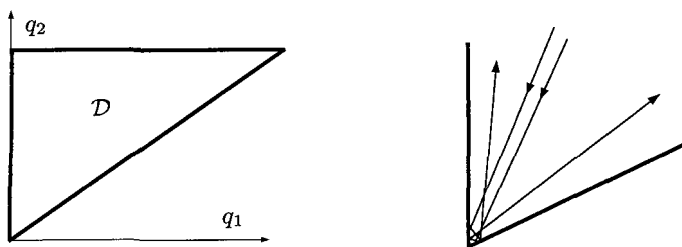


Рис. 1.11. Прямоугольный треугольник D ; попадание в вершину острого угла

ние траектории, ударяющиеся в две примыкающие друг к другу стороны в различном порядке, вернутся в D по разным линиям; см. рис. 1.11.

С позиций механики попадание в вершину острого угла D соответствует множественному столкновению. Такие исключительные события обычно невозможно разрешить в рамках классической механики.

1.4. Биллиард в эллипсе

Перейдем к еще одному простому примеру, целиком и полностью подвластному абсолютно элементарному анализу. Речь пойдет о биллиарде в эллипсе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

причем $a > b > 0$. На самом деле именно этот пример Биргкоф описал в своей самой первой книге по математическим биллиардам в 1927 году [Bi27, глава VIII].

Обозначим через D область, ограниченную эллипсом (это будет наш биллиардный стол). Обозначим через F_1 и F_2 фокусы эллипса и отметим, что они лежат на оси x . Эллипс является геометрическим местом точек $A \in \mathbb{R}^2$, для которых

$$\text{расстояние } (A, F_1) + \text{расстояние } (A, F_2) = \text{const.}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.22. Предположим, что $A \in \partial D$. Обозначим через L касательную к эллипсу в точке A . Доказать, что отрезки AF_1 и AF_2 образуют с прямой L равные углы. (В проективной геометрии этот факт носит название теоремы Понселе.) Указание: найти отражение точки F_2 относительно касательной L и показать, что ее образ будет лежать на прямой AF_1 .

Таким образом, если билиардная траектория проходит через один фокус, значит, она отражается от точки $A \in \partial\mathcal{D}$ на эллипсе и переходит непосредственно на другой фокус. В таком случае подобная траектория будет проходить через фокус после каждого отражения; см. рис. 1.12.

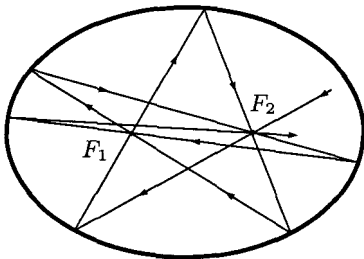


Рис. 1.12. Траектория, проходящая через фокусы

УПРАЖНЕНИЕ 1.23. Показать, что каждая траектория, проходящая через фокусы F_1 и F_2 , сходится к большой оси эллипса (оси x).

Кстати, большая и малая оси эллипса представляют собой две периодические траектории: они движутся вперед-назад между своими конечными точками.

В разделе 1.1 для описания столкновений в билиарде в окружности использовались координаты ψ и θ , причем циклическая координата θ была, в сущности, ничем иным, как длиной дуги окружности (примечание 1.2). Здесь же воспользуемся координатами ψ и r , причем ψ — это тот же угол отражения, что и в разделе 1.1, а r — параметр длины дуги на эллипсе. Выберем точкой отсчета $r = 0$ самую правую точку эллипса $(a, 0)$ и направим r против часовой стрелки. Отметим, что $0 \leq r \leq |\partial\mathcal{D}|$, а $0 \leq \psi \leq \pi$.

Пространство столкновений $\mathcal{M}$ представляет собой цилиндр с высотой π , в основании которого лежит эллипс. На рис. 1.13 оно изображено в виде четырехугольника $[0, |\partial\mathcal{D}|] \times [0, \pi]$, однако следует помнить, что левая и правая его сторона абсолютно тождественны друг другу. Движение билиардной частицы, от одного столкновения к другому, создает отображение столкновений $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.24. Убедиться, что траектории, проходящие через фокусы, лежат на замкнутой кривой на поверхности $\mathcal{M}$. Определить ее форму. Ответ: это кривая формы ∞ , разделяющая белую и серую области; см. рис. 1.13.

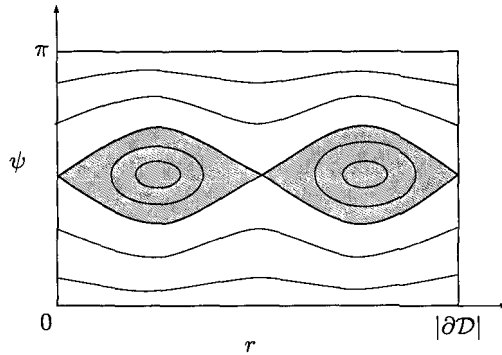


Рис. 1.13. Пространство столкновений эллиптического бильярда

Таким образом, траектории, которые проходят через фокусы, образуют в пространстве столкновений $\mathcal{M}$ особое (одномерное) семейство.

УПРАЖНЕНИЕ 1.25. Показать, что если траектория движения бильярдной частицы пересекает отрезок F_1F_2 , соединяющий фокусы, то она отражается от ∂D и пересекает этот отрезок снова. Аналогично, если траектория пересекает большую ось за отрезком F_1F_2 , скажем слева от него, то после одного или нескольких отражений от ∂D она пересечет большую ось справа от этого отрезка и т. д.

Предыдущая задача указывает на существование двух типов траекторий: одни пересекают внутренний отрезок F_1F_2 большой оси после каждого отражения (так называемые *внутренние* траектории), а другие этот отрезок обходят (такие траектории мы называем *внешними*).

УПРАЖНЕНИЕ 1.26. Убедиться, что внутренние траектории заполняют серую область на рис. 1.13, тогда как внешние траектории заполняют белую область.

Следующая теорема выражает самое важное свойство эллиптических бильярдов.

Теорема 1.27. Для каждой внешней траектории существует эллипс с фокусами F_1 и F_2 , касательный к каждому звену этой траектории. Для каждой внутренней траектории существует гипербола с фокусами F_1 и F_2 , касательная к каждому звену этой траектории (или его линейному продолжению).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы доказываем только первое утверждение (о внешних траекториях); доказательство второго утверждения аналогично. Приводимые нами аргументы элементарны и весьма наглядно представлены на рис. 1.14. Здесь A_1A и A_2A представляют собой два последовательных звена внешней траектории. Точки B_1 и B_2 получаются отражением фокусов F_1 и F_2 относительно прямых A_1A и A_2A соответственно. Четыре угла $\angle B_1AA_1$, $\angle A_1AF_1$, $\angle F_2AA_2$ и $\angle A_2AB_2$ равны. Таким образом, треугольники AB_1F_2 и AB_2F_1 конгруэнтны; в частности, $|B_1F_2| = |B_2F_1|$. Следовательно,

$$|F_1C_1| + |F_2C_1| = |F_1C_2| + |F_2C_2|,$$

где C_1 и C_2 — точки пересечения A_1A с B_1F_2 и A_2A с B_2F_1 соответственно. Таким образом, точки C_1 и C_2 принадлежат одному и тому же эллипсу с фокусами F_1 и F_2 , а прямые A_1A и A_2A являются касательными к этому эллипсу. ■

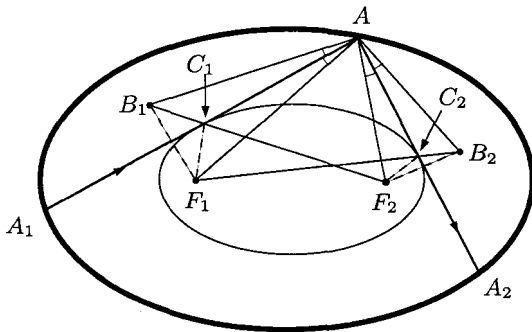


Рис. 1.14. Доказательство теоремы 1.27

Если каждое звено билиардной траектории является касательной некоторой заданной кривой, то такая кривая называется *каустикой*. На рис. 1.15 изображена эллиптическая каустика для внешней траектории и гиперболлическая каустика для внутренней траектории. Термин «каустика» позаимствован из оптики, где он означает кривую, на которой световые лучи фокусируются после отражения от зеркала (каустики встречались нам в билиардах в окружностях из § 1.1). На рис. 1.15 изображено сосредоточение лучей на каустике (сравните с рис. 1.4).

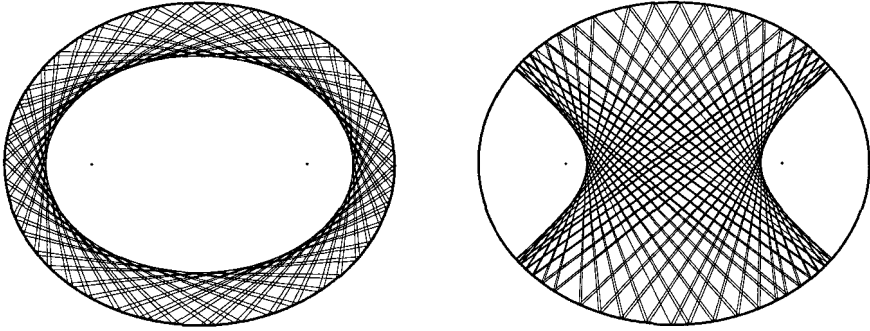


Рис. 1.15. Эллиптическая и гиперболическая каустики в эллиптическом билиарде

Все траектории, которые касаются одной эллиптической каустики, лежат на замкнутой кривой в пространстве столкновений $\mathcal{M}$. Такие кривые изображены в виде «горизонтальных волн» в белой области рис. 1.13 (не забывайте, что левая и правая стороны прямоугольника тождественны). Ясно, что каждая подобная кривая инвариантна под действием отображения $\mathcal{F}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.28. На каждой инвариантной кривой отображение $\mathcal{F}$ сопряжено с жестким поворотом по кругу на некоторый угол (этот угол называется *числом вращения*). Показать, что число вращения изменяется непрерывно и монотонно с инвариантной кривой. Указание: рассмотреть две внешние траектории, которые берут начало в одной и той же точке $A_0 \in \partial\mathcal{D}$, но имеют различные эллиптические каустики. Обозначить через A'_n точки отражения траектории с меньшей эллиптической каустикой, а через A''_n — точки отражения другой траектории. Заметить, что последовательность $\{A'_n\}$ движется по эллипсу быстрее, чем $\{A''_n\}$; см. рис. 1.16.

Действие отображения $\mathcal{F}$ на каждую инвариантную кривую можно проанализировать явным образом, а число вращения можно вычислить аналитически (см. [Be01, разделы 2.5 и 3.2]), но так далеко мы заходить не будем.

Итак, все траектории, касательные к одной гиперболической каустике, лежат на двух замкнутых кривых в пространстве столкновений $\mathcal{M}$: по одной в каждой половине серой области, имеющей форму ∞ . На рис. 1.13 эти кривые представлены в виде овалов. Отображение $\mathcal{F}$ преобразует каждый овал в тождественный ему овал во второй половине серой области, имеющей форму ∞ . Таким образом, объединение двух тождественных (симметричных) овалов инвариантно под действием $\mathcal{F}$, а каждый овал по отдельности инвариантен под действием $\mathcal{F}^2$.

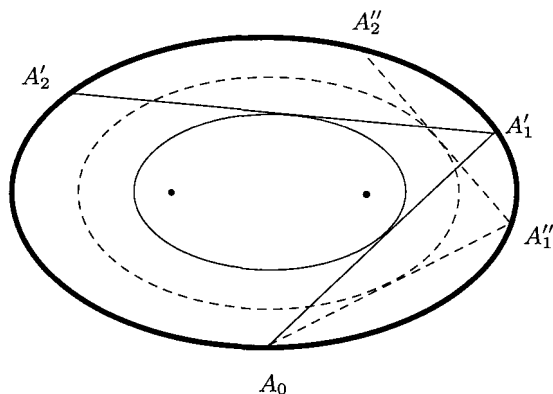


Рис. 1.16. Упражнение 1.28

Следовательно, пространство столкновений $\mathcal{M}$ эллиптического бильярда полностью расслаивается инвариантными кривыми. В этом смысле эллиптический бильярд подобен бильярдам в окружности и квадрате. В физике такие модели относят к отдельному классу: если фазовое пространство системы расслаивается одномерными инвариантными подмногообразиями, то такую систему называют *интегрируемой* и ее динамика считается полностью регулярной. Таким образом, бильярды в окружности, квадрате и эллипсе являются полностью регулярными.

1.5. Хаотический бильярд: автомат для игры в пинбол

Рассматривая в предыдущих разделах простые примеры, мы ставили своей целью познакомить своего неосведомленного читателя с некоторыми основными особенностями бильярдов. Однако эти примеры нельзя считать типичными; на самом деле их динамические характеристики имеют достаточно специальный характер. Более того, в некотором смысле они даже противоположны свойствам хаотических бильярдов, о которых мы будем говорить на протяжении оставшейся части книги. Сейчас же бросим беглый взгляд на то, что происходит в хаотических бильярдах.

Вообразите, что в играете в пинбол на автомате. Из «пушки», расположенной в правом нижнем углу прямоугольного стола, выстреливает шарик, который отскакивает от стенок до тех пор, пока либо не попадет в мишень (и тогда вы выиграете), либо не выпадет через нижнее отверстие (уйдет в стоковый канал, и в этом случае вы проиграете). Мишенью может быть

специальная фигурка на этом столе, которая фиксирует прикосновение шарика. Чтобы исключить прямые удары, предположим, что цель экранирована от пушки, причем правила запрещают бить в защитный экран. В таком случае шарик должен отскочить от стенок до того, как достигнет цели; см. рис. 1.17. Здесь изображен весьма необычный автомат для игры в пинбол, но для нас он послужит хорошим исходным примером.

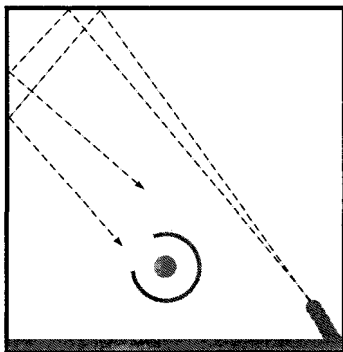


Рис. 1.17. Автомат для игры в пинбол. Мишенью служит серый диск, экранированный от пушки темно-серой дугой

Предположим, что пушку можно повернуть, дабы изменить угол вылета шарика. Промазав один раз, вы можете отрегулировать угол выстрела и послать шарик в мишень более точно. Это довольно простая задача (изображенная на рис. 1.17), так как траектория движения шарика (в прямоугольном бильярде) очень проста и предсказуема. Целиться, стремясь добиться абсолютной точности, вам тоже не нужно.

УПРАЖНЕНИЕ 1.29. Предположим, что мишенью служит диск радиуса r , а движущимся шариком является точечная частица. Обозначим через L расстояние, которое шарик проходит от пушки до мишени. Показать, что, если угол, под которым происходит выстрел, отклоняется менее чем на r/L (радиан), шарик все равно попадет в цель.

А теперь сделаем задание более реалистичным и сложным, установив по всему столу несколько буферов (круглых столбиков); см. рис. 1.18. Наш движущийся шарик по пути к цели (или к стоку) будет отскакивать от одного буфера к другому. Любой, кто хоть раз играл в пинбол на настоящем автомате, без труда представит этот процесс.

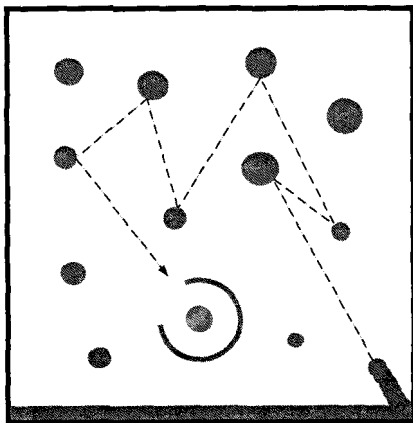


Рис. 1.18. Автомат для игры в пинбол с буферами (темно-серые диски)

Легко ли будет отрегулировать положение пушки на таком столе? Очевидно, нет. Траектория движения шарика становится сложной и почти непредсказуемой, так как он может отскакивать от самых разных буферов. Непросто будет даже определить точную последовательность буферов, в которые должен удариться шарик, чтобы попасть в мишень (и не задеть экран). Профессиональные бильярдисты решают подобную задачу, когда пытаются загнать шар в лузу так, чтобы перед этим он ударил один или даже несколько других шаров.

Более того, в этом случае пушка должна направляться с почти предельной точностью, ибо крошечная погрешность в угле вылета может привести к тому, что шарик пойдет совсем не по тому пути, который нам нужен. Это изображено на рис. 1.19, где представлены всего два последовательных отскока. Ясно, что неустойчивость движения шарика растет с каждым последующим отскоком от буфера. И вновь профессиональные игроки в бильярд отлично знают, что отправить шар в лузу, предварительно ударив им более одного шара на столе, очень непросто. Более того, если этот шар должен ударить три других шара или более, задача становится практически невыполнимой.

Прямоугольный стол, на котором установлены круглые буфера, является классическим примером хаотического бильярда. Движение бильiardной частицы на таком столе отличается сложностью и непредсказуемостью. Неопытному глазу это движение может показаться дикой пляской между

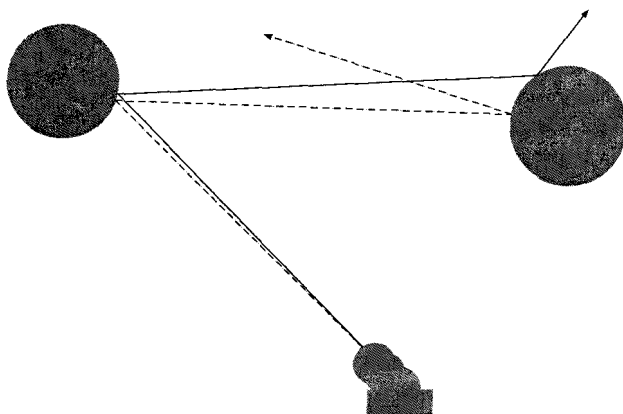


Рис. 1.19. Шарик, отскакивающий от двух буферов: малейшая погрешность в начальном угле вылета приводит к значительному расхождению в конечном результате

стенками стола, не имеющей какой бы то ни было схемы и не подчиняющейся никакой логике (вот почему автоматы для игры в пинбол столь популярны!). Непредсказуемость — это характерная особенность хаотических бильярдов.

Более того, малейшие изменения в начальном положении и/или скорости частицы быстро ведут к большим отклонениям (аналогичным изображенным на рис. 1.19), так что уже после нескольких столкновений с буферами две траектории, изначально очень близкие, разойдутся и будут проходить так далеко друг от друга, словно и не имели никогда ничего общего. Эта неустойчивость (также называемая *чувствительностью к начальным условиям*) также является характерной особенностью хаотических бильярдов (и хаотической динамики вообще).

На практике лучшее, что может сделать игрок, — это произвести один выстрел «наугад» и посмотреть, как шарик будет двигаться по столу, отскакивая от буферов: вероятность «случайного» попадания в мишень существует всегда. Пинбол, подобно подбрасыванию монетки, бросанию костей или карточной игре, по сути своей — рулетка. В шестой и седьмой главах мы увидим, что движение частицы в хаотическом бильярде, в сущности, случайно, поэтому лучше всего оно поддается описанию в терминах теории вероятности.

Наш пример имеет много общего с классической моделью статистической физики, называемой газом Лоренца. В этой модели шарик (электрон)

скачет между большими неподвижными дисками (молекулами), которые образуют регулярную периодическую (кристаллическую) структуру. Мы представим ее в главе 4.1.

На текущий момент мы не станем выходить за рамки этого весьма неформального введения в область хаотических бильярдов и оставим все тонкости до следующих глав. Читатели, которым это интересно, могут найти более подробное описание хаотических бильярдов, включая компьютерные иллюстрации, в [Be01, раздел 1.1].

ГЛАВА 2

Основные построения

Биллиардная динамика в плоских областях традиционно вводится следующим образом.

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ — область с гладкой или кусочно-гладкой границей. Биллиардная система соответствует свободному движению материальной точки внутри $\mathcal{D}$ с зеркальными отражениями от границы $\partial\mathcal{D}$.

Это определение понятно и удобно для использования, если рассматривается конкретная заданная область $\mathcal{D}$. Однако при более общем исследовании необходимо определить класс рассматриваемых областей. Особенно внимательным следует быть с границей $\partial\mathcal{D}$ — разрешается ли границе $\partial\mathcal{D}$ иметь бесконечную длину, или неограниченную кривизну, или бесконечно много точек перегиба и т. д.

В большинстве научных статей по биллиардам предполагается (явно или неявно), что эти и другие отклонения отсутствуют. Заметным исключением является работа [St86], которая охватывает очень общие биллиарды, но она ясно показывает, что нерегулярности границы могут приводить к серьезным сложностям в анализе динамики и делают ее свойства трудноуправляемыми.

Многие нежелательные аномальные поведения исключаются из нашего исследования после введения соответствующих предположений для области $\mathcal{D}$ (см. предположения A1–A3 в § 2.1 и предположение A4 в § 2.4). Это сделает изложение гладким и позволит избежать многих трудностей, характерных для более общих исследований [St86]. Тем не менее наши предположения A1–A4 достаточно общие и охватывают практически все известные в настоящее время хаотические биллиарды.

2.1. Биллиардные столы

Пусть $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная открытая связная область и $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}_0}$ — ее замыкание.

Предположение A1. Граница $\partial\mathcal{D}$ — это конечное объединение гладких (C^ℓ , $\ell \geq 3$) компактных кривых:

$$\partial\mathcal{D} = \Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r. \quad (2.1)$$

Точнее, каждая кривая Γ_i определяется C^ℓ -гладким отображением $f_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$, взаимно-однозначным на $[a_i, b_i]$ и имеющим односторонние производные, вплоть до порядка ℓ , в точках a_i и b_i . Значение ℓ определяет класс гладкости бильярдного стола.

Будем называть $\mathcal{D}$ бильярдным столом, а $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ — стенками или компонентами $\partial\mathcal{D}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если $f_i(a_i) \neq f_i(b_i)$, то будем называть Γ_i дугой и обозначим $\partial\Gamma_i = \{f_i(a_i), f_i(b_i)\}$. Если $f_i(a_i) = f_i(b_i)$, то Γ_i — это замкнутая кривая, которая может быть полностью или лишь частично C^ℓ -гладкой. Если она полностью гладкая, то f_i можно определить на окружности S^1 , а не на отрезке $[a_i, b_i]$, и мы полагаем, что $\partial\Gamma_i = 0$. Может оказаться, что замкнутой кривой Γ_i не хватает гладкости в точке $f_i(a_i) = f_i(b_i)$; тогда обозначим эту точку через $\partial\Gamma_i$.

Предположение A2. Компоненты границы Γ_i могут пересекать друг друга только в своих концевых точках, то есть

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j \subset \partial\Gamma_i \cup \partial\Gamma_j \quad \text{для } i \neq j. \quad (2.2)$$

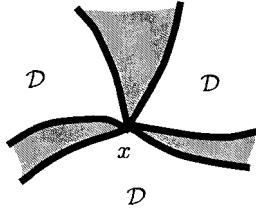
Обозначим

$$\Gamma_* = \partial\Gamma_1 \cup \dots \cup \partial\Gamma_r \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma_*. \quad (2.3)$$

Будем называть $x \in \Gamma_*$ угловыми точками $\mathcal{D}$ и $x \in \tilde{\Gamma}$ — регулярными граничными точками.

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Показать, что любая регулярная граничная точка $x \in \tilde{\Gamma}$ имеет открытую окрестность $U(x)$, которая пересекает только одну стенку Γ_i и делится Γ_i на две открытые связные части — одна лежит во внутренности $\mathcal{D}$, а другая — в $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Показать, что любая угловая точка $x \in \Gamma_*$ имеет такую открытую окрестность $U(x)$, что пересечение $U(x) \cap \Gamma$ есть несвязное объединение $2m$ кривых, для которых x — это общая концевая точка (здесь $m = m_x \geq 1$). Кривые делят $U(x)$ на $2m$ открытых связных областей так, что m из них лежат во внутренности $\mathcal{D}$, а другие m — в $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$, и эти два типа областей чередуются, если совершить обход окрестности $U(x)$ вокруг x ; см. рис. 2.1.

Рис. 2.1. Угловая точка x с $m_x = 3$

Будем называть x *простой угловой точкой*, если $m_x = 1$. В этой книге в основном будут встречаться простые угловые точки.

В упражнении выше связанные компоненты $U(x)$, которые лежат внутри D , называются *углами* области D . Каждый угол ограничен двумя кривыми $\Gamma_i, \Gamma_j \subset \Gamma$, сходящимися в точке x (назовем эти кривые *сторонами* угла), и характеризуется внутренним углом γ , образованным соответствующими касательными в точке x (угол, видимый изнутри D). Если $\gamma = 0$, назовем угол *каспом* (cusp).

Зафиксируем ориентацию каждой кривой Γ_i так, что D лежит слева от Γ_i . Затем параметризуем каждую сторону Γ_i ее длиной дуги; таким образом, касательные векторы становятся единичными: $\|f'_i\| = 1$.

Предположение А3. На каждой компоненте Γ_i вторая производная f''_i или никогда не обращается в нуль, или тождественно равна нулю (таким образом, любая стенка Γ_i — это или кривая без точек перегиба, или отрезок прямой).

Заметим, что $f''_i \perp f'_i$, так как $\|f'_i\| = \text{const}$. Следовательно, если $f''_i \neq 0$, то пара векторов f'_i, f''_i лежит или слева, или справа вдоль всей кривой Γ_i . В соответствии с этим выделяют три типа стенок:

плоские стенки: такие, что $f'' \equiv 0$;

фокусирующие стенки: такие, что вектор $f'' \neq 0$ направлен внутрь D ;

рассеивающие стенки: такие, что вектор $f'' \neq 0$ направлен наружу D .

Термины «фокусирующий» и «рассеивающий» стандартны для литературы по бильярдам. Их название обусловлено эффектом, который производят соответствующие зеркальные стенки при отражении лучей света — стенки типа (b) стремятся сфокусировать лучи, тогда как стенки типа (c) стремятся рассеять лучи; см. рис. 2.3. Фокусирующие стенки также называются *выпуклыми*, а рассеивающие — *вогнутыми*.

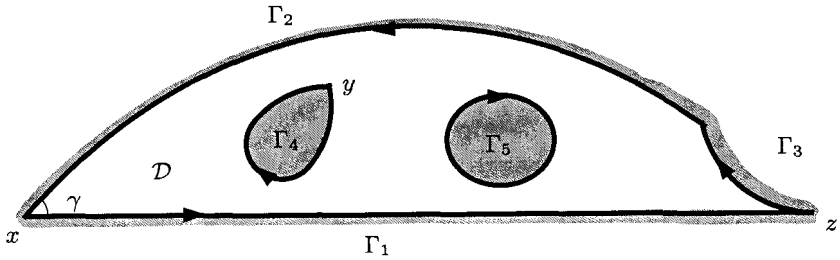


Рис. 2.2. Биллиардный стол. На рисунке стенка Γ_1 — плоская; Γ_2 — фокусирующая; Γ_3 — рассеивающая; Γ_4 — замкнутая стенка с одной угловой точкой y ; Γ_5 — гладкая замкнутая стенка; внутренний угол в точке x положителен, $\gamma > 0$; угол в точке z является каспом. Стрелками показана принятая ориентация Γ

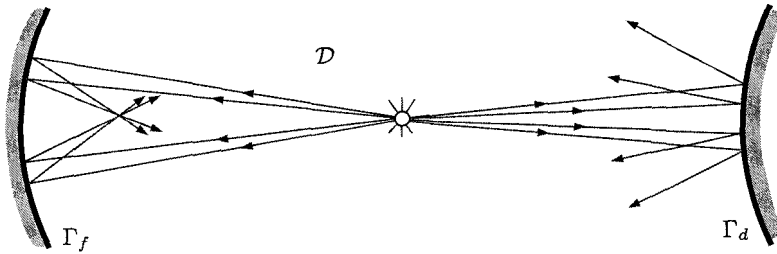


Рис. 2.3. Отраженные лучи света стремятся сфокусироваться вблизи фокусирующей стенки Γ_f и рассеяться вблизи рассеивающей стенки Γ_d

Теперь определим *кривизну* (снабдим ее знаком) на каждой границе Γ_i :

$$\mathcal{K} = \begin{cases} 0, & \text{если } \Gamma_i \text{ плоская;} \\ -\|f''\|, & \text{если } \Gamma_i \text{ фокусирующая;} \\ \|f''\|, & \text{если } \Gamma_i \text{ рассеивающая.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Выбор знаков продиктован традицией, сложившейся в литературе по биллиардам благодаря Я. Синаю и его школе. Однако противоположный выбор знаков тоже возможен.

Соответствующим образом определим

$$\Gamma_0 = \bigcup_{\mathcal{K}=0} \Gamma_i, \quad \Gamma_- = \bigcup_{\mathcal{K}<0} \Gamma_i, \quad \Gamma_+ = \bigcup_{\mathcal{K}>0} \Gamma_i. \quad (2.5)$$

Заметим, что кривизна каждой фокусирующей или рассеивающей стенки Γ_i отделена от нуля и бесконечности благодаря предположению А3 и замкнутости Γ_i .

Очевидно, каждая стенка Γ_i имеет конечную длину. Обозначим ее через $|\Gamma_i|$, а через $|\Gamma| = \sum_i |\Gamma_i|$ — общий периметр $\mathcal{D}$.

2.2. Неограниченные бильярдные столы

До сих пор предполагалось, что стол $\mathcal{D}$ ограничен. Иногда приходится работать с неограниченными бильярдными столами $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ и хотелось бы также включить их в наше исследование. В этом случае имеет смысл потребовать, чтобы граница $\partial\mathcal{D}$ была *локально кусочно-гладкой*; то есть для любого большого квадрата $\mathbb{K}_B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq B, |x_2| \leq B\}$ пересечение $\mathcal{D} \cap \mathbb{K}_B$ должно иметь конечно кусочно-гладкую границу, удовлетворяющую предположениям А1–А3.

Часто при исследовании неограниченных столов $\mathcal{D}$ предполагается, что они имеют периодическую структуру. Это происходит, например, когда существуют два ортогональных единичных вектора $u, v \in \mathbb{R}^2$ таких, что

$$q \in \mathcal{D} \iff q + u \in \mathcal{D} \iff q + v \in \mathcal{D}. \quad (2.6)$$

В этом случае можно выбрать координатные оси параллельными векторам u и v , так что пространство $\mathbb{R}^2$ можно рассматривать как универсальное покрытие соответствующего единичного тора $\text{Tor}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Тогда неограниченная периодическая область $\mathcal{D}$, удовлетворяющая (2.6), может быть представлена своей проекцией на Tor^2 .

Немного запутывая изложение, также обозначим указанную выше проекцию $\mathcal{D}$ на Tor^2 через $\mathcal{D}$. Очевидно, такая область $\mathcal{D} \subset \text{Tor}^2$ удовлетворяет предположениям А1–А3. Кроме того, всегда будем предполагать, что $\mathcal{D} \neq \text{Tor}^2$, чтобы избежать тривиальных «бильярдных» без стенок (или столкновений).

Подытожим наше построение.

Определение 2.5. *Бильярдный стол $\mathcal{D}$ — это замыкание ограниченной открытой связной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ или $\mathcal{D} \subsetneq \text{Tor}^2$ такой, что $\partial\mathcal{D}$ удовлетворяет предположениям А1–А3.*

2.3. Бильярдный поток

Построим динамику на бильярдном столе. Это непростая задача, поскольку существует ряд случаев, где построение невозможно и траектория бильярдной частицы не может быть определена.

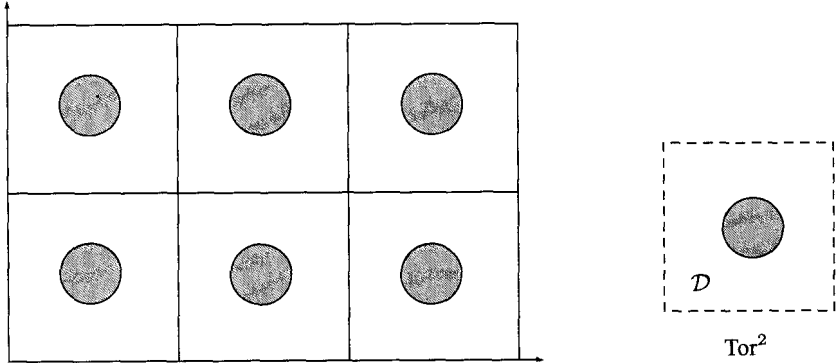


Рис. 2.4. Неограниченный периодический стол и его проекция на Tor^2

Пусть $q \in \mathcal{D}$ — положение движущейся частицы и $v \in \mathbb{R}^2$ — ее вектор скорости. Очевидно, $q = q(t)$ и $v = v(t)$ — это функции времени $t \in \mathbb{R}$. Когда частица движется внутри стола, так что $q \in \text{int } \mathcal{D}$, она сохраняет постоянную скорость:

$$\dot{q} = v \quad \text{и} \quad \dot{v} = 0 \quad (2.7)$$

(здесь точка обозначает производную по времени).

Когда частица сталкивается с регулярной частью границы, то есть $q \in \tilde{\Gamma}$, ее вектор скорости мгновенно отражается от касательной к $\tilde{\Gamma}$ в точке q . Здесь выполняется классическое правило «угол падения равен углу отражения» (см. рис. 2.5), которое записывается в виде

$$v^+ = v^- - 2\langle v^-, n \rangle n, \quad (2.8)$$

где v^+ и v^- — это скорости после столкновения и перед столкновением соответственно, а n — единичный нормальный вектор к $\tilde{\Gamma}$ в точке q .

Если движущаяся частица ударяется об угловую точку, то есть $q \in \Gamma_*$, то частица останавливается и ее движение после этой точки не определено. Это одна из сложностей, которая делает анализ бильярдной динамики трудным (ниже мы увидим это).

Уравнения движения (2.7)–(2.8) сохраняют норму $\|v\|$; обычно норма полагается равной единице: $\|v\| = 1$.

Определение 2.6. Говорят, что столкновение является *регулярным*, если $q \in \tilde{\Gamma}$ и вектор v^- не является касательным к $\tilde{\Gamma}$. В этом случае $v^+ \neq v^-$

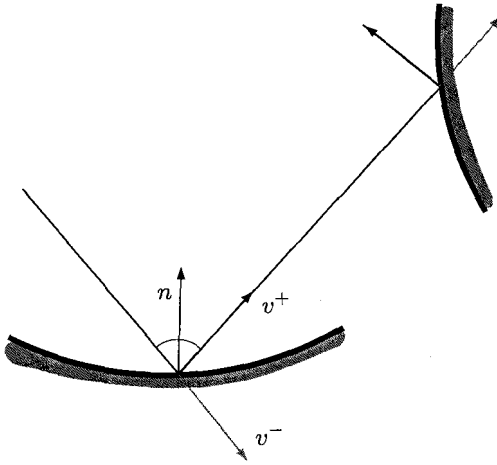


Рис. 2.5. Вектор скорости изменяется при столкновениях

(очевидно, v^- должен быть направлен наружу D , а v^+ — внутрь D). Если v^- касательный к Γ в точке столкновения, то $v^+ = v^-$ и такое столкновение называется *скользящим* или *тангенциальным*.

УПРАЖНЕНИЕ 2.7. Показать, что скользящие столкновения возможны только на рассеивающих стенках (где $\mathcal{K} > 0$). Указание: если стенка плоская, то перед скользящим столкновением частица должна пройти конечную точку стенки, что запрещено нашими правилами.

УПРАЖНЕНИЕ 2.8. Пусть движущаяся частица ударяется о регулярную часть границы в момент t (то есть $q(t) \in \tilde{\Gamma}$). Показать, что она будет двигаться внутри D без столкновений в течение некоторого временного интервала $(t, t + \varepsilon)$.

Подытожим наши наблюдения.

Предложение 2.9. Траектория частицы $(q(t), v(t))$, начинающаяся в $q(0) \in \text{int } D$, определена во все моменты времени, $-\infty < t < \infty$, за исключением двух ситуаций.

- (a) Частица ударяется об угловую точку D ; то есть $q(t) \in \Gamma_*$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$.
- (b) Время столкновений $\{t_n\}$ имеет точку сгущения в $\mathbb{R}$.

2.4. Накопление времени столкновений

Второе исключение, упоминаемое в предложении 2.9, может произойти только при очень специальных условиях. В действительности оно никогда не произойдет с хаотическими бильярдами, описанными в этой книге. Здесь обсудим условия, при которых возможна ситуация (b).

Предположим, что произошло событие (b); то есть время столкновений $\{t_n\}$ имеет точку сгущения $t_n \rightarrow t_\infty \in \mathbb{R}$. Тогда, очевидно, $q(t_n) \rightarrow q_\infty \in \Gamma$, и можно выделить два случая:

- (b1) $q_\infty \in \Gamma_*$ (угловая точка);
- (b2) $q_\infty \in \tilde{\Gamma}$ (регулярная точка).

Лемма 2.10. *Предположим, что бильiardная частица попадает в окрестность угловой точки бильiardного стола с положительным внутренним углом, $\gamma > 0$, и сталкивается с обеими сторонами угла. Тогда она должна покинуть окрестность после $[\pi/\gamma] + 1$ столкновений, так что ситуация (b1) невозможна.*

Случай, когда частица сталкивается только с одной стороной угла, эквивалентен (b2) и будет обсуждаться позже.

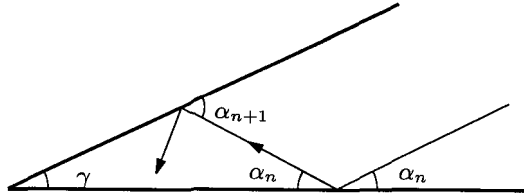


Рис. 2.6. Доказательство леммы 2.10

Доказательство. Если стороны угла плоские, то угол, образованный звеньями бильiardной траектории и сторонами, растет: $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \gamma$; см. рис. 2.6. Таким образом, после $[\pi/\gamma]$ столкновений он становится больше π , что доказывает лемму. Если стороны не плоские, то результат следует из простого аппроксимационного доказательства, которое мы оставляем читателю. ■

Лемма 2.10 показывает, что (b1) может иметь место только в каспе. Теперь несложно видеть, что любой касп имеет по крайней мере одну рассеивающую сторону (проверьте это!).

Лемма 2.11. *Если бильiardная частица входит в касп с двумя рассеивающими сторонами или одной рассеивающей и одной плоской сторонами, то она должна выйти из каспа после конечного числа столкновений, так что (b1) не может произойти.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d — расстояние от угловой точки каспа до линии, вдоль которой движется частица. После каждого столкновения с рассеивающей стороной это расстояние увеличивается (см. рис. 2.7), тогда как при столкновениях с плоской стороной оно не меняется. Оставшаяся часть доказательства требует простых рассуждений, и читатель может проделать их в качестве упражнения. ■

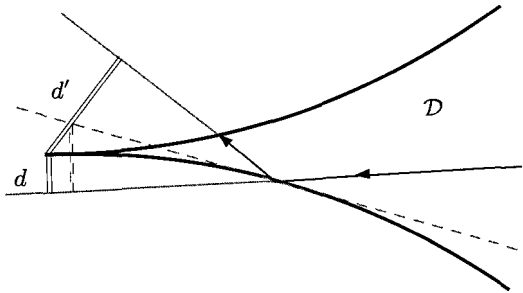


Рис. 2.7. Доказательство леммы 2.11: $d' > d$

УПРАЖНЕНИЕ 2.12. Показать, что число столкновений в каспе не является равномерно ограниченным; то есть для любого $N \geq 1$ найдется бильiardная траектория, которая совершает более чем N столкновений в окрестности каспа, прежде чем покинуть ее (в отличие от равномерного ограничения для угловых точек с положительными внутренними углами, гарантированного леммой 2.10).

Таким образом, случай (b1) возможен только в каспе с одной рассеивающей и одной фокусирующей сторонами. Но возможно ли это на самом деле? Насколько нам известно, не существует опубликованных примеров такого рода. Предоставим этот вопрос читателю в качестве (возможно, очень трудного) упражнения. В любом случае бильiardные столы с такими каспами очень специфичны и не будут рассматриваться в этой книге. Чтобы исключить их, сделаем последнее предположение.

Предположение А4. *Любой бильiardный стол $\mathcal{D}$ не содержит каспов, образованных фокусирующей стенкой и рассеивающей стенкой.*

Вернемся теперь к сгущениям типа (b2), то есть $q_\infty \in \tilde{\Gamma}$. Очевидно, (b2) невозможно, если q_∞ лежит на плоской или рассеивающей компоненте границы (проверьте это!).

Теорема 2.13 (В. Гальперн [Hal77]). *Тип сгущения столкновений (b2) невозможен на любой фокусирующей стенке с ограниченной третьей производной и кривизной, которая нигде не обращается в нуль.*

Доказательство Гальперна элементарное, но достаточно длинное, так что мы не будем приводить его здесь; читатель может ознакомиться с ним в оригинальной работе [Hal77]. Заметим, что Гальперн нашел пример C^2 -гладкой (не C^3) фокусирующей бильiardной стенки, где событие (b2) действительно имеет место.

Благодаря теореме Гальперна случай (b2) никогда не происходит для бильiardных столов, определенных в § 2.1. С учетом предположения A4 сгущения точек столкновений полностью исключены.

2.5. Фазовое пространство для потока

Состояние движущейся частицы в любой момент времени определяется положением $q \in \mathcal{D}$ и единичным вектором скорости $v \in S^1$. Таким образом, фазовое пространство системы имеет вид

$$\Omega = \{(q, v)\} = \mathcal{D} \times S^1.$$

Это трехмерное многообразие с границей $\partial\Omega = \Gamma \times S^1$. Область Ω можно представить как «бублик», сечение которого есть $\mathcal{D}$.

Кроме того, в каждой регулярной точке границы $q \in \tilde{\Gamma}$ удобно отождествить пары (q, v^-) и (q, v^+) , связанные правилом столкновения (2.8), которое сводится к «склеиванию» Ω вдоль границы. Безусловно, это меняет топологию Ω , но ее топологические свойства будут несущественны.

Обозначим через π_q и π_v естественные проекции Ω на $\mathcal{D}$ и S^1 соответственно, так что $\pi_q(q, v) = q$ и $\pi_v(q, v) = v$.

Пусть $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ обозначает множество состояний (q, v) , на которых динамика движущейся частицы определена для всех моментов времени, $-\infty < t < \infty$ (точнее это множество будет описано позже). Таким образом, получим однопараметрическую группу преобразований (поток)

$$\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega},$$

для которой время $t \in \mathbb{R}$ меняется непрерывно. То есть $\Phi^0 = \text{Id}$ и $\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$.

Любая траектория потока $\{\Phi^t x\}$, $x \in \tilde{\Omega}$, — это непрерывная кривая в Ω (непрерывность при столкновении гарантируется тождественностью v^+ и v^- ; см. выше). Обычно эту проекцию $\pi_q(\Phi^t x)$ на стол $\mathcal{D}$ называют *бильiardной траекторией*. Последняя представляет собой направленную ломаную линию, вершины которой — это точки столкновений. Ее отрезки между последовательными столкновениями называются *звеньями*.

Если бильiardный стол — это ограниченная область $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, то свободный пробег между столкновениями не может превысить диаметр $\mathcal{D}$; следовательно любая траектория потока совершает бесконечно много столкновений. Ситуация может оказаться другой, если $\mathcal{D} \subsetneq \text{To}g^2$, как в примере на рис. 2.4.

Лемма 2.14. *Если $\mathcal{D}$ — это бильiardный стол на $\text{To}g^2$, то любая траектория потока совершает или бесконечно много столкновений, или не совершает их вовсе.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что любая свободная траектория (то есть прямая) на $\text{To}g^2$ — или периодическая, или плотная (это означает, что ее замыкание есть $\text{To}g^2$); см. § 1.2. Оставшаяся часть доказательства остается в качестве упражнения. ■

Пусть $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_c \cup \tilde{\Omega}_f$, где $\tilde{\Omega}_c$ содержит все траектории со столкновениями, а $\tilde{\Omega}_f$ — это объединение всех траекторий без столкновений (которое может существовать, только если $\mathcal{D} \subsetneq \text{To}g^2$). Заметим, что как $\tilde{\Omega}_c$, так и $\tilde{\Omega}_f$ инвариантны относительно Φ^t . Оставшаяся часть этого параграфа посвящена бильiardным столам $\mathcal{D} \subsetneq \text{To}g^2$, для которых возможно существование $\tilde{\Omega}_f$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.15. Предположим, $\tilde{\Omega}_f \neq \emptyset$. Показать, что существует только конечное число векторов скорости $v \in S^1$, которые соответствуют точкам $x \in \tilde{\Omega}_f$.

Определение 2.16. Говорят, что бильiardный стол $\mathcal{D} \subsetneq \text{To}g^2$ имеет *конечный горизонт* (или *ограниченный горизонт*), если $\tilde{\Omega}_f = \emptyset$. Иначе горизонт называется *бесконечным* (или *неограниченным*).

УПРАЖНЕНИЕ 2.17. Предположим, $\tilde{\Omega}_f = \emptyset$; то есть горизонт конечен. Показать, что свободный пробег между столкновениями ограничен сверху некоторой постоянной $\tau_{\max}(\mathcal{D}) < \infty$. Подсказки: предположим, что свободный пробег между столкновениями неограничен; тогда существует последовательность отрезков линии $L_n \subset \mathcal{D}$ возрастающей длины, $|L_n| \rightarrow \infty$. Благодаря компактности $\text{To}g^2$ подпоследовательность L_{n_k} сходится к линии $L \subset \mathcal{D}$, которая, очевидно, является периодической на $\text{To}g^2$. Поскольку

горизонт конечен, прямая L должна пересекать границу $\partial\mathcal{D}$. Теперь, если во всех этих пересечениях граница $\partial\mathcal{D}$ лежит по одну сторону от L , близлежащая прямая, параллельная L , вовсе не имеет пересечений с $\partial\mathcal{D}$, что противоречит предположению о конечности горизонта. Таким образом, $\partial\mathcal{D}$ лежит по обе стороны от L в их пересечениях. Остается доказать, что длины L_{n_k} должны быть ограничены.

УПРАЖНЕНИЕ 2.18. Предположим, что $\mathcal{D}$ не имеет каспов и граница $\partial\mathcal{D}$ не является фокусирующей; то есть все внутренние углы угловых точек положительны. Показать, что число столкновений на единицу времени ограничено некоторой константой $M_{\max} < \infty$. Указание: используйте лемму 2.10.

2.6. Координатное представление потока

Опишем поток Φ^t в координатах (x, y, ω) на Ω , где $q = (x, y) \in \mathcal{D}$. Здесь x и y — обычные декартовы координаты на плоскости и $\omega \in [0, 2\pi)$ обозначает угол, откладываемый против часовой стрелки, между положительной осью x и вектором скорости v . Для любого $t \in \mathbb{R}$ отображение Φ^t действует на Ω . Рассмотрим произвольную точку и ее образ:

$$(x^-, y^-, \omega^-) \xrightarrow{\Phi^t} (x^+, y^+, \omega^+).$$

Наша цель — вычислить производную отображения Φ^t .

Если столкновений не происходит, то, согласно (2.7),

$$x^+ = x^- + t \cos \omega, \quad y^+ = y^- + t \sin \omega, \quad \omega^+ = \omega^-. \quad (2.9)$$

Предположим теперь, что существует ровно одно (регулярное) столкновение на некоторой границе Γ_i в течение интервала $(0, t)$. Тогда прямое соотношение между (x^-, y^-, ω^-) и (x^+, y^+, ω^+) будет достаточно сложным. Чтобы упростить изложение, введем некоторые дополнительные переменные.

Пусть $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_i$ обозначает точку столкновения, $\mathbf{T}$ — касательный вектор к Γ_i в этой точке и γ — угол между $\mathbf{T}$ и положительной осью x . Пусть s^- — время столкновений, $s^+ = t - s^-$, и ψ — угол между v^+ и $\mathbf{T}$; см. рис. 2.8. Тогда

$$\begin{aligned} x^- &= \bar{x} - s^- \cos \omega^-, & x^+ &= \bar{x} + s^+ \cos \omega^+, \\ y^- &= \bar{y} - s^- \sin \omega^-, & y^+ &= \bar{y} + s^+ \sin \omega^+, \\ \omega^- &= \gamma - \psi, & \omega^+ &= \gamma + \psi. \end{aligned} \quad (2.10)$$

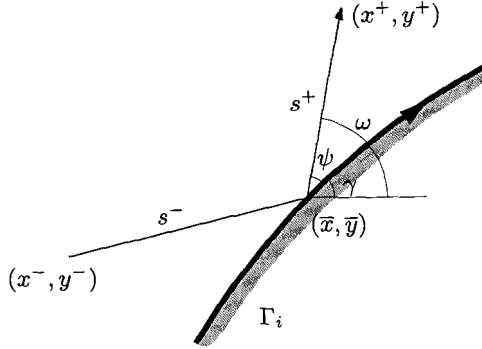


Рис. 2.8. Действие потока в координатах

Продифференцируем эти уравнения. Пусть r — параметр длины дуги на Γ_i , тогда

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= \cos \gamma dr, \\ d\bar{y} &= \sin \gamma dr, \\ d\gamma &= -Kdr \end{aligned}$$

(знак $d\gamma$ полностью определен ориентацией Γ_i , как это оговаривалось в § 2.1).

Дифференцирование (2.10) дает

$$\begin{aligned} dx^+ &= \cos \gamma dr + \cos \omega^+ ds^+ - s^+ \sin \omega^+ d\omega^+, \\ dy^+ &= \sin \gamma dr + \sin \omega^+ ds^+ + s^+ \cos \omega^+ d\omega^+, \\ d\omega^+ &= -Kdr + d\psi \end{aligned} \quad (2.11)$$

и

$$\begin{aligned} dx^- &= \cos \gamma dr - \cos \omega^- ds^- + s^- \sin \omega^- d\omega^-, \\ dy^- &= \sin \gamma dr - \sin \omega^- ds^- - s^- \cos \omega^- d\omega^-, \\ d\omega^- &= -Kdr - d\psi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.19. Доказать, что

$$dx^+ \wedge dy^+ \wedge d\omega^+ = \sin \psi dr \wedge ds^+ \wedge d\psi \quad (2.13)$$

и

$$dx^- \wedge dy^- \wedge d\omega^- = -\sin \psi dr \wedge ds^- \wedge d\psi,$$

где $\wedge$ обозначает внешнее умножение дифференциальных форм [Ar89, глава 7]. (Удобно использовать косокоммутативность $du \wedge dv = -dv \wedge du$ и, в частности, $du \wedge du = 0$.) Читатель, незнакомый с внешними формами, может вместо этого непосредственно вычислить якобианы отображений $(r, s, \psi) \mapsto (x^\pm, y^\pm, \omega^\pm)$ и показать, что они равны $\pm \sin \psi$ соответственно.

Заметим, что $s^- + s^+ = t = \text{const}$; следовательно, $ds^+ + ds^- = 0$, и

$$dx^+ \wedge dy^+ \wedge d\omega^+ = dx^- \wedge dy^- \wedge d\omega^-. \quad (2.14)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.20. Используйте (2.9), чтобы показать, что если не происходит столкновений между точками (x^-, y^-, ω^-) и (x^+, y^+, ω^+) , то (2.14) также выполняется.

Индукция по числу столкновений приводит к следующему результату.

Теорема 2.21. *Поток Φ^t сохраняет форму объема $dx \wedge dy \wedge d\omega$; таким образом, он сохраняет меру Лебега $dx dy d\omega$ на Ω .*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.22. Мера Лебега на Ω в действительности представляет собой меру Лиувилля, соответствующую гамильтоновой системе (2.7)–(2.8). Этот факт часто приводится как «доказательство» инвариантности меры Лебега; однако мы избегаем этого доказательства, так как тяжело проверить, что правило столкновения (2.8) сохраняет гамильтоновы характер движения.

Определение 2.23. Нормированная мера Лебега на Ω

$$d\mu_\Omega = (2\pi|\mathcal{D}|)^{-1} dx dy d\omega \quad (2.15)$$

(здесь $|\mathcal{D}|$ обозначает площадь области $\mathcal{D}$) — это каноническая вероятностная мера, сохраняемая билиардным потоком Φ^t .

2.7. Гладкость потока

Лемма 2.24. *Поток Φ^t является $C^{\ell-1}$ -гладким в точках, в которых происходят только регулярные столкновения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения (2.11)–(2.12) показывают, что производная потока Φ^t выражается через кривизну $\mathcal{K}$ стенки Γ_i , которая, в свою очередь, соответствует второй производной C^ℓ -функции $f_i(r)$. ■

Теперь предположим, что происходит скользящее столкновение билиардной траектории между точками (x^-, y^-, ω^-) и (x^+, y^+, ω^+) на рассеивающей стенке. Тогда несложно увидеть, что поток Φ^t не дифференцируем

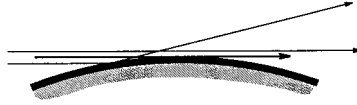


Рис. 2.9. Скользящее столкновение; здесь поток непрерывен (но не дифференцируем)

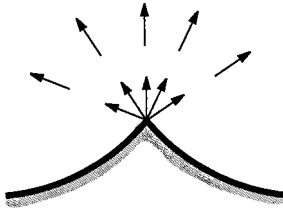


Рис. 2.10. «Веер», исходящий из угловой точки $\mathcal{D}$. Показаны фазовые точки, первый контакт которых с $\partial\mathcal{D}$ в прошлом происходил в угловой точке

в (x^-, y^-, ω^-) (даже если он непрерывный; см. рис. 2.9). Оставим доказательство этого факта в качестве упражнения.

Множество $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$ (см. определение $\tilde{\Omega}$ в § 2.5) соответствует состояниям (q, v) , на которых динамика определена только в течение ограниченного временного интервала, пока траектория не сталкивается с угловой точкой $q' \in \Gamma_*$ (в прошлом или будущем). Состояния $x \in \Omega$, самый первый контакт которых с Γ (в прошлом или будущем) происходит в угловой точке, образуют двумерную поверхность в Ω ; см. рис. 2.10.

Так как поток $C^{\ell-1}$ -гладкий при регулярных столкновениях, состояния, траектории которых ударяются об угловые точки в удаленном прошлом и удаленном будущем, образуют двумерные $C^{\ell-1}$ -гладкие подмногообразия в Ω . Приходим к следующей теореме.

Теорема 2.25. $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$ — это счетное объединение двумерных подмногообразий в Ω .

Следствие 2.26. $\tilde{\Omega}$ — это плотное G_δ множество полной меры Лебега в Ω .

Таким образом, в терминах инвариантной меры μ_Ω поток Φ^t определен почти везде.

2.8. Продолжение потока по непрерывности

Продолжим поток Φ^t на все пространство Ω по непрерывности.

УПРАЖНЕНИЕ 2.27. Показать, что поток Φ^t непрерывен на $\tilde{\Omega}$ (предполагая, как и ранее, тождество (q, v^-) и (q, v^+)). Обратите внимание: скользящие столкновения на рассеивающих стенках необходимо рассматривать очень осторожно; см. рис. 2.9.

Так как $\tilde{\Omega}$ — это плотное подмножество Ω , поток Φ^t можно продолжить на все пространство Ω по непрерывности, но это продолжение может быть многозначным в некоторых точках; см., например, рис. 2.11. Различные продолжения Φ^t для одной и той же точки $x \in \Omega$ называются *ветвями* (продолженного) потока. Для каждого $t \in \mathbb{R}$ существует конечное число ветвей продолженного потока Φ^t в любой точке $x \in \Omega$. Число ветвей может расти неопределенно при $t \rightarrow \pm\infty$.

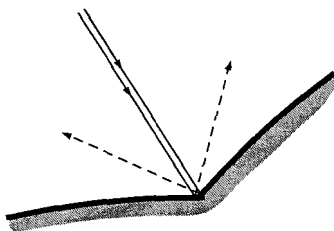


Рис. 2.11. Многозначное непрерывное продолжение потока

УПРАЖНЕНИЕ 2.28. Показать, что траекторию, ударяющуюся об угловую точку, можно продолжить по непрерывности до двух (но не более) различных ветвей. При каких условиях эти продолжения совпадают (то есть когда этот поток действительно является непрерывным) для траектории, ударяющейся об угловую точку? Ответ: ветви совпадают тогда и только тогда, когда внутренний угол в угловой точке или равен нулю, или делится на π (то есть $\gamma = 0$ или $\gamma = \pi/n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$). Подсказки: при $\gamma > 0$ см. доказательство леммы 2.10; при $\gamma = 0$ см. доказательство леммы 2.11. В обоих случаях для завершения доказательства требуется тщательный геометрический анализ.

УПРАЖНЕНИЕ 2.29. Определить, при каких условиях бильярдный поток Φ^t имеет глобально непрерывное продолжение на все пространство Ω .

Ответ: это происходит тогда и только тогда, когда каждый внутренний угол или равен нулю, или делится на π (как, например, бильярд в квадрате в § 1.2).

2.9. Отображение столкновений

Общепринято при изучении динамических систем редуцировать поток к отображению с помощью построения сечения. Для заданного потока $\Phi^t: \Omega \rightarrow \Omega$ на многообразии Ω найдем гиперповерхность $M \subset \Omega$, трансверсальную потоку так, что каждая траектория пересекает M бесконечно много раз. Тогда поток порождает отображение возвращения $F: M \rightarrow M$ и время возвращения $L(x) = \min\{s > 0: \Phi^s(x) \in M\}$ на M такие, что $F(x) = \Phi^{L(x)}(x)$.

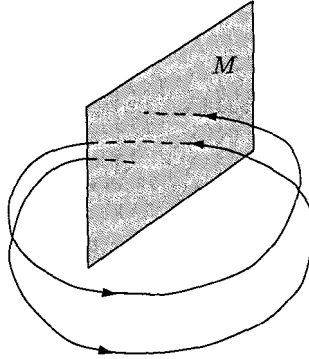


Рис. 2.12. Сечение потока

И наоборот, для заданного измеримого пространства M , измеримого отображения $F: M \rightarrow M$ и положительной функции $L: M \rightarrow \mathbb{R}_+$, можно построить пространство

$$\Omega = \{(x, s): x \in M, \quad 0 \leq s \leq L(x)\}$$

и поток $\Phi^t: \Omega \rightarrow \Omega$, определяемый соотношением $\Phi^t(x, s) = (x, s + t)$, причем точки $(x, L(x))$ и $(F(x), 0)$ отождествляются. Поток Φ^t измерим на Ω . Если отображение F сохраняет вероятностную меру μ на M и

$$\bar{L} = \int_M L(x) d\mu(x) < \infty,$$

то поток сохраняет вероятностную меру μ_1 на Ω , имеющую вид

$$d\mu_1 = \bar{L}^{-1} d\mu \times ds \quad (2.16)$$

(заметим, что локально эта мера является произведением мер и ее инвариантность под действием Φ^t является следствием теоремы Фубини). Отображение F часто называется преобразованием на базе, $L(x)$ — функцией потолка и Φ^t — специальным потоком (suspension flow) или потоком Какутани. Более подробное описание этих построений читатель может найти в [BrS02, с. 21–22], [DS00, с. 26–28], [CFS82, с. 292–295] и [Pet83, с. 11].

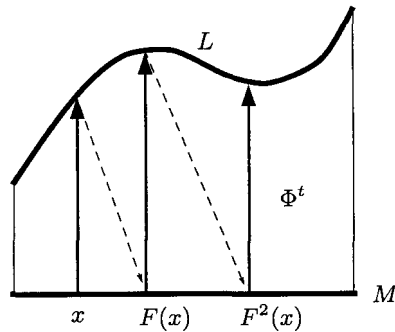


Рис. 2.13. Специальный поток

Для билиардной системы гиперповерхность в Ω обычно строится на границе билиардного стола, то есть на множестве $\Gamma \times S^1$. Однако в этом построении есть один тонкий момент: так как скорости векторов v^- и v^+ до столкновения и после столкновения (связанные соотношением (2.8)) отождествляются, то S^1 эффективно преобразуется в полуокружность. Чтобы учесть такое отождествление, обычно сечение описывается как множество всех векторов скорости после столкновения:

$$\mathcal{M} = \cup_i \mathcal{M}_i, \quad \mathcal{M}_i = \{x = (q, v) \in \Omega: q \in \Gamma_i, \langle v, n \rangle \geq 0\}, \quad (2.17)$$

где n — единичный нормальный вектор к Γ_i , направленный внутрь $\mathcal{D}$. Множество $\mathcal{M}$ — это двумерное подмногообразие в Ω , называемое *пространством столкновений*.

УПРАЖНЕНИЕ 2.30. Пусть $x = (q, v) \in \mathcal{M}_i$. При каких условиях траектория $\Phi^t x$ определена на некотором малом интервале $0 < t < \varepsilon$? Ответ: q должна быть регулярной точкой ($q \in \tilde{\Gamma}$) и должно выполняться или

неравенство $\langle v, n \rangle > 0$ (регулярное столкновение), или $\langle v, n \rangle = 0$, но в последнем случае Γ_i должна быть рассеивающей стенкой.

Если траектория $\Phi^t x$ при $x \in M$ определена в течение некоторого интервала времени $(0, \varepsilon)$, то она должна пересекать поверхность $\Gamma \times S^1$ в будущем времени, $\tau(x) > 0$, согласно лемме 2.14, а величина $\tau(x)$ будет называться *временем возвращения*. Так как скорость полагается равной единице, то $\tau(x)$ также равно расстоянию, которое билиардная траектория, выходящая из x , покрывает до следующего столкновения.

Любая траектория потока $\Phi^t: \tilde{\Omega}_c \rightarrow \tilde{\Omega}_c$ (см. определение $\tilde{\Omega}_c$ в § 2.5) пересекает поверхность M бесконечно много раз. Пусть $\tilde{M} = M \cap \tilde{\Omega}$. Это соотношение определяет *отображение возвращения*

$$\mathcal{F}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}, \quad \text{где} \quad \mathcal{F}(x) = \Phi^{\tau(x)+0} x. \quad (2.18)$$

Ниже будет рассмотрено продолжение $\mathcal{F}$ до $M \setminus \tilde{M}$. Отображение $\mathcal{F}$ часто называется *билиардным отображением* или *отображением столкновений*. (Соответственно, M иногда называется *фазовым пространством билиардного отображения* $\mathcal{F}$.)

2.10. Координаты для отображения и его особые точки

Зафиксируем параметр длины дуги r на каждом участке Γ_i , так что r принимает значения из интервала $[a_i, b_i]$. Разумеется, $b_i - a_i = |\Gamma_i|$. Предположим, что интервалы (a_i, b_i) не пересекаются в $\mathbb{R}$. На гладких замкнутых кривых Γ_i будем отождествлять $a_i = b_i$, таким образом делая r циклическим параметром. Для каждой точки $x \in M$, пусть $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ обозначает угол между v и n , ориентированный, как показано на рис. 2.14.

Тогда r и φ формируют координаты на M . Для каждой гладкой замкнутой кривой Γ_i многообразие $M_i = \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$ — это цилиндр (поскольку r — циклическая координата), тогда как для каждой компоненты

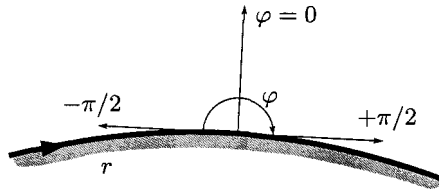
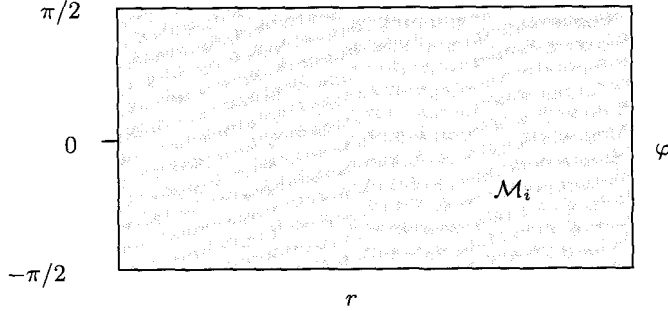


Рис. 2.14. Ориентация r и φ

Рис. 2.15. Компонента пространства столкновения $\mathcal{M}$

границы Γ_i многообразие $\mathcal{M}_i = [a_i, b_i] \times [-\pi/2, \pi/2]$ будет прямоугольником; см. рис. 2.15.

Введем обозначение

$$S_0 := \partial\mathcal{M} = \{|\varphi| = \pi/2\} \cup \left(\bigcup_i (\{r = a_i\} \cup \{r = b_i\}) \right), \quad (2.19)$$

где множество $\{r = a_i\} \cup \{r = b_i\}$ включается только для тех Γ_i , которые не являются гладкими замкнутыми кривыми (то есть где $\{a_i\} \cup \{b_i\}$ — это истинная граница интервала $[a_i, b_i]$).

Для любой точки $x \in \text{int } \mathcal{M}$ ее траектория $\Phi^t x$ определена по меньшей мере для $0 < t < \tau(x)$, то есть вплоть до следующего пересечения с $\mathcal{M}$, при котором возможны три случая:

- (а) регулярное столкновение, то есть $\mathcal{F}(x) \in \text{int } \mathcal{M}$;
- (б) скользящее столкновение на рассеивающей стенке, то есть $\mathcal{F}(x) \in S_0$;
- (с) траектория ударяется об угловую точку и умирает.

В последнем случае отображение $\mathcal{F}(x)$ не определено. Пусть

$$S_1 = S_0 \cup \{x \in \text{int } \mathcal{M} : \mathcal{F}^1(x) \notin \text{int } \mathcal{M}\}.$$

Заметим, что $S_1 \setminus S_0$ — это множество точек, где происходит событие (б) или (с).

УПРАЖНЕНИЕ 2.31. Показать, что множество $\mathcal{M} \setminus S_1$ — открытое и в каждой точке этого множества отображение $\mathcal{F}$ непрерывно и фактически является локальным гомеоморфизмом. Проверить, что в каждой точке $x \in S_1 \setminus S_0$ отображение $\mathcal{F}$ разрывно.

УПРАЖНЕНИЕ 2.32. Проверить, что рассуждения выше можно применить к обратному отображению $\mathcal{F}^{-1}$ и множеству

$$S_{-1} = S_0 \cup \{x \in \text{int } \mathcal{M} : \mathcal{F}^{-1}(x) \notin \text{int } \mathcal{M}\}. \quad (2.20)$$

Показать, что $\mathcal{F} : \mathcal{M} \setminus S_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus S_{-1}$ это гомеоморфизм.

2.11. Производная отображения

В этом параграфе проведем дифференцирование отображения столкновений $\mathcal{F}$ в такой точке $x = (r, \varphi) \in \text{int } \mathcal{M}$, что $\mathcal{F}(x) = (r_1, \varphi_1) \in \text{int } \mathcal{M}$. Обозначим через $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial \mathcal{D}$ и $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in \partial \mathcal{D}$ координаты граничных точек, соответствующих r и r_1 , а через ω — угол, образованный бильiardной траекторией между этими точками и положительной осью x в $\mathbb{R}^2$; см. рис. 2.16. Тогда

$$\bar{x}_1 - \bar{x} = \tau \cos \omega \quad \text{и} \quad \bar{y}_1 - \bar{y} = \tau \sin \omega, \quad (2.21)$$

где $\tau = \tau(x)$. Здесь используются символы γ и ψ , введенные в § 2.6; см. также рис. 2.16. Заметим, что

$$\psi = \pi/2 - \varphi,$$

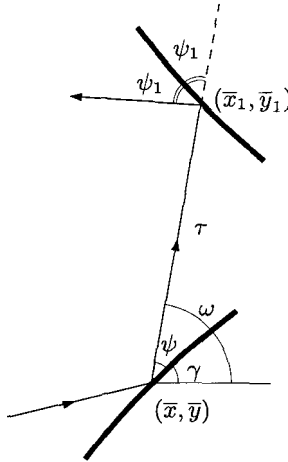


Рис. 2.16. Действие отображения в координатах

и напомним, что

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= \cos \gamma \, dr, \\ d\bar{y} &= \sin \gamma \, dr, \\ d\gamma &= -\mathcal{K} \, dr. \end{aligned}$$

Аналогичные обозначения γ_1 и ψ_1 используются в точке r_1 . Заметим, что

$$\omega = \gamma + \psi = \gamma_1 - \psi_1. \quad (2.22)$$

Дифференцируя последнее уравнение, получим

$$d\omega = -\mathcal{K} \, dr + d\psi = -\mathcal{K}_1 \, dr_1 - d\psi_1. \quad (2.23)$$

Дифференцируя (2.21), имеем

$$\begin{aligned} \cos \gamma_1 \, dr_1 - \cos \gamma \, dr &= \cos \omega \, d\tau - \tau \sin \omega \, d\omega, \\ \sin \gamma_1 \, dr_1 - \sin \gamma \, dr &= \sin \omega \, d\tau + \tau \cos \omega \, d\omega. \end{aligned}$$

Исключая $d\tau$ и используя (2.22), получим

$$\sin \psi_1 \, dr_1 + \sin \psi \, dr = \tau \, d\omega. \quad (2.24)$$

Решая уравнения (2.23) и (2.24) для dr_1 и $d\psi_1$ и заменяя ψ и ψ_1 на $\pi/2 - \varphi$ и $\pi/2 - \varphi_1$ соответственно, получим

$$\begin{aligned} -\cos \varphi_1 \, dr_1 &= (\tau \mathcal{K} + \cos \varphi) \, dr + \tau \, d\varphi, \\ -\cos \varphi_1 \, d\varphi_1 &= (\tau \mathcal{K} \mathcal{K}_1 + \mathcal{K} \cos \varphi_1 + \mathcal{K}_1 \cos \varphi) \, dr + \\ &\quad + (\tau \mathcal{K}_1 + \cos \varphi_1) \, d\varphi. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Таким образом, получим производную $D\mathcal{F}$ в точке $x = (r, \varphi)$ в виде матрицы 2×2 :

$$D_x \mathcal{F} = \frac{-1}{\cos \varphi_1} \begin{bmatrix} \tau \mathcal{K} + \cos \varphi & \tau \\ \tau \mathcal{K} \mathcal{K}_1 + \mathcal{K} \cos \varphi_1 + \mathcal{K}_1 \cos \varphi & \tau \mathcal{K}_1 + \cos \varphi_1 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Напомним, что отображение $\mathcal{F}: \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-1}$ является гомеоморфизмом. Можно утверждать даже больше.

Теорема 2.33. *Отображение $\mathcal{F}: \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-1}$ является $C^{\ell-1}$ -диффеоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производная $D\mathcal{F}$ выражается через кривизну $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_1$ границы $\partial\mathcal{D}$, что соответствует второй производной C^ℓ -гладких функций $f_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$. ■

Выражение (2.26) показывает, что производные $\mathcal{F}$ не ограничены: они резко возрастают при $\cos \varphi_1 \rightarrow 0$, то есть когда точка x_1 близка к S_0 , а точка x близка к S_1 .

Будем называть множество S_1 *множеством особых точек* для отображения $\mathcal{F}$. Аналогично, S_{-1} — это *множество особых точек* для отображения $\mathcal{F}^{-1}$. Эти множества являются объединениями компактных гладких кривых (их точная степень гладкости будет определена позже); ср. с теоремой 2.25.

УПРАЖНЕНИЕ 2.34. Предположим, что горизонт ограничен. Показать, что S_1 и S_{-1} — *конечные* объединения компактных гладких кривых. Если горизонт неограниченный, то S_1 и S_{-1} — *конечные*, или *счетные*, объединения компактных гладких кривых.

Определим по индукции

$$S_{n+1} = S_n \cup \mathcal{F}^{-1}(S_n) \quad \text{и} \quad S_{-(n+1)} = S_{-n} \cup \mathcal{F}(S_{-n}). \quad (2.27)$$

Нетрудно увидеть, что S_{n+1} и $S_{-(n+1)}$ — множества особых точек для отображений $\mathcal{F}^{n+1}$ и $\mathcal{F}^{-(n+1)}$ соответственно. Эти множества являются объединениями компактных гладких кривых. Таким образом, на множестве

$$\widehat{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} S_n \quad (2.28)$$

все итерации $\mathcal{F}$ определены и $C^{\ell-1}$ -дифференцируемы.

В результате отображение $\mathcal{F}$ полностью определяется (2.18) на плотном G_δ подмножестве $\widehat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ полной лебеговой меры. Оно может быть продолжено по непрерывности на все $\mathcal{M}$, но это продолжение может оказаться многозначным в некоторых точках.

2.12. Инвариантная мера отображения

Используя явную формулу для $D_x \mathcal{F}$ (см. (2.26)), несложно увидеть, что

$$\det D_x \mathcal{F} = \cos \varphi / \cos \varphi_1. \quad (2.29)$$

Лемма 2.35. *Отображение $\mathcal{F}$ сохраняет меру $\cos \varphi \, dr \, d\varphi$ на $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (2.29) и делая замену переменных, получим

$$\iint_{\mathcal{F}(A)} \cos \varphi_1 \, dr_1 \, d\varphi_1 = \iint_A \cos \varphi \, dr \, d\varphi$$

для любого борелевского множества $A \subset \mathcal{M}$. ■

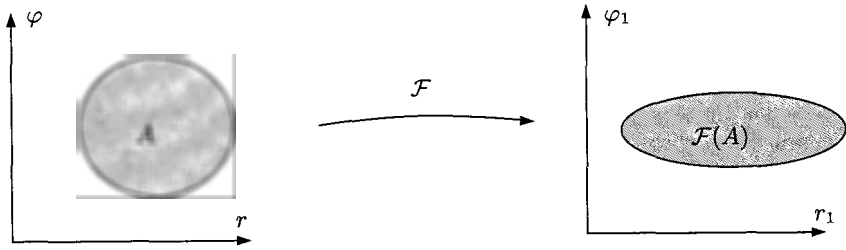


Рис. 2.17. Доказательство леммы 2.35

Заметим, что

$$\iint_{\mathcal{M}} \cos \varphi \, dr \, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_{\Gamma} dr = 2 |\Gamma|.$$

Определение 2.36. Нормированная мера на $\mathcal{M}$,

$$d\mu = (2 |\Gamma|)^{-1} \cos \varphi \, dr \, d\varphi,$$

является канонической вероятностной мерой, которая сохраняется билиардным отображением $\mathcal{F}$.

Согласно соотношению (2.16), поток Φ^t должен сохранять вероятностную меру

$$d\mu_1 = \bar{\tau}^{-1} d\mu \times ds = (2 |\Gamma|)^{-1} \bar{\tau}^{-1} \cos \varphi \, dr \, d\varphi \, ds, \quad (2.30)$$

где

$$\bar{\tau} = \int_{\mathcal{M}} \tau(x) \, d\mu(x)$$

— это *среднее время возвращения*. Последнюю величину чаще всего называют *средней длиной свободного пробега* на билиардном столе $\mathcal{D}$ (заметим, что время равно пути, так как скорость равна единице). Благодаря (2.13) соотношение (2.30) можно переписать в виде

$$d\mu_1 = (2 |\Gamma|)^{-1} \bar{\tau}^{-1} dx \, dy \, d\omega$$

(здесь использовался тот факт, что $\sin \psi = \cos \varphi$). Сравнивая эту формулу с (2.15), приходим к выводу, что $\mu_1 = \mu_{\Omega}$ и, следовательно, нормализованные коэффициенты для этих мер совпадают:

$$2\pi |\mathcal{D}| = 2 |\Gamma| \bar{\tau} \quad (2.31)$$

(кроме того, это также доказывает, что $\bar{\tau} < \infty$).

УПРАЖНЕНИЕ 2.37. Показать, что почти для всех (по мере μ) точек $x \in \mathcal{M}$ существуют пределы

$$\bar{\tau}_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \tau(\mathcal{F}^i x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \tau(\mathcal{F}^{-i} x),$$

где $\bar{\tau}_x$ — это $\mathcal{F}$ -инвариантная функция на $\mathcal{M}$, удовлетворяющая соотношению

$$\int_{\mathcal{M}} \bar{\tau}_x d\mu = \bar{\tau}.$$

Указание: использовать эргодическую теорему Биркгофа.

УПРАЖНЕНИЕ 2.38. Показать, что почти для всех (по мере μ_Ω) точек $X \in \Omega$ существуют пределы

$$\bar{\tau}_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{n_X(0, T)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{n_X(-T, 0)},$$

где $n_X(a, b)$ обозначает число столкновений траектории $\Phi^t(X)$ в течение временного интервала $a < t < b$. Кроме того, показать, что $\bar{\tau}_X = \bar{\tau}_x$, если точки $X \in \Omega$ и $x \in \mathcal{M}$ принадлежат одной и той же траектории.

2.13. Средняя длина свободного пробега

Соотношение (2.31) дает простую и элегантную формулу для средней длины свободного пробега на бильярдном столе $\mathcal{D}$:

$$\bar{\tau} = \frac{\pi |\mathcal{D}|}{|\Gamma|}. \quad (2.32)$$

Таким образом, средний свободный путь зависит только от площади и периметра области $\mathcal{D}$, но не от ее формы. Это уравнение хорошо известно в интегральной геометрии и геометрической вероятности, где оно доказывается различными методами [Mat75, Sa76].

УПРАЖНЕНИЕ 2.39. Вывести (2.32) путем прямого интегрирования тождества 2.13. Указание: заметим, что $\int ds^+ = \tau$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.40. Вычислить среднюю длину свободного пробега на бильярдном столе $\mathcal{D} = \text{Tor}^2 \setminus B_r$, где B_r — это шар (диск) радиуса r ; см. рис. 2.4. Ответ: $\bar{\tau} = (1 - \pi r^2)/(2r)$. Заметим, что если r мало,

то $\bar{\tau} \approx 1/(2r)$. Это соотношение можно проинтерпретировать в вероятностном смысле: бильiardная частица, движущаяся свободно на единичном торе, может случайным образом удариться о неподвижный диск B_r с вероятностью, равной его диаметру $2r$; таким образом, среднее расстояние между столкновениями равно $\approx 1/(2r)$.

Если горизонт ограничен, то $\tau(x) \leq \tau_{\max} < \infty$; следовательно, все моменты функции $\tau(x)$ конечны. Это свойство не обязательно выполняться, если горизонт неограниченный, то есть при $\sup \tau(x) = \infty$.

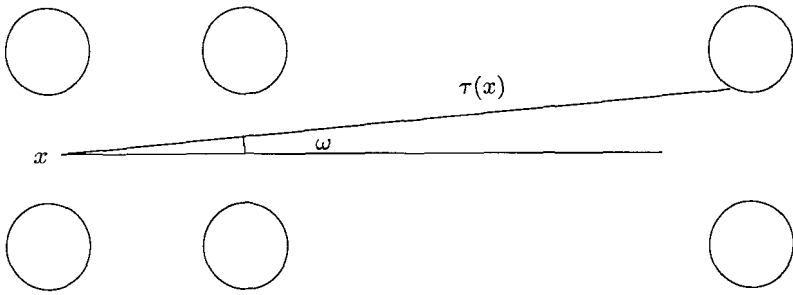


Рис. 2.18. Подсказка к упражнению 2.41

УПРАЖНЕНИЕ 2.41. Рассмотрим бильiardный стол из упражнения 2.40. Показать, что

$$\int_{\mathcal{M}} [\tau(x)]^2 d\mu(x) = \infty.$$

Подсказки: сначала используем (2.13), чтобы заменить интеграл выше на

$$(2|\Gamma|)^{-1} \int_{\mathcal{M}} [\tau(r, \varphi)]^2 \cos \varphi dr d\varphi = (2|\Gamma|)^{-1} \int_{\Omega} \tau(x, y, \omega) dx dy d\omega,$$

где $\tau(x, y, \omega)$ — длина звена бильiardной траектории, проходящей через точку $(x, y, \omega) \in \Omega$ (звено между первым будущим столкновением и последним прошлым столкновением). Теперь рассмотрим «почти горизонтальные траектории» с $\omega \approx 0$, проходящие через точки $(x, y) \in \mathcal{D}$, расположенные выше или ниже диска B_r . Обратите внимание, что $\tau(x, y, \omega) \sim 1/\omega$; таким образом, искомый интеграл расходится.

Функция $\tau(x)$ может иметь положительную оценку снизу, как в последних двух упражнениях. Однако если бильярдный стол имеет фокусирующий участок границы или угловую точку с внутренним углом $\gamma < \pi$, то $\min_x \tau(x) = 0$. В этом случае важно распределение малых величин $\tau(x)$. Читателю предоставляется возможность проверить следующие факты.

УПРАЖНЕНИЕ 2.42. Показать, что если бильярдный стол имеет фокусирующий участок границы, но не угловые точки, то $\mu\{x: \tau(x) < \varepsilon\} \leq \leq \text{const} \cdot \varepsilon^2$. Если бильярдный стол имеет угловую точку с внутренним углом $\gamma < \pi$ и эта точка не касп, то $\mu\{x: \tau(x) < \varepsilon\} \leq \text{const} \cdot \varepsilon$. Если стол содержит касп, то $\mu\{x: \tau(x) < \varepsilon\} \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{1/2}$. Последний случай наиболее трудный; не следует ожидать легкого решения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.43. Определить множество положительных чисел $a > 0$, для которых функция $F(x) = [\tau(x)]^{-a}$ интегрируема на $\mathcal{M}$.

Ответ: для трех случаев, описанных в предыдущем упражнении, этими интервалами будут соответственно $(0, 2)$, $(0, 1)$ и $(0, 1/2)$.

2.14. Инволюция

Бильярдная динамика имеет важное свойство *инволюции*: для любого $x = (q, v) \in \Omega$ точка $\mathcal{I}_\Omega(x) = (q, -v)$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi^{-t}(\mathcal{I}_\Omega(x)) = \mathcal{I}_\Omega(\Phi^t x),$$

если только сам поток определен. Следовательно, инволюция $\mathcal{I}_\Omega: \Omega \rightarrow \Omega$ антикоммутирует с потоком Φ^t , и этот факт можно записать как

$$\Phi^{-t} \circ \mathcal{I}_\Omega = \mathcal{I}_\Omega \circ \Phi^t.$$

Очевидно, это означает, что если изменить скорость частицы на противоположную, то она повторит прошлую траекторию «в обратном направлении» (этот факт известен как *обратимость времени* в бильярдной динамике). Заметим, что отображение $\mathcal{I}_\Omega$ также сохраняет меру μ_Ω .

Отображение столкновений $\mathcal{F}$ также допускает инволюцию, $\mathcal{I}$, определяемую отображением $(r, \varphi) \mapsto (r, -\varphi)$. Инволюция антикоммутирует с $\mathcal{F}$; то есть

$$\mathcal{F}^{-k} \circ \mathcal{I} = \mathcal{I} \circ \mathcal{F}^k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

если только отображение $\mathcal{F}^k$ определено. Также заметим, что отображение $\mathcal{I}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ сохраняет меру μ .

Рис. 2.19. Инволюция отображения $\mathcal{F}$

УПРАЖНЕНИЕ 2.44. Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{L}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$, определенную в виде

$$\mathbf{L}(r, \varphi) = (\bar{x}_1 - \bar{x}, \bar{y}_1 - \bar{y}) = (\tau \cos \omega, \tau \sin \omega);$$

см. рис. 2.16. Это первое направленное звено билиардной траектории, выходящей из (r, φ) . Показать, что

$$\int_{\mathcal{M}} \mathbf{L} d\mu = 0.$$

Указание: заметим, что $\mathbf{L}(x) = -\mathbf{L}(\mathcal{I} \circ \mathcal{F}(x))$, и затем используем инвариантность меры μ под действием $\mathcal{F}$ и $\mathcal{I}$.

ГЛАВА 3

Показатели Ляпунова и гиперболичность

В первом разделе этой главы напомним основные определения и факты, касающиеся показателей Ляпунова. Сведения приводятся в форме, удобной для описания билиардов, но в действительности их можно использовать для более общих классов отображений с особенностями.

3.1. Показатели Ляпунова: общие факты

Одними из главных инструментов при изучении дифференцируемых консервативных динамических систем являются характеристические показатели Ляпунова; с их помощью измеряется устойчивость (или неустойчивость) траекторий при малых возмущениях.

Пусть M — компактное риманово многообразие (возможно, с границей и углами), $N \subset M$ — открытое и плотное подмножество и $F: N \rightarrow M$ — C^r -гладкий (где $r \geq 2$) диффеоморфизм N на $F(N)$. Заметим, что все итерации F определены на множестве

$$\tilde{N} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(N).$$

Предположим, что F сохраняет вероятностную меру μ на M и $\mu(\tilde{N}) = 1$.

Теорема 3.1 (Оселедец [Os68, Ru79, LS82, BP01]). *Предположим*

$$\int_M \log^+ \|D_x F\| d\mu(x) < \infty \quad \text{и} \quad \int_M \log^+ \|D_x F^{-1}\| d\mu(x) < \infty,$$

где $\log^+ s = \max\{\log s, 0\}$. Тогда существует F -инвариантное множество $H \subset \tilde{N}$, $\mu(H) = 1$, такое, что для всех $x \in H$ и для некоторого $m = m(x)$ существует DF -инвариантная декомпозиция касательного пространства

$$\mathcal{T}_x M = E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(m)} \tag{3.1}$$

такая, что для всех ненулевых векторов $v \in E_x^{(i)}$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x F^n v\| = \lambda_x^{(i)}, \quad (3.2)$$

где $\lambda_x^{(1)} > \dots > \lambda_x^{(m)}$.

Величины $\lambda_x^{(i)}$ называются *показателями Ляпунова* отображения F в точке x , а $k_i = \dim E_x^{(i)}$ — их *кратностями*. Очевидно, показатели Ляпунова могут быть определены в любой точке $x \in \tilde{N}$, где существуют DF -инвариантная декомпозиция (3.1) и пределы (3.2) (независимо от инвариантных мер).

Из (3.2) следует, что показатели Ляпунова и их кратности инвариантны под действием отображения F . Если отображение F эргодическое, то показатели Ляпунова $\lambda^{(1)} > \dots > \lambda^{(m)}$ (также как и их кратности) почти везде постоянны.

Уравнение (3.2) можно переписать в виде $\|D_x F^n v\| \sim e^{n\lambda_x^{(i)}}$ (см. также более точную формулу в упражнении 3.5). Если $\lambda_x^{(i)} > 0$, то ненулевые касательные векторы $v \in E_x^{(i)}$ растягиваются экспоненциально (со скоростью $\lambda_x^{(i)}$) в будущем и сжимаются экспоненциально (с той же скоростью) в прошлом. Если $\lambda_x^{(i)} < 0$, то происходит наоборот. На языке теории дифференциальных уравнений векторы $v \in E_x^{(i)}$ с $\lambda_x^{(i)} > 0$ соответствуют *неустойчивым* возмущениям (начального условия x), а векторы $v \in E_x^{(i)}$ с $\lambda_x^{(i)} < 0$ соответствуют *устойчивым* возмущениям.

Если $\lambda_x^{(i)} = 0$, то соответствующие касательные векторы не растягиваются и не сжимаются с экспоненциальной скоростью (но они могут растягиваться или сжиматься более медленно, скажем, линейно по n ; см. упражнение 3.8 ниже).

Определение 3.2. Говорят, что точка $x \in M$ является *гиперболической*, если показатели Ляпунова существуют в x и ни один из них не равен нулю.

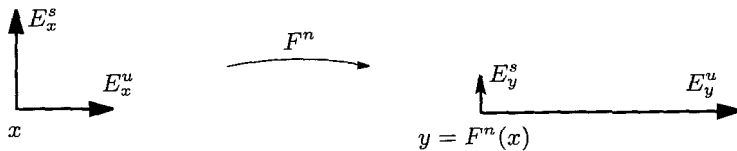


Рис. 3.1. Разложение касательного пространства $T_x M = E_x^u \oplus E_x^s$

Для гиперболической точки $x \in M$ имеет место декомпозиция $T_x M = E_x^u \oplus E_x^s$, где

$$E_x^u = \bigoplus_{\lambda_x^{(i)} > 0} E_x^{(i)} \quad \text{и} \quad E_x^s = \bigoplus_{\lambda_x^{(i)} < 0} E_x^{(i)}$$

(верхние индексы u и s обозначают *неустойчивость* и *устойчивость* соответственно).

Очевидно, подпространства E_x^u и E_x^s трансверсальны друг к другу, таким образом, угол $\gamma_0(x)$ между ними должен быть положительным. Однако если этот угол мал, то ситуация становится сложнее. Следующее дополнение к теореме Оселедца предоставляет возможность отчасти контролировать этот угол.

Выберем такое $a \in \mathbb{R}$, что показатели Ляпунова отличны от a почти в каждой точке $x \in M$ относительно меры μ . Введем обозначения

$$E_x^{a+} = \bigoplus_{\lambda_x^{(i)} > a} E_x^{(i)}, \quad E_x^{a-} = \bigoplus_{\lambda_x^{(i)} < a} E_x^{(i)}$$

(это обобщение E_x^u и E_x^s , введенных ранее). Пусть $\gamma_a(x)$ обозначает угол между пространствами E_x^{a+} и E_x^{a-} .

Предложение 3.3 ([KS86]). Почти для всех точек $x \in M$ относительно меры μ

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \gamma_a(F^n(x)) = 0. \quad (3.3)$$

Другими словами, угол $\gamma_a(F^n(x))$ может стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$, но намного медленней, чем любая показательная функция. Это полезное дополнение к теореме Оселедца; см. лемму 3.9 ниже.

Определение 3.4. Отображение F называется *гиперболическим*, если почти все точки $x \in M$ (относительно меры μ) являются гиперболическими.

В заключение покажем важное различие между *равномерной* и *неравномерной* гиперболичностью. Следующее упражнение поможет нам приблизиться к этому вопросу. Предположим, что $x \in M$ — это гиперболическая точка и

$$\lambda_x = \min_i |\lambda_x^{(i)}| > 0.$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.5. Показать, что для любого малого $\varepsilon > 0$ существует такая константа $C(x, \varepsilon) > 0$, что для всех $n \geq 1$

$$\|D_x F^{-n}(v)\| \leq C(x, \varepsilon) e^{-n(\lambda_x - \varepsilon)} \|v\| \quad \forall v \in E_x^u \quad (3.4)$$

и

$$\|D_x F^n(v)\| \leq C(x, \varepsilon) e^{-n(\lambda_x - \varepsilon)} \|v\| \quad \forall v \in E_x^s. \quad (3.5)$$

Указание: сначала показать, что для любого заданного ненулевого вектора $v \in E_x^u$ (соответственно $v \in E_x^s$) существует константа $C(x, \varepsilon)$, удовлетворяющая (3.4)–(3.5), которая может зависеть от v . Затем выберем ортонормированный базис $e_1, \dots, e_k$ из E_x^u (соответственно E_x^s), гарантирующий, что (3.4)–(3.5) выполняются с той же самой постоянной $C(x, \varepsilon)$ для всех базисных векторов $e_1, \dots, e_k$, и затем использовать неравенство треугольника, чтобы вывести (3.4)–(3.5) для произвольных векторов v .

Если F — это гиперболическое отображение, то $\lambda_x > 0$ и $C(x, \varepsilon) > 0$ — измеримые функции на M . Будем говорить, что гиперболичность *равномерная*, если эти функции можно сделать постоянными. Или, что равносильно, говорят, что гиперболическое отображение F *равномерно гиперболическое*, если существуют такие $\lambda > 0$ и $C > 0$, что для любого $x \in M$ и всех $n \geq 1$

$$\|D_x F^{-n}(v)\| \leq C e^{-n\lambda} \|v\| \quad \forall v \in E_x^u \quad (3.6)$$

и

$$\|D_x F^n(v)\| \leq C e^{-n\lambda} \|v\| \quad \forall v \in E_x^s \quad (3.7)$$

(всегда, когда существуют E_x^u и E_x^s). С равномерно гиперболическими билиардами мы встретимся в главе 4, а с неравномерно гиперболическими билиардами — в главе 8.

3.2. Показатели Ляпунова для отображения

В этом параграфе рассмотрим применение общей теории показателей Ляпунова к билиардному отображению $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, сохраняющему меру μ .

Теорема 3.6. *Теорема Оселедеца применима к билиардному отображению $\mathcal{F}$, так что показатели Ляпунова существуют в почти любой точке $x \in \mathcal{M}$ (относительно меры μ).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо показать интегрируемость функций $\log^+ \|D_x \mathcal{F}\|$ и $\log^+ \|D_x \mathcal{F}^{-1}\|$ на $\mathcal{M}$. Благодаря свойству инволюции достаточно показать это только для $D_x \mathcal{F}$. Из (2.26) следует, что

$$\|D_x \mathcal{F}\| \leq \frac{C}{\cos \varphi_1},$$

где $C > 0$ — постоянная (заметим, что кривизна $\mathcal{K}$ стенки Γ ограничена). Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \log^+ \|D_x \mathcal{F}\| d\mu &\leq \int_{\mathcal{M}} |\log C + \log \cos \varphi_1| d\mu \leq \\ &\leq |\log C| + (2|\Gamma|)^{-1} \int_{\mathcal{M}} |\log \cos \varphi_1| \cos \varphi d\varphi dr = \\ &= |\log C| + (2|\Gamma|)^{-1} \int_{\mathcal{M}} |\log \cos \varphi| \cos \varphi d\varphi dr, \end{aligned}$$

где на последнем шаге использовалось свойство инвариантности меры μ . Наконец,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} |\log \cos \varphi| \cos \varphi d\varphi dr &= |\Gamma| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\log \cos \varphi| \cos \varphi d\varphi = \\ &= |\Gamma| (2 - \log 4) < \infty. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Теорема доказана. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Условие ограниченности кривизны Γ существенно в данном доказательстве. Стрельцин (Strelcyn) [St86, § 5.2–5.4] приводит пример билиардного стола, граница которого C^∞ -гладкая всюду, за исключением одной точки, в которой кривизна оказывается бесконечной, для которой $\int_{\mathcal{M}} \log^+ \|D_x \mathcal{F}\| d\mu = \infty$.

Доказательство данной теоремы показывает роль особенностей в билиардной динамике. С одной стороны, их объединение имеет меру нуль и может быть отброшено. С другой стороны, взрывной рост производных в окрестности особенностей оказывает наиболее значительное влияние на билиардную динамику, и далее будет видно, что этот резкий рост определит наш анализ хаотических билиардов.

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Показать, что показатели Ляпунова для билиардного отображения в окрестности (см. § 1.1) равны нулю в любой точке. Указание: будем работать в координатах (ω, ψ) , введенных в § 1.1; пусть вектор $(d\omega, d\psi)$ обозначает касательный вектор, а $(d\omega_n, d\psi_n) = \mathcal{F}^n(d\omega, d\psi)$ — его образ. Дифференцируя два уравнения в следствии 1.4, приходим к соотношению $D\mathcal{F}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Следовательно, образы касательных векторов могут расти не более чем линейно.

Так как $\dim \mathcal{M} = 2$, то в любой точке $x \in \mathcal{M}$ определены или один показатель Ляпунова λ с кратностью два, или два показателя Ляпунова $\lambda_x^{(1)} > \lambda_x^{(2)}$, каждый с кратностью единица.

Лемма 3.9. $\lambda_x^{(1)} + \lambda_x^{(2)} = 0$ (с точностью до множества меры нуль).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Π — параллелограмм в $\mathcal{T}_x \mathcal{M}$ со сторонами a и b , параллельными $E_x^{(1)}$ и $E_x^{(2)}$ соответственно. Его площадь равна $|\Pi| = ab \sin \gamma$, где γ — угол между $E_x^{(1)}$ и $E_x^{(2)}$. Тогда $D_x \mathcal{F}^n(\Pi)$ — подобный параллелограмм в $\mathcal{T}_{\mathcal{F}^n x} \mathcal{M}$, стороны которого обозначим через a_n и b_n , а угол между ними — через γ_n . Следовательно,

$$|\det D_x \mathcal{F}^n| = \frac{\sin \gamma_n}{\sin \gamma} \frac{a_n}{a} \frac{b_n}{b}. \quad (3.9)$$

По определению показателей Ляпунова, имеем

$$n^{-1} \log a_n/a \rightarrow \lambda_x^{(1)}, \quad n^{-1} \log b_n/b \rightarrow \lambda_x^{(2)}$$

при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, используя (2.29), получим

$$|\det D_x \mathcal{F}^n| = \cos \varphi / \cos \varphi_n, \quad (3.10)$$

где φ и φ_n — φ -координаты точек x и $\mathcal{F}^n x$ соответственно. Обратите внимание, что $\frac{1}{n} \log \cos \varphi_n \rightarrow 0$ почти везде (из эргодической теоремы Биркгофа вытекает простое следствие: для любой интегрируемой функции $g: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ почти везде $\frac{1}{n} g(\mathcal{F}^n x) \rightarrow 0$). Логарифмируя (3.9) и (3.10) и поделив на n , перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$ и, используя предложение 3.3, докажем лемму. ■

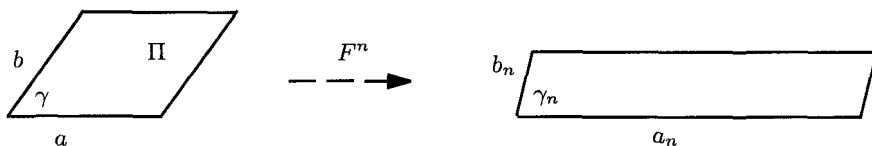


Рис. 3.2. Доказательство леммы 3.9

УПРАЖНЕНИЕ 3.10. Доказать, что если точка $x \in \mathcal{M}$ имеет один показатель Ляпунова λ_x кратности два, то $\lambda_x = 0$ (с точностью до множества меры нуль).

Итак, почти в каждой точке $x \in \mathcal{M}$ множество показателей Ляпунова (которое называется *спектром Ляпунова*) симметрично относительно нуля: или точка нуль — это единственный показатель Ляпунова (кратности два), или два несовпадающих показателя Ляпунова имеют равные абсолютные значения с противоположными знаками. В последнем случае точка x будет гиперболической.

3.3. Показатели Ляпунова для потока

Показатели Ляпунова для потока $\Phi^t: \Omega \rightarrow \Omega$ на многообразии Ω определяются по аналогии с (3.1)–(3.2): если существует Φ^t -инвариантное множество $H \subset \Omega$ и для каждой точки $X \in H$ существует такая $D\Phi^t$ -инвариантная декомпозиция касательного пространства

$$T_X \Omega = E_X^{(0)} \oplus \dots \oplus E_X^{(m)}$$

с некоторым $m = m(X)$, что для всех ненулевых векторов $v \in E_X^{(i)}$

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \log \|D_X \Phi^T v\| = \lambda_X^{(i)}, \quad (3.11)$$

то $\lambda_X^{(0)}, \dots, \lambda_X^{(m)}$ называются показателями Ляпунова потока в точке $X \in \Omega$, а $m_i = \dim E_X^{(i)}$ — их кратностями. Значения $\lambda_X^{(i)}$ и их кратности инвариантны относительно потока. Если поток эргодический, они постоянны почти везде.

Выведем формулы для показателей Ляпунова билиардного потока Φ^t . Продолжим использовать координаты, введенные в § 2.6. Рассмотрим точку $X = (x, y, \omega) \in \Omega$ и касательный вектор $dX = (dx, dy, d\omega) \in T_X \Omega$. Обозначим через $X_t = (x_t, y_t, \omega_t) = \Phi^t(X)$ и $dX_t = (dx_t, dy_t, d\omega_t) = D_X \Phi^t(dX)$ соответствующие им образы в момент времени $t \in \mathbb{R}$ (везде, где поток Φ^t определен и гладкий в X).

Предположим сначала, что для некоторого $c \neq 0$

$$dx = c \cos \omega, \quad dy = c \sin \omega, \quad d\omega = 0; \quad (3.12)$$

то есть касательный вектор dX параллелен направлению потока. Если это происходит перед столкновением, то из (2.12) следует, что

$$dr = d\psi = 0 \quad \text{и} \quad ds^- = -c. \quad (3.13)$$

Напомним, что $ds^+ = -ds^-$; следовательно, $ds^+ = c$. Из (2.11) следует, что

$$dx^+ = c \cos \omega, \quad dy^+ = c \sin \omega, \quad d\omega^+ = 0;$$

таким образом, вектор $D\Phi^t(dX)$ также будет параллелен направлению потока после столкновения, а его длина не меняется. По очевидному индуктивному доказательству

$$dx_t = c \cos \omega_t, \quad dy_t = c \sin \omega_t, \quad d\omega_t = 0$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Другими словами, если придадим точке $X = (q, v)$ возмущение такое, что q смещается вдоль вектора v , а v остается неизменным, то новая точка $X' = (q + cv, v)$ будет удовлетворять условию $\Phi^t(X') = \Phi^{t+c}(X)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.11. Проверить, что одномерное подпространство $T_X^0 \Omega \subset T_X \Omega$

$$T_X^0 \Omega = \{dX : \sin \omega dx = \cos \omega dy \text{ \& } d\omega = 0\}$$

является $D\Phi^t$ -инвариантным и показатель Ляпунова, соответствующий его векторам, равен нулю. (В действительности эти векторы не растягиваются и не сжимаются под действием потока; их образы имеют постоянную длину. Также заметим, что это свойство является общим для всех потоков, где частица движется с постоянной скоростью.)

Другим важным следствием (2.11) является равенство

$$\cos \omega^+ dx^+ + \sin \omega^+ dy^+ = \cos \psi dr + ds^+,$$

и, аналогично, из (2.12) следует, что

$$\cos \omega^- dx^- + \sin \omega^- dy^- = \cos \psi dr - ds^-.$$

Так как $ds^- = -ds^+$, то производная потока $D\Phi^t$ сохраняет величину $\cos \omega dx + \sin \omega dy$, которая является проекцией вектора (dx, dy) на вектор скорости $v = (\cos \omega, \sin \omega)$. То есть

$$\cos \omega_t dx_t + \sin \omega_t dy_t \equiv \text{const}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$.

Следствие 3.12. Если вектор (dx, dy) ортогонален v в момент времени $t = 0$, то ортогональность сохранится в любой другой момент.

Рассмотрим двумерное подпространство $T_X^\perp \Omega \subset T_X \Omega$

$$T_X^\perp \Omega = \{dX : \cos \omega dx + \sin \omega dy = 0\}. \quad (3.14)$$

Из предыдущего анализа следует, что ортогональная декомпозиция касательного пространства

$$T_X \Omega = T_X^0 \Omega \oplus T_X^\perp \Omega$$

является $D\Phi^t$ -инвариантной.

УПРАЖНЕНИЕ 3.13. Доказать, что если $\lambda_X^{(i)} \neq 0$ — ненулевой показатель Ляпунова с соответствующим подпространством $E_X^{(i)}$, то $E_X^{(i)} \subset T_X^\perp \Omega$. Указание: если ортогональная проекция вектора $v \in E_X^{(i)}$ на $T_X^0 \Omega$ не была бы нулевой, то ее длина была бы постоянной по времени, таким образом, величина $\|D_X \Phi^t(v)\|$ не смогла бы сойтись к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$.

Дальнейший анализ будет ограничен двумерным касательным пространством $T_X^\perp \Omega$. Для любой фазовой точки $X = (q, v) \in \Omega$ пусть

$$t^+(X) = \min\{t > 0 : \Phi^t(X) \in \mathcal{M}\} \quad (3.15)$$

и

$$t^-(X) = \max\{t < 0 : \Phi^t(X) \in \mathcal{M}\} \quad (3.16)$$

обозначают время первого положительного и отрицательного моментов столкновений соответственно. Тогда получим две проекции Ω на $\mathcal{M}$:

$$\mathbf{P}^\pm(X) = \Phi^{t^\pm(X)} X. \quad (3.17)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.14. Проверить, что для $x \in \mathcal{M}$

$$t^+(x) = \tau(x), \quad t^-(x) = \tau(\mathcal{F}^{-1}x), \quad \mathcal{F}^{\pm 1}(x) = \mathbf{P}^\pm(x).$$

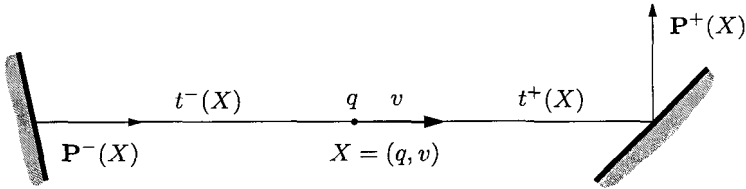


Рис. 3.3. Две проекции $\mathbf{P}^\pm : \Omega \rightarrow \mathcal{M}$

Производная $DP^+(X)$ отображает трехмерное касательное пространство $T_X\Omega$ на двумерное пространство $T_z\mathcal{M}$, где $z = P^+(X)$. Благодаря (3.13) ядром $DP^+(X)$ будет $T_X^0\Omega$; следовательно, линейное отображение

$$DP^+(X): T_X^\perp\Omega \rightarrow T_z\mathcal{M} \quad (3.18)$$

будет взаимно-однозначным.

Это позволяет вычислить показатели Ляпунова для потока через показатели отображения. Пусть $X \in \Omega$ и $z = P^+(X)$. Предположим, что λ — это показатель Ляпунова отображения $\mathcal{F}$ в точке z , соответствующей касательному вектору $dz = (dr, d\varphi) \in T_z\mathcal{M}$. Обозначим через $dX = (dx, dy, d\omega) \in T_X^\perp\Omega$ единственный прообраз $dz = (dr, d\varphi)$ для проекции (3.18).

Сначала необходимо сравнить длины $\|dX\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (d\omega)^2}$ и $\|dz\| = \sqrt{(dr)^2 + (d\varphi)^2}$. Так как dX по построению принадлежит пространству (3.14), имеем $\|dX\| = \sqrt{(d\xi)^2 + (d\omega)^2}$, где

$$d\xi = -\sin\omega dx + \cos\omega dy.$$

Из (2.12) следует, что

$$d\xi = \cos\varphi dr - s d\omega, \quad d\omega = -\mathcal{K} dr + d\varphi, \quad (3.19)$$

где $s = t^+(X)$; таким образом,

$$dr = \frac{d\xi + s d\omega}{\cos\varphi}, \quad d\varphi = \frac{\mathcal{K} d\xi + (s\mathcal{K} + \cos\varphi) d\omega}{\cos\varphi}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.15. Обозначим $\hat{t}_X = \max\{t^+(X), 1\}$. Показать, что

$$\|dz\| \leq \text{const} \frac{\hat{t}_X \|dX\|}{|\cos\varphi|}$$

и

$$\|dX\| \leq \text{const} \hat{t}_X \|dz\|,$$

где постоянные множители определяются областью $\mathcal{D}$. Как следствие, получим

$$\log \|dz\| = \log \|dX\| + \mathcal{O}(\log \cos\varphi) + \mathcal{O}(\log \hat{t}_X). \quad (3.20)$$

Теперь рассмотрим траекторию $\Phi^t(X)$ на временном интервале $(0, T)$ и обозначим через $n = n_X(0, T)$ число происходящих с ней столкновений.

Согласно (3.20),

$$\begin{aligned} \log \|D_X \Phi^T(dX)\| &= \log \|D_z \mathcal{F}^n(dz)\| + \\ &+ \mathcal{O}(\log \cos \varphi_n) + \mathcal{O}(\log \widehat{t}_{\Phi^T X}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где φ_n — это φ -координата точки $\mathcal{F}^n z$. Поделим (3.21) на T и возьмем предел $T \rightarrow \pm\infty$. Согласно результату упражнения 2.38,

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \log \|D_z \mathcal{F}^n(dz)\| = \bar{\tau}_X^{-1} \lambda.$$

Так как функция $|\log \cos \varphi|$ интегрируема на $\mathcal{M}$ (см. (3.8)), получим $\frac{1}{T} \log \cos \varphi_n \rightarrow 0$ (см. объяснение в доказательстве леммы 3.9). По той же самой причине $\frac{1}{T} \log \widehat{t}_{\Phi^T X} \rightarrow 0$, так как функция $\log \widehat{t}_X$ также интегрируема, поскольку даже $\widehat{t}_X$ интегрируема благодаря (2.32). Таким образом, получим

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \log \|D_X \Phi^T(dX)\| = \bar{\tau}_X^{-1} \lambda \quad (3.22)$$

(с точностью до множества меры нуль). Это дает нам показатель Ляпунова для потока из (3.11).

Подводя итоги, сформулируем теорему.

Теорема 3.16. *Поток Φ^t имеет нулевой показатель Ляпунова в подпространстве $\mathcal{T}_X^0 \Omega$, и два других показателя Ляпунова пропорциональны показателям отображения $\mathcal{F}$:*

$$\lambda_X^{(0)} = 0, \quad \lambda_X^{(i)} = \bar{\tau}_X^{-1} \lambda_z^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

где $z = \mathbf{P}^+(X)$ и $\bar{\tau}_X$ было введено в упражнении 2.38. Если $\lambda_X^{(i)} \neq 0$ для $i = 1, 2$, то соответствующие подпространства $E_X^{(i)}$ удовлетворяют условиям

$$E_X^{(i)} \subset \mathcal{T}_X^\perp \Omega \quad \text{и} \quad D\mathbf{P}^+(E_X^{(i)}) = E_z^{(i)}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.17. Проверить, что $\lambda_X^{(0)} + \lambda_X^{(1)} + \lambda_X^{(2)} = 0$ с точностью до множества меры нуль. Указание: используйте лемму 3.9.

Определение 3.18. Говорят, что точка $X \in \Omega$ называется *гиперболической*, если ее показатели Ляпунова существуют и $\lambda_X^{(i)} \neq 0$ при $i = 1, 2$.

Согласно теореме 3.16, точка $X \in \Omega$ является гиперболической тогда и только тогда, когда ее проекция $P^+(X) \in M$ является гиперболической; следовательно, гиперболичность билиардного потока Φ^t эквивалентна гиперболичности отображения столкновений $\mathcal{F}$.

3.4. Гиперболичность как источник хаоса

Билиардная динамика является *детерминированной*. Это означает, что для заданного положения $q_0 \in \mathcal{D}$ и скорости $v_0 \in S^1$ билиардной частицы в момент времени $t = 0$ можно определить ее положение q_t и скорость v_t в любой момент времени $t \in \mathbb{R}$, используя уравнения (2.7) и (2.8). Другими словами, текущее состояние системы полностью определяет ее будущее и прошлое.

Взглянем на детерминизм с практической точки зрения: позволит ли он *определить аналитически* или *вычислить численно* будущее и прошлое, зная состояние в настоящем времени? Для очень простых областей, таких как окружности или квадраты (глава 1), полное аналитическое решение возможно. Но для более общих областей мы сталкиваемся с серьезными препятствиями. Аналитическое выражение q_t и v_t можно относительно легко получить для малых t до тех пор, пока частица совершает очень немногo столкновений со стенками. Для больших t соответствующие выражения для q_t и v_t становятся все более и более сложными, и в конечном счете их вычисление превращается в непосильную задачу.

Пользуясь рекурсивным характером уравнений (2.7) и (2.8), несложно провести численные компьютерные вычисления, но полученные результаты будут содержать ошибки округления, которые необходимо оценить. Для малых промежутков времени ошибки обычно имеют порядок текущей машинной точности (скажем, $\sim 10^{-15}$ для арифметики двойной точности на современных компьютерах), но для больших промежутков времени ошибки могут существенно расти, как это описано ранее.

Пусть $X_s \in \Omega$ обозначает истинное состояние движущейся частицы в момент $s > 0$, а $\tilde{X}_s = X_s + \delta X_s$ — ее вычисленное состояние. Для малых s можно предположить, что $\|\delta X_s\| \sim 10^{-15}$. В момент времени $s + t$ можно ожидать, что

$$\delta X_{s+t} \approx D_{X_s} \Phi^t(\delta X_s) + \delta X'_t, \quad (3.23)$$

где $\delta X'_t$ — дополнительная ошибка округления, возникающая во время вычислений $\Phi^u(X_0)$, $s < u < s + t$. Для простоты можно предположить, что $\|\delta X'_t\| \sim 10^{-15}$, но первое слагаемое в (3.23) может быстро возрастать в зависимости от производной $D_{X_s} \Phi^t$.

Если начальная точка $X_0 \in \Omega$ имеет только нулевые показатели Ляпунова, касательные векторы если и будут расти, то медленно, и первый член в (3.23) может оставаться малым для больших t . Но предположим, что X_0 имеет положительный показатель Ляпунова $\lambda > 0$; тогда

$$\|D_{X_s} \Phi^t(\delta X_s)\| \sim e^{\lambda t} \|\delta X_s\|.$$

Показательная функция $e^{\lambda t}$ может быстро увеличиваться с ростом t . Например, если $\lambda = 1$, то в момент времени $t = \ln 10^{15} \approx 35$ ошибки достигают порядка единицы! Тогда ошибки быстро превысят размер фазового пространства и сделают дальнейшие вычисления бессмысленными.

Следовательно, если начальное состояние $X_0 \in \Omega$ имеет положительный показатель Ляпунова, его далекое будущее практически невозможно предсказать даже приближенно! Аналогично, существование отрицательного показателя Ляпунова в X_0 делает невозможным приближенный анализ его далекого прошлого. Если множество гиперболических точек имеет полную (или хотя бы положительную) меру, невозможность предсказать их долгосрочное поведение — типичная (или наиболее вероятная) ситуация.

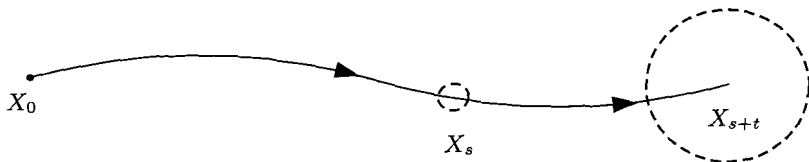


Рис. 3.4. Возрастающая недоверность аппроксимаций

Описанные факты имеют далеко идущие последствия, которые можно охарактеризовать обобщенным термином — *хаос*. Наиболее важная черта хаотической системы состоит в том, что далекое будущее и прошлое становятся, по существу, *независимыми* от текущего состояния и могут быть описаны только «в среднем», в терминах теории вероятности. В больших масштабах времени развитие системы напоминает чисто случайный процесс; с практической точки зрения система ведет себя стохастически и должна быть изучена с помощью теории вероятности, включая использование вероятностных мер и осреднения.

Этот подход хорошо известен физикам, работающим с газами и жидкостями; в этом случае молекулярная динамика, хотя теоретически и является детерминированной, на практике оказывается хаотической. Многие

базовые законы статистической механики были выведены, если предположить, что положения и скорости движущейся частицы (молекул и атомов) выбираются случайным образом, согласно некоторому вероятностному распределению, а затем результаты осредняются. Тот же подход успешно используется при изучении хаотических билиардов, и он будет преобладать в последующих главах книги.

3.5. Гиперболичность и численные эксперименты

Наш анализ в предыдущем параграфе может навести на мысль (ошибочную), что численные вычисления для систем с гиперболическими точками в фазовом пространстве бессмысленны. Это не так; в действительности многие всесторонние компьютерные эксперименты были выполнены на различных хаотических моделях, и они точно описывают их долгосрочное поведение. Причина в том, что в численных экспериментах обычно хотят получить *типичную* траекторию (с начальной точкой X_0 , выбранной случайным образом), а не траекторию произвольной *отдельной* заданной точки X_0 . И здесь в игру вступает следующая *лемма об отслеживании* (shadowing lemma). Сформулируем ее в контексте отображений, а не потоков.

Определение 3.19. Пусть $F: M \rightarrow M$ — обратимое отображение на метрическом пространстве. Для малых $\delta > 0$ конечная или бесконечная последовательность точек $\{x_n\}$, $n_1 < n < n_2$ ($n_1 = -\infty$ или $n_2 = \infty$, или возможны оба значения) называется δ -псевдотраекторией, если

$$\text{dist}(F(x_n), x_{n+1}) < \delta$$

для всех $n_1 < n < n_2 - 1$.

Если $\delta = 0$, то $x_{n+1} = F(x_n)$, так что $\{x_n\}$ — истинная траектория точки x_0 . Для малых $\delta > 0$ получим «почти правильную» точку $x_{n+1} \approx F(x_n)$ на каждой итерации F . Именно такая ситуация и наблюдается в численном эксперименте, где присутствуют ошибки округления. Следующий факт известен при исследовании гиперболических отображений.

Факт (лемма об отслеживании): для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой δ -псевдотраектории $\{x_n\}$, $n_1 < n < n_2$, существует $y_0 \in M$ такое, что

$$\text{dist}(x_n, F^n(y_0)) < \varepsilon$$

для всех $n_1 < n < n_2$. Говорят, что траектория y_0 ε -*затеняет* псевдотраекторию $\{x_n\}$.

Заметим, что здесь нет ограничений на n_1 и n_2 ; затенение имеет место на произвольно длинных, а также бесконечных, временных интервалах. Лемма об отслеживании в указанной форме доказана в [Bow75, КН95] для диффеоморфизмов Аносова и Аксиомы А. Она также выполняется для псевдотраекторий хаотических бильярдов при некоторых дополнительных условиях (которые лежат за рамками этой книги). Любопытно, что лемма об отслеживании справедлива для гиперболических систем, но не выполняется для многих более простых систем с нулевыми показателями Ляпунова (в качестве легкого упражнения проверьте, что лемма не выполняется для тождественного отображения на любом многообразии!).

Итак, лемма об отслеживании утверждает, что вычисленная δ -псевдотраектория $\{x_n\}$ точки x_0 остается ε -близкой к истинной траектории другой фазовой точки y_0 (в действительности точка y_0 сама ε -близка к x_0). В экспериментах, где начальная точка x_0 выбирается случайным образом, можно оспорить, что новая точка y_0 будет так же «хороша», как случайным образом выбранная x_0 ; следовательно, общие результаты эксперимента должны быть в полной мере обоснованы. И широкий успех компьютерных экспериментов хорошо поддерживает эту логику. Тот факт, что истинная траектория x_0 может быть очень удалена от вычисленной псевдотраектории $\{x_n\}$, не важен здесь. Главное, что последовательность $\{x_n\}$ приближенно является истинной траекторией системы.

Вернемся к детерминизму: задача заключалась в том, чтобы предсказать будущее *заданной* фазовой точки x_0 (представляющей истинное текущее состояние системы). Лемма об отслеживании в этом вопросе помочь не сможет, так как она предсказывает траекторию *некоторой* близлежащей точки $y_0 \neq x_0$ (в то же самое время известно, что истинная траектория x_0 может быть практически в любом месте фазового пространства).

3.6. Координаты Якоби

В этом параграфе вернемся к обсуждению бильярдного потока $\Phi^t: \Omega \rightarrow \Omega$.

Анализ в § 3.3 предполагает более удобную систему координат $(d\eta, d\xi, d\omega)$ в трехмерном касательном пространстве $T_X\Omega$, где

$$d\eta = \cos \omega \, dx + \sin \omega \, dy, \quad d\xi = -\sin \omega \, dx + \cos \omega \, dy. \quad (3.24)$$

Введенные координаты будем называть *координатами Якоби* (они порождаются так называемыми трансверсальными полями Якоби [Wo94], но эти поля не используются в этой книге). Заметим, что $d\eta$ — это компонента вектора (dx, dy) в направлении вектора скорости v , а $d\xi$ — ортогональная ей компонента.

Для любого касательного вектора $dX = (d\eta, d\xi, d\omega)$ обозначим через $dX_t = (d\eta_t, d\xi_t, d\omega_t) = D_X \Phi^t(dX)$ его образ в момент $t \in \mathbb{R}$. Согласно результатам параграфа 3.3, линейное отображение $(d\eta, d\xi, d\omega) \mapsto (d\eta_t, d\xi_t, d\omega_t)$ определяется матрицей размера 3×3

$$D_X \Phi^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix}.$$

Нижний правый блок 2×2 (который необходимо определить; см. ниже) соответствует преобразованию $(d\xi, d\omega) \mapsto (d\xi_t, d\omega_t)$. Начиная с этого момента сузим отображение $D_X \Phi^t$ на подпространство $T_X^\perp \Omega$ с координатами Якоби $d\xi$ и $d\omega$. Обозначим сужение через $D_X^\perp \Phi^t: T_X^\perp \Omega \rightarrow T_{\Phi^t X}^\perp \Omega$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.20. Показать, что если не происходит столкновений между X и $\Phi^t X$, то

$$d\xi_t = d\xi + t d\omega, \quad d\omega_t = d\omega; \quad (3.25)$$

следовательно, отображение $D_X \Phi^t$ на $T_X^\perp \Omega$ определяется верхней треугольной матрицей 2×2

$$U_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Далее рассмотрим действие $D_X \Phi^t$ при столкновении, используя обозначение § 2.6. Из уравнений (2.11)–(2.12) следует, что

$$\begin{aligned} d\xi^- &= +\cos \varphi dr - s^- d\omega^-, & d\omega^- &= -\mathcal{K} dr + d\varphi, \\ d\xi^+ &= -\cos \varphi dr + s^+ d\omega^+, & d\omega^+ &= -\mathcal{K} dr - d\varphi \end{aligned}$$

(напомним, что $\psi + \varphi = \pi/2$; следовательно, $d\psi = -d\varphi$). Чтобы выразить действие потока «в момент столкновения», полагаем $s^- = s^+ = 0$. Исключая dr и $d\varphi$ из уравнений выше, получим

$$\begin{aligned} d\xi^+ &= -d\xi^-, \\ d\omega^+ &= -\mathcal{R} d\xi^- - d\omega^-, \quad \mathcal{R} = \frac{2\mathcal{K}}{\cos \varphi}; \end{aligned} \quad (3.27)$$

следовательно, действие потока при столкновении определяется нижней треугольной матрицей

$$L_{\mathcal{R}} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{R} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

(будем называть $\mathcal{R}$ *параметром столкновения*). Поэтому отображение $D_X^\perp \Phi^t$ (напомним, что это сужение $D_X \Phi^t$ на $\mathcal{T}_X^\perp \Omega$) в общем случае определяется произведением чередующихся верхней и нижней треугольных матриц:

$$D_X^\perp \Phi^t = (-1)^n U_{t-t_n} L_{\mathcal{R}_n} U_{t_n-t_{n-1}} \cdots U_{t_2-t_1} L_{\mathcal{R}_1} U_{t_1}, \quad (3.29)$$

где t_i — это время i -го столкновения на временном интервале $(0, t)$ и $\mathcal{R}_i = 2\mathcal{K}_i / \cos \varphi_i$ — это параметр i -го столкновения. Чередование множителей U и L соответствует естественному чередованию интервалов свободного пробега и столкновений в бильярдной динамике.

УПРАЖНЕНИЕ 3.21. Пусть $\mathcal{D}$ — многоугольник. Показать, что в этом частном случае $D_X^\perp \Phi^t = \pm \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и всех точек $X \in \Omega$, где Φ^t определено. Затем доказать, что показатели Ляпунова для потока и отображения равны нулю всюду.

3.7. Касательные и фронты волны

Для гиперболических точек $X \in \Omega$ подпространства $E_X^{(i)} \subset \mathcal{T}_X \Omega$, $i = 1, 2$, соответствующие ненулевым показателям Ляпунова, — одномерные и принадлежат $\mathcal{T}_X^\perp \Omega$; сравни с § 3.3. В этом параграфе опишем действие производной $D\Phi^t$ на касательные $L \subset \mathcal{T}_X^\perp \Omega$. Любая такая прямая полностью определяется тангенсом угла наклона

$$\mathcal{B} = d\omega/d\xi \quad (3.30)$$

в координатах Якоби $d\xi, d\omega$ на плоскости $\mathcal{T}_X^\perp \Omega$. Если $d\xi = 0$, то полагаем $\mathcal{B} = \infty$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.22. Знак $\mathcal{B}$ имеет следующий геометрический смысл. Напомним, что вектор $(0, d\xi)$ соответствует перемещению $dq = (dx, dy)$

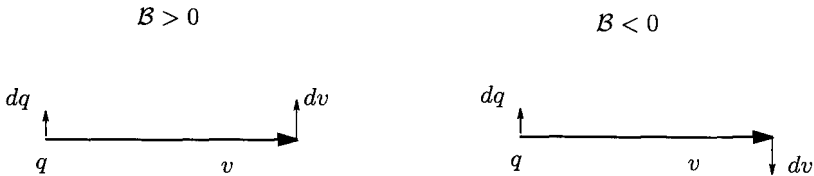


Рис. 3.5. Геометрический смысл знака $\mathcal{B}$

точки $q = (x, v)$ в направлении, ортогональном v (см. (3.24)), и величина $d\xi$ соответствует перемещению dv вектора v . Показать, что $\mathcal{B} > 0$ тогда и только тогда, когда dq и dv имеют одно и то же направление; см. рис. 3.5.

В дифференциальной геометрии, как правило, линии L в касательном пространстве к многообразию Ω в точке $X \in \Omega$ ставят в соответствие гладкие (C^1) кривые на Ω , проходящие через X , являющиеся касательными к линии L в X . Это будет также полезно в нашем случае.

Пусть $\gamma' \subset \Omega$ — кривая, проходящая через точку $X = (q, v)$ и касательную к линии $L \subset T_X^\perp \Omega$. Предположим сначала, что $\mathcal{B} \neq \infty$. Тогда проекция $\sigma' = \pi_q(\gamma')$ кривой γ' на стол $\mathcal{D}$ является кривой, которая ортогональна к v в точке q . Каждая точка $X' = (q', v') \in \gamma'$ двигается вдоль билиардной траектории $(q' + sv', v')$, которая описывает отрезок прямой $q' + sv'$ на билиардном столе (здесь s должно быть мало, так что $q' + sv'$ остается внутри $\mathcal{D}$). Получим C^1 -гладкое семейство направленных линий $\{q' + sv' : (q', v') \in \gamma'\}$ в области $\mathcal{D}$. Это семейство двумерное, так как $v' = v'(q')$ — это функция $q' \in \sigma'$.

Обозначим через σ ортогональное сечение этого семейства, проходящее через q (это C^1 -гладкая кривая, которая ортогонально пересекает каждую линию в нашем семействе; см. рис. 3.6). Если каждой точке $q'' \in \sigma$ приписать единичный нормальный вектор v'' к σ , направленный по ходу движения, получим кривую $\gamma \subset \Omega$.

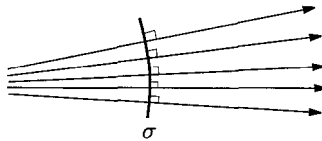


Рис. 3.6. Ортогональное сечение семейства направленных линий

УПРАЖНЕНИЕ 3.23. Проверить, что кривая γ содержит точку $X = (q, v)$ и является касательной к γ' , а следовательно к L , в точке X .

Определение 3.24. Гладкая кривая $\sigma \subset \mathcal{D}$, снабженная непрерывным семейством единичных нормальных векторов, называется *фронтом волны*.

Так как каждая точка $q \in \sigma$ имеет вектор скорости v_q , привязанный к ней, получим фазовое состояние $(q, v_q) \in \Omega$; таким образом, фронт волны становится кривой в фазовом пространстве

$$\gamma = \{(q, v_q) \in \Omega : q \in \sigma\}.$$

Заметим, что касательная $T_Y \gamma$ к γ лежит в $T_Y^\perp \Omega$ в каждой точке $Y \in \gamma$, что делает фронты волны удобным инструментом при изучении билиардного потока Φ^t .

УПРАЖНЕНИЕ 3.25. Показать, что если $\gamma \subset \Omega$ — это фронт волны, то для достаточно малого t кривая $\Phi^t(\gamma)$ — это тоже фронт волны. Указание: напомним, что $D_X \Phi^t(T_X^\perp \Omega) = T_{\Phi^t X}^\perp \Omega$.

Например, если $\sigma \subset \mathcal{D}$ — окружность, снабженная внешними единичными нормальными векторами, то образ Φ^t этого фронта волны будет концентрической окружностью, радиус которой растет с ростом t (это показывает, что фронты волны движутся как рябь на поверхности воды); см. рис. 3.7.

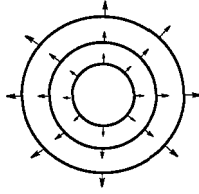


Рис. 3.7. Движущийся фронт волны

В образе Φ^t фронта волны γ для больших t могут встречаться особенности. Во-первых, гладкость $\Phi^t(\gamma)$ может быть нарушена в точках отражения от $\partial \mathcal{D}$, но она тут же будет восстановлена после отражения; см. ниже. Во-вторых, фронт может схлопнуться (*сфокусироваться*), когда траектории его точек пересекаются друг с другом внутри стола $\mathcal{D}$. Например, если $\sigma \subset \mathcal{D}$ — это окружность радиуса $r > 0$, снабженная *внутренним* единичным нормальным вектором, то в момент времени $t = r$ весь фронт сойдется к центру этой окружности (будем говорить, что он сфокусировался). Но он сразу же восстанавливается (*расфокусируется*) после схлопывания и затем распространяется, как показано на рис. 3.7.

Исключим из нашего анализа вырожденный случай $\mathcal{B} = \infty$. В этом случае не существует гладких фронтов волны, касательных к L в X , но L может быть представлена «схлопывающимся» фронтом следующим образом.

УПРАЖНЕНИЕ 3.26. Пусть $L \subset T_X^\perp \Omega$ — касательная с $\mathcal{B} = \infty$. Пусть $\gamma \subset \Omega$ — гладкая кривая такая, что $X = (q, v) \in \gamma$ и $\pi_q(\gamma) = \{q\}$; то есть кривая γ полностью фокусируется в q . Показать, что γ является касательной к L .

Пусть $X \in \Omega$ и $L \subset \mathcal{T}_X^\perp \Omega$ — касательная с конечным углом наклона $\mathcal{B} \neq \infty$. Предположим, $\gamma \subset \Omega$ — это фронт волны, касательный к L в точке $X = (q, v)$ и $\sigma = \pi_q(\gamma)$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.27. Проверьте, что $\mathcal{B}$ — это кривизна σ в точке q относительно нормального вектора v . (В действительности $\mathcal{B}$ традиционно вводится в литературе как кривизна фронтов волны. Здесь величина $\mathcal{B}$ вводится с помощью соотношения (3.30), так как это лучше соответствует нашему общему ходу мыслей.)

Согласно упражнению 3.22 и рис. 3.5, знак $\mathcal{B}$ позволяет нам выделить следующие типы фронтов волны:

- (а) если $\mathcal{B} > 0$, то фронт — *расходящийся* (*рассеивающийся*);
- (б) если $\mathcal{B} < 0$, то фронт — *сходящийся* (*фокусирующийся*);
- (с) если $\mathcal{B} = 0$, то фронт — *плоский* (его векторы скорости параллельны).

Случай $\mathcal{B} = \infty$ соответствовал бы вырожденному (схлопывающему или сфокусированному) фронту волны; в этом случае будем называть X *точкой фокусировки* фронта.

3.8. Непрерывные дроби, связанные с бильярдами

Введем специальный инструмент для изучения бильярдов, который впервые использовал Я. Синай [Sin70, BS73], — непрерывные дроби.

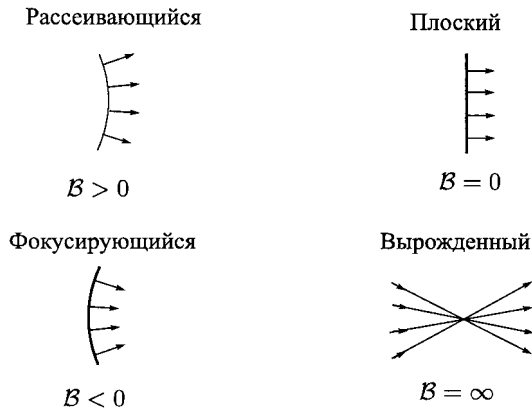


Рис. 3.8. Типы фронтов волны

Пусть $L \subset \mathcal{T}_X^\perp \Omega$ — касательная с углом наклона $\mathcal{B}$. Пусть $L_t = D_X \Phi^t(L) \subset \mathcal{T}_{\Phi^t X}^\perp \Omega$ — ее образ в момент t , а $\mathcal{B}_t$ — ее угол наклона.

УПРАЖНЕНИЕ 3.28. Показать, что если между X и $\Phi^t X$ нет столкновений, то

$$\mathcal{B}_t = \frac{\mathcal{B}}{1 + t\mathcal{B}} = \frac{1}{t + \frac{1}{\mathcal{B}}}. \quad (3.31)$$

Указание: использовать (3.26).

Заметим, что $\mathcal{B}_t = \infty$ в момент $t = t^* = -1/\mathcal{B}$ согласно (3.31). Таким образом, любой фронт волны, касательный к линии L в точке X , схлопывается (фокусируется) в момент времени t^* (если $t^* < 0$, то фронт уже схлопнулся в момент t^*), за исключением случая, когда фронт перед этим ударяется об $\partial\mathcal{D}$. Если фронт волны схлопывается в момент t^* , точку $\Phi^{t^*} X$ будем называть *точкой фокусировки* в развитии фронта волны. Очевидно, соотношение (3.31) также остается справедливым после фокусирующего момента времени t^* , так как фронт волны будет расфокусировываться и далее двигаться гладко.

УПРАЖНЕНИЕ 3.29. Показать, что если между X и $\Phi^t X$ не происходит столкновений и нет точек фокусировки, то (в обозначениях упражнения 3.28)

$$\int_0^t \mathcal{B}_t dt = \log(1 + t\mathcal{B}). \quad (3.32)$$

Также проверить, что если *существует* точка фокусировки, то есть $\mathcal{B}_s = \infty$ для некоторого $0 \leq s \leq t$, то интеграл выше расходится.

Лемма 3.30. Пусть t — время столкновений, то есть $\Phi^t X \in \mathcal{M}$. Тогда углы наклона до и после столкновений $\mathcal{B}^- = \mathcal{B}_{t-0}$ и $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B}_{t+0}$ связаны между собой:

$$\mathcal{B}^+ = \mathcal{R} + \mathcal{B}^-, \quad \mathcal{R} = \frac{2\mathcal{K}}{\cos \varphi} \quad (3.33)$$

($\mathcal{R}$ — параметр столкновений).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство легко следует из (3.27). Оставим его в качестве упражнения читателю. ■

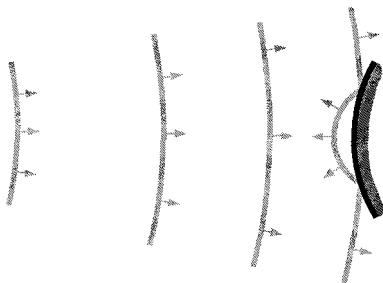


Рис. 3.9. Фронт волны, ударяющийся о стенку

Формула (3.33) известна в геометрической оптике как *уравнение зеркала* (ср. [Wo86, с. 396]). Оно описывает преобразование фронта волны при столкновении с искривленной стенкой; см. рис. 3.9 (заметим, что если стенка плоская, то $\mathcal{R} = 0$ и, таким образом, $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B}^-$).

Комбинируя уравнения (3.31) и (3.33), получим формулу непрерывной дроби для угла наклона $\mathcal{B}_t$

$$\mathcal{B}_t = \frac{1}{t - t_n + \frac{1}{\mathcal{R}_n + \frac{1}{t_n - t_{n-1} + \frac{1}{\mathcal{R}_{n-1} + \frac{1}{t_n - t_{n-1} + \frac{1}{\mathcal{R}_{n-1} + \frac{1}{t_1 + \frac{1}{\mathcal{B}}}}}}}}} \quad (3.34)$$

в обозначениях (3.29).

УПРАЖНЕНИЕ 3.31. Пусть $\mathcal{D}$ — многоугольник. Показать, что если $\mathcal{B} = 0$, то $\mathcal{B}_t = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$; то есть плоские фронты волны остаются плоскими в течение всего времени. Кроме того, показать, что если $\mathcal{B} \neq 0$, то $\mathcal{B}_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$; то есть все фронты волны постепенно разглаживаются. Наконец, проверить, что сходимость здесь имеет порядок $1/|t|$; то есть $|\mathcal{B}_t| = \mathcal{O}(1/|t|)$ для больших $|t|$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.32. Пусть $\mathcal{D}$ — единичный диск; см. § 1.1. Для любого $X \in \Omega$ рассмотрим его первую точку столкновения $\mathbf{P}^+(X) = (r, \varphi) \in \mathcal{M}$

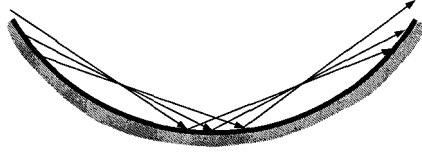


Рис. 3.10. Устойчивый фронт волны в диске фокусируется на половине пути между столкновениями

и обозначим через t_n моменты столкновений вдоль траектории X (заметим, что $\tau = t_n - t_{n-1} = 2 \cos \varphi$ для всех n). Обозначим $B_* = -1/\cos \varphi = -2/\tau$.

- (а) Показать, что если $B_{t_0+0} = B_*$, то $B_{t_n+0} = B_*$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ (то есть, если фронт волны фокусируется посередине между двумя столкновениями, его образ останется фокусирующимся на половине пути между столкновениями; см. рис. 3.10).
- (б) Проверить, что или $B_{t_0+0} \leq -1/\tau$, или иначе $B_{t_1+0} < -3/\tau$. Сделать вывод, что существует по меньшей мере одна точка фокусировки (где $B_s = \infty$) внутри временного интервала $t_0 < s < t_1 + \tau/3$.
- (с) Показать, что если $B_{t_0+0} \neq B_*$, то $B_{t_n+0} \rightarrow B_*$ при $n \rightarrow \pm\infty$; то есть все волновые фронты стремятся к единственному «устойчивому режиму», где они фокусируются на половине пути между столкновениями.
- (d) Проверить, что сходимость в (с) имеет порядок $1/|n|$; то есть $|B_{t_n+0} - B_*| = \mathcal{O}(1/|n|)$ для больших $|n|$.

Указание: Сначала показать, что $B_{t_{n+1}+0} = -4/\tau + 1/(\tau + 1/B_{t_n+0})$. Затем обозначить $z_n = \tau B_{t_n+0}$ и переписать предыдущую формулу в виде $z_{n+1} = -3 - 1/(1 + z_n)$. Таким образом, получим рациональное преобразование $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с единственной неподвижной точкой $z = -2$, что привлекательно для нас.

3.9. Якобиан для касательных

Выражение (3.34) определяет угол наклона линии $L_t = D_X \Phi^t(L)$ через угол наклона начальной линии $L \subset T_X^\perp \Omega$. Однако отображение $D_X \Phi^t: L \rightarrow L_t$ не является изометрией; оно может растягивать или сжимать векторы $dX \in L$. Вычислим его якобиан.

Пусть $(d\xi, d\omega) \in L$ и $(d\xi_t, d\omega_t) = D_X \Phi^t(d\xi, d\omega) \in L_t$. Если не существует столкновений между X и $\Phi^t X$, то

$$d\xi_t = (1 + t\mathcal{B}) d\xi, \quad d\omega_t = d\omega$$

согласно (3.25). Как следствие (3.27), в момент столкновения $|d\xi^+| = |d\xi^-|$. Комбинируя эти уравнения, получим важную формулу

$$\frac{|d\xi_t|}{|d\xi|} = \prod_{i=0}^n |1 + \tau_i \mathcal{B}_i^+|, \quad (3.35)$$

где $\tau_0 = t_1$, $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ для $1 \leq i \leq n-1$ и $\tau_n = t - t_n$, все в обозначениях (3.34), и $\mathcal{B}_0^+ = \mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_i^+ = \mathcal{B}_{t_i+0}$ при $1 \leq i \leq n$.

Если на прямой $L \subset T_X^\perp \Omega$ ввести норму (метрику) с помощью $|d\xi|$, то (3.35) определяет якобиан линейного преобразования $L \rightarrow L_t$. Якобиан в евклидовой метрике $\|dX\| = \sqrt{(d\xi)^2 + (d\omega)^2}$ имеет вид

$$\frac{|dX_t|}{|dX|} = \sqrt{\frac{1 + \mathcal{B}_t^2}{1 + \mathcal{B}^2}} \prod_{i=0}^n |1 + \tau_i \mathcal{B}_i|. \quad (3.36)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.33. Показать, что если i -ое отражение происходит на плоской стенке (где $\mathcal{K} = 0$), то в выражении (3.35)

$$|1 + \tau_{i-1} \mathcal{B}_{i-1}^+| |1 + \tau_i \mathcal{B}_i^+| = |1 + (\tau_{i-1} + \tau_i) \mathcal{B}_{i-1}^+|;$$

то есть i -ым отражением можно эффективно пренебречь при вычислении якобиана.

УПРАЖНЕНИЕ 3.34. Показать, что если $\mathcal{B}_s \neq \infty$ для всех $0 \leq s \leq t$ (то есть не существует точек фокусировки на траектории X), то

$$\log \frac{|d\xi_t|}{|d\xi|} = \int_0^t \mathcal{B}_s ds. \quad (3.37)$$

С другой стороны, если существует по крайней мере одна точка фокусировки, то интеграл расходится. Указание: используйте (3.32).

В заключение заметим, что метрика $|d\xi|$ определена на всех невырожденных линиях (где $\mathcal{B} \neq \infty$). Нет необходимости вычислять якобиан для вырожденных линий, поэтому для упрощения формулы соответствующего якобиана предпочтительней будет метрика $|d\xi|$; см. (3.35) и (3.37).

3.10. Касательные в пространстве столкновений

Опишем действие производной $D_x \mathcal{F}$ отображения столкновений на касательные $L \subset \mathcal{T}_x \mathcal{M}$ в пространстве столкновений. Любая такая касательная полностью определяется своим углом наклона:

$$\mathcal{V} = d\varphi/dr. \quad (3.38)$$

Для вертикальных линий, где $dr = 0$, полагаем $\mathcal{V} = \infty$.

Свяжем прямые $L \subset \mathcal{T}_x \mathcal{M}$ с касательными в $\mathcal{T}_X^\perp \Omega$, рассмотренными в § 3.7, используя проекции $\mathbf{P}^\pm$, введенные в (3.17). Для заданной точки $x = (r, \varphi) \in \mathcal{M}$ рассмотрим два соответствующих фазовых состояния

$$X^+ = \lim_{t \downarrow 0} \Phi^t(x), \quad X^- = \lim_{t \uparrow 0} \Phi^t(x)$$

непосредственно *после* и *до* столкновения в x соответственно. (Хотя в § 2.5 такие пары отождествлялись, здесь будем работать с ними как с разными состояниями). Используя обозначения (3.15)–(3.17), заметим, что $t^+(X^-) = t^-(X^+) = 0$ и $\mathbf{P}^+(X^-) = \mathbf{P}^-(X^+) = x$.

Теперь линейное отображение $D\mathbf{P}^+(X^-): \mathcal{T}_{X^-}^\perp \Omega \rightarrow \mathcal{T}_x \mathcal{M}$ взаимно-однозначное (см. (3.18)). Обозначим через $L^- \subset \mathcal{T}_{X^-}^\perp \Omega$ прообраз прямой L под действием этого отображения. Аналогично, отображение $D\mathbf{P}^-(X^+): \mathcal{T}_{X^+}^\perp \Omega \rightarrow \mathcal{T}_x \mathcal{M}$ — взаимно-однозначное, и через $L^+ \subset \mathcal{T}_{X^+}^\perp \Omega$ обозначим прообраз прямой L под действием этого отображения.

Таким образом, любая касательная $L \subset \mathcal{T}_x \mathcal{M}$ в пространстве столкновений $\mathcal{M}$ соответствует двум специальным касательным в фазовом пространстве Ω : касательной «до столкновения» $L^- \subset \mathcal{T}_{X^-}^\perp \Omega$ и касательной «после столкновения» $L^+ \subset \mathcal{T}_{X^+}^\perp \Omega$ по аналогии с построением выше. Пусть $\mathcal{B}^-$ и $\mathcal{B}^+$ обозначают углы наклона прямых L^- и L^+ соответственно (см. формулу (3.30); связь между величинами определяется формулой (3.33).

УПРАЖНЕНИЕ 3.35. Показать, что

$$\mathcal{V} = \mathcal{B}^- \cos \varphi + \mathcal{K} = \mathcal{B}^+ \cos \varphi - \mathcal{K}, \quad (3.39)$$

где $\mathcal{K}$ обозначает кривизну границы $\partial \mathcal{D}$ в точке x . Указание: первое тождество следует из (3.19), где необходимо заметить, что $s = 0$.

Норма $|d\xi|$ на прямых L^+ и L^- порождает (под действием отображений $\mathbf{P}^-(X^+)$ и $\mathbf{P}^+(X^-)$ соответственно) такую же норму на прямой L , которая, благодаря (3.19), имеет вид

$$\|(dr, d\varphi)\|_p = \cos \varphi |dr|.$$

Эта норма часто называется *p-нормой* (читается как «п-норма») (или *p-метрикой*) на касательных в пространстве столкновений $\mathcal{M}$. p -норма определена на любой прямой L , кроме вертикальной, то есть кроме $\mathcal{V} = \infty$. Благодаря (3.39) условие $\mathcal{V} = \infty$ эквивалентно $\mathcal{B}^- = \mathcal{B}^+ = \infty$ для всех регулярных столкновениях (где $\varphi \neq \pm\pi/2$). Таким образом, p -норма определена на всех невырожденных прямых.

В заключение найдем якобиан отображения $D_x \mathcal{F}^n$ в p -норме. Пусть $L \subset \mathcal{T}_x \mathcal{M}$ и $L_n = D_x \mathcal{F}^n(L)$ обозначает образ L . Пусть $\tau_n = \tau(\mathcal{F}^n(x))$ и $\mathcal{B}_n^+$ — угол наклона прямой после столкновений L_n^+ , соответствующей L_n . Тогда для любого касательного вектора $0 \neq dx \in L$

$$\frac{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|_p}{\|dx\|_p} = \prod_{i=0}^{n-1} |1 + \tau_i \mathcal{B}_i^+| \quad (3.40)$$

(это соотношение следует сразу из (3.35)).

Евклидова норма $\|dx\| = \sqrt{(dr)^2 + (d\varphi)^2}$ связана с p -нормой соотношением

$$\|dx\| = |dr| \sqrt{1 + \mathcal{V}^2} = \frac{\|dx\|_p}{\cos \varphi} \sqrt{1 + (\mathcal{B}^+ \cos \varphi - \mathcal{K})^2}. \quad (3.41)$$

p -метрика более проста в использовании. Далее некоторые соотношения часто будут выводиться в p -метрике, а затем преобразовываться в евклидову метрику с помощью (3.41).

3.11. Устойчивые и неустойчивые прямые

Пусть $X \in \Omega$ — гиперболическая точка, а E_X^u и E_X^s обозначают одномерные подпространства, соответствующие ненулевым показателям Ляпунова; см. § 3.3. Обозначим их углы наклона через $\mathcal{B}^u(X)$ и $\mathcal{B}^s(X)$ соответственно. Также будем считать, что $\mathcal{B}^u(X) = \mathcal{B}^s(X) = 0$ для всех негиперболических точек. Тогда $\mathcal{B}^u$ и $\mathcal{B}^s$ становятся измеримыми функциями на Ω .

При $\alpha = u, s$ полагаем

$$\Omega_\infty^\alpha = \{X \in \Omega: \mathcal{B}^\alpha(\Phi^t(X)) = \infty \text{ для некоторого } t \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, Ω_∞^u и Ω_∞^s являются Φ^t -инвариантными множествами.

УПРАЖНЕНИЕ 3.36. Показать, что если $\mu_\Omega(\Omega_\infty^\alpha) > 0$, то функция $\mathcal{B}^\alpha(X)$ не интегрируема. Указание: используйте упражнение 3.29.

УПРАЖНЕНИЕ 3.37. Пусть функция $\mathcal{B}^u(X)$ интегрируема. Показать, что в почти любой гиперболической точке X положительный показатель Ляпунова равен

$$\lambda_X^+ = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \frac{|d\xi_t|}{|d\xi|}, \quad (3.42)$$

где $0 \neq (d\xi, d\omega) \in E_X^u$. Указание: используйте соотношения (3.35)–(3.36).

Теорема 3.38. Предположим, что функция $\mathcal{B}^u(X)$ интегрируема. Тогда положительный показатель Ляпунова λ_X^+ — это среднее по времени

$$\lambda_X^+ = \lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{B}^u(\Phi^t(X)) dt$$

(с точностью до множества μ_Ω -меры нуль). Кроме того,

$$\int_\Omega \lambda_X^+ d\mu_\Omega(X) = \int_\Omega \mathcal{B}^u(X) d\mu_\Omega(X) \quad (3.43)$$

(здесь считаем, что $\lambda_X^+ = 0$ для всех негиперболических точек $X \in \Omega$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое тождество следует из (3.42) и (3.37). Второе соотношение является следствием эргодической теоремы Биркгофа. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3.39. Аналогично, отрицательный показатель Ляпунова λ_X^- можно вычислить через функцию $\mathcal{B}^s(X)$, если последняя интегрируема.

Следует отметить, что функция $\mathcal{B}^u(X)$ не интегрируема для некоторых больших классов хаотических билиардов (см. ниже), так что ее интегрируемость — это отчасти ограничивающее условие.

Далее рассмотрим пространство столкновений $\mathcal{M}$. Пусть $x \in \mathcal{M}$ — гиперболическая точка, а E_x^u и E_x^s обозначают подпространства, соответствующие ненулевым показателям Ляпунова; см. § 3.1. Обозначим их углы наклона через $\mathcal{V}^u(x)$ и $\mathcal{V}^s(x)$ (см. формулу (3.38)), а углы наклона соответствующих прямых до столкновения и после столкновения в фазовом пространстве — через $\mathcal{B}^{u\pm}(x)$ и $\mathcal{B}^{s\pm}(x)$ (ср. с § 3.10). Также будем считать, что $\mathcal{V}^\alpha(x) = 0$ и $\mathcal{B}^{\alpha\pm}(x) = 0$ ($\alpha = u, s$) для всех негиперболических точек. Тогда $\mathcal{V}^\alpha$ и $\mathcal{B}^{\alpha\pm}$ становятся измеримыми функциями на $\mathcal{M}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.40. Пусть функция $\log^+[\mathcal{B}^{u+}(x)]$ интегрируема; то есть

$$\int_{\mathcal{M}} \log^+[\mathcal{B}^{u+}(x)] d\mu < \infty \quad (3.44)$$

(здесь $\log^+ t = \max\{\log t, 0\}$, как и в теореме Оселедца). Показать, что почти в каждой гиперболической точке x положительный показатель Ляпунова равен

$$\lambda_x^+ = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|_p}{\|dx\|_p}, \quad (3.45)$$

где $0 \neq dx \in E_x^u$. Указание: использовать (3.41) и интегрируемость функции $|\log \cos \varphi|$.

Теорема 3.41. Если неравенство (3.44) выполнено, то положительный показатель Ляпунова λ_x^+ в точке $x \in \mathcal{M}$ — это среднее по времени

$$\lambda_x^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |1 + \tau(\mathcal{F}^i x) \mathcal{B}^{u+}(\mathcal{F}^i x)|$$

(с точностью до множества μ -меры нуль). Кроме того,

$$\int_{\mathcal{M}} \lambda_x^+ d\mu(x) = \int_{\mathcal{M}} \log |1 + \tau(x) \mathcal{B}^{u+}(x)| d\mu(x) \quad (3.46)$$

(здесь предполагается, что $\lambda_x^+ = 0$ для всех негиперболических точек $x \in \mathcal{M}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое тождество следует из (3.45) и (3.40). Второе является следствием эргодической теоремы Биркгофа. ■

Последняя теорема имеет более широкий диапазон применения по сравнению с теоремой 3.38, так как в ней не требуется интегрируемости $\mathcal{B}^u(X)$.

3.12. Энтропия

Энтропия — это мера сложности динамической системы. Здесь будет рассматриваться так называемая *метрическая энтропия* (известная как *энтропия Колмогорова–Синяя*, так как она впервые была введена А. Колмогоровым и Я. Синаем в конце 1950-х годов). Основные определения читатель может найти в приложении С, а более подробно с данной темой можно познакомиться в книгах [Pet83, Wa82, BrS02, ME81].

Запишем связь между энтропией и показателями Ляпунова, которую сформулируем здесь в контексте билиардов.

Теорема 3.42. *Метрическая энтропия потока Φ^t относительно меры μ_Ω имеет вид*

$$h(\Phi^t) = \int_{\Omega} \lambda_X^+ d\mu_\Omega(X), \quad (3.47)$$

где λ_X^+ — положительный показатель Ляпунова потока Φ^t в точке $X \in \Omega$ (если показателя не существует, то полагаем $\lambda_X^+ = 0$).

Метрическая энтропия отображения столкновений $\mathcal{F}$ относительно меры μ имеет вид

$$h(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{M}} \lambda_x^+ d\mu(x), \quad (3.48)$$

где λ_x^+ — положительный показатель Ляпунова отображения $\mathcal{F}$ в точке $x \in \mathcal{M}$ (если показателя не существует, то полагаем $\lambda_x^+ = 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.43. Формулы (3.47) и (3.48) справедливы для двумерных билиардов, где любая фазовая точка имеет не больше одного положительного показателя Ляпунова. В многомерном случае вместо одного показателя используется сумма всех положительных показателей Ляпунова.

Тождество (3.48) известно как формула Песина. Оно было доказано Песиным для гладких отображений с абсолютно непрерывными инвариантными мерами и расширено Катком и Стрельциным (Strelcyn) [KS86] для более общих отображений с особенностями, включая билиарды. Энтропия потока Φ^t определяется как энтропия его отображения Φ^1 для единичного времени (полученного при $t = 1$); следовательно, (3.47) — это частный случай общей формулы Песина для отображений с особенностями, выведенной в [KS86].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.44. Как говорилось в § 3.4, билиардная система становится хаотической, когда она имеет хотя бы один положительный показатель Ляпунова (на множестве положительной меры). Теперь ясно, что хаос в билиярдах эквивалентен положительности энтропии.

Энтропия отображения и потока связаны классической формулой Абрамова

$$h(\mathcal{F}) = \bar{\tau} h(\Phi^t). \quad (3.49)$$

Формула верна, в общем случае, для любого специального потока (suspension flow) и его преобразования на базе (base transformation) (определенных

в § 2.9); см. [Ab59]. Благодаря (2.32) получим другое полезное соотношение:

$$h(\mathcal{F}) = \pi h(\Phi^t) |\mathcal{D}|/|\Gamma|.$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.45. Вывести формулу Абрамова (3.49) для билиардов в предположении, что отображение $\mathcal{F}$, а следовательно, и поток Φ^t являются эргодическими. Указание: заметим, что величина λ_x^+ постоянна почти везде на $\mathcal{M}$, λ_X^+ постоянна почти везде на Ω и функция $\bar{\tau}_X$ (см. упражнение 2.38) постоянна почти везде на Ω ; затем использовать теорему 3.16.

УПРАЖНЕНИЕ 3.46. Вывести формулу Абрамова (3.49) в предположении, что отображение $\mathcal{F}$ не является эргодическим, но имеет конечное число эргодических компонент, то есть $\mathcal{M} = \cup_{i=1}^k \mathcal{M}_i$, так что для всех $i = 1, \dots, k$ имеем $\mathcal{F}(\mathcal{M}_i) = \mathcal{M}_i \pmod{0}$, $\mu(\mathcal{M}_i) > 0$, и сужение $\mathcal{F}$ на $\mathcal{M}_i$ является эргодическим. Указание: использовать теорему 3.16 и соотношение $d\mu_\Omega(X) = \bar{\tau}^{-1} d\mu \times ds$; см. (2.30).

Проверка формулы Абрамова (3.49) в более общем случае (когда эргодические компоненты $\mathcal{F}$ могут иметь нулевую меру) основывается на эргодической декомпозиции; см. приложение С.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.47. Комбинируя (3.48) и (3.46), получим другую интегральную формулу для энтропии отображения:

$$h(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{M}} \log|1 + \tau(x) \mathcal{B}^{u^+}(x)| d\mu(x)$$

(при условии, что (3.44) выполнено). Сочетание формул (3.47), (3.43) и (3.49) дает две эквивалентные интегральные формулы для энтропии потока:

$$h(\Phi^t) = \int_{\Omega} \mathcal{B}^u(X) d\mu_\Omega(X) = \bar{\tau}^{-1} \int_{\mathcal{M}} \log|1 + \tau(x) \mathcal{B}^{u^+}(x)| d\mu(x). \quad (3.50)$$

Заметим, однако, что вторая формула справедлива при более общих условиях: она требует выполнения только мягкого предположения (3.44), тогда как первая формула требует интегрируемости функции $\mathcal{B}^u(X)$ на Ω , что является достаточно ограничивающим требованием. Позже мы увидим, что $\mathcal{B}^u$ интегрируема для рассеивающих хаотических билиардов (глава 4), но не для фокусирующих хаотических билиардов (глава 8). В действительности для последних $\mu_\Omega(\Omega_\infty^u) = \mu_\Omega(\Omega_\infty^s) = 1$; таким образом, $\mathcal{B}^u$ и $\mathcal{B}^s$ никогда не интегрируемы. См. упражнение 3.36.

УПРАЖНЕНИЕ 3.48. Предположим, что билиардный стол $\mathcal{D}$ имеет по меньшей мере одну фокусирующую компоненту границы $\Gamma_i \subset \Gamma_-$

(см. (2.5)) и почти все точки $X \in \Omega$ гиперболические. Показать, что

$$\mu_{\Omega}(\Omega_{\infty}^u) > 0;$$

таким образом, функция $B^u(X)$ не может быть интегрируемой. Указание: сначала предположим, что Γ_i — это круговая дуга; то есть ее кривизна постоянна. Тогда из упражнения 3.32 (b) следует, что любая траектория, испытывающая по меньшей мере три последовательных столкновения в Γ_i , содержит точку фокусировки, следовательно, лежит в Ω_{∞}^u . Для произвольной фокусирующей стенки используем аппроксимационное доказательство (напомним, что кривизна Γ_i является C^1 -гладкой).

3.13. Доказательство гиперболичности: конусные методы

Завершим эту главу обсуждением общего метода для определения гиперболичности фазовых точек $x \in \mathcal{M}$ и построения их устойчивых и неустойчивых подпространств E_x^s и E_x^u . Будем использовать обозначения для билиардов $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, но этот метод применим без изменения к любому типу отображений, введенных в § 3.1, если только $\dim M = 2$ (его можно распространить на любую размерность [Wo85], но здесь такой цели не ставится). Полагаем $x_n = \mathcal{F}^n(x)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Основная идея построения неустойчивого пространства E_x^u заключается в следующем: выберем несколько ненулевых векторов $v_{-n} \in \mathcal{T}_{x_{-n}}\mathcal{M}$ для $n \geq 0$ и затем перейдем к пределу

$$E_x^u = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{span}\{D_{x_{-n}}\mathcal{F}^n(v_{-n})\}. \quad (3.51)$$

Безусловно, соотношение (3.51) может выполняться не для всех возможных вариантов $\{v_{-n}\}$, но оно должно выполняться для типичных вариантов, как это предполагается в следующем (полуэвристическом) доказательстве. Предположим, что точка x , а следовательно x_n для всех n , гиперболическая. Тогда $v_{-n} = c_{-n,u}v_{-n,u} + c_{-n,s}v_{-n,s}$, где $v_{-n,u} \in E_{x_{-n}}^u$ и $v_{-n,s} \in E_{x_{-n}}^s$, — некоторые единичные векторы. Благодаря (3.2)

$$D_{x_{-n}}\mathcal{F}^n(v_{-n}) \sim e^{\lambda_x n} c_{-n,u} w_{-n,u} + e^{-\lambda_x n} c_{-n,s} w_{-n,s},$$

где $\lambda_x > 0$ — положительный показатель Ляпунова и $w_{-n,u} \in E_x^u$ и $w_{-n,s} \in E_x^s$ — некоторые единичные векторы. Теперь, если коэффициенты $c_{-n,u}$ и $c_{-n,s}$ отделены от нуля и бесконечности, то есть

$$0 < c_{\min} \leq |c_{-n,u}|, |c_{-n,s}| \leq c_{\max} < \infty,$$

(3.51), очевидно, выполняется. В этом случае можно оценить показатель Ляпунова $\lambda_x > 0$ через предел

$$\lambda_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_{x_{-n}} \mathcal{F}^n(v_{-n})\| / \|v_{-n}\|. \quad (3.52)$$

Кроме того, как (3.51), так и (3.52) выполняются, за исключением случаев, когда отношение $|c_{-n,s}/c_{-n,u}|$ растет при $n \rightarrow \infty$ со скоростью $e^{2\lambda_x n}$ или быстрее. Таким образом, достаточно выбрать начальные векторы v_{-n} не слишком близко к устойчивым пространствам $E_{x_{-n}}^s$ (очень мягкое требование, однако и его необходимо учесть!).

Чтобы правильно выбрать v_{-n} , Алексеев [Al69] предложил метод конусов, который впоследствии стал почти универсальным.

Определение 3.49. Пусть $L \subset T_x \mathcal{M}$ — прямая и $\alpha \in (0, \pi/2)$. Конус $\mathcal{C}$ с осью L и углом раствора α — это множество всех касательных векторов $v \in T_x \mathcal{M}$, которые образуют угол $\leq \alpha$ с прямой L .

Граница $\partial \mathcal{C}$ состоит из векторов, образующих угол α с L (включая нулевой вектор).

Предположим, что нашлись конусы $\mathcal{C}_x^u \subset T_x \mathcal{M}$ во всех (или почти во всех) точках $x \in \mathcal{M}$ (с осями L_x и углами раствора α_x , являющимися измеримыми функциями x) такие, что

$$D_x \mathcal{F}(\mathcal{C}_x^u) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{F}x}^u \quad (\text{инвариантность}) \quad (3.53)$$

и для всех $v \in \mathcal{C}_x^u$

$$\|D_x \mathcal{F}(v)\| \geq \Lambda \|v\| \quad (\text{растяжение}), \quad (3.54)$$

где $\Lambda > 1$ — постоянная (независимая от x и v).

УПРАЖНЕНИЕ 3.50. Предположим, что почти любая точка $x \in \mathcal{M}$ — гиперболическая и конусы $\mathcal{C}_x^u$ удовлетворяют (3.53). Показать, что $E_x^u \subset \mathcal{C}_x^u$ и $E_x^s \setminus \{0\} \subset T_x \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}_x^u$ почти во всех $x \in \mathcal{M}$. Затем показать, что

$$E_x^u = \bigcap_{n \geq 0} D_{x_{-n}} \mathcal{F}^n(\mathcal{C}_{x_{-n}}^u). \quad (3.55)$$

Этот результат доказывает (3.51) для любого выбора $v_{-n} \in \mathcal{C}_{x_{-n}}^u$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.51. Предположим, что конусы $\mathcal{C}_x^u$ удовлетворяют (3.53) и (3.54). Показать, что почти любая точка $x \in \mathcal{M}$ имеет положительный показатель Ляпунова $\lambda_x \geq \ln \Lambda$.

Чтобы аппроксимировать устойчивые подпространства E_x^s и оценить отрицательные показатели Ляпунова, можно, аналогично, найти другую систему (семейство) конусов $C_x^s \subset T_x M$ таких, что

$$D_x \mathcal{F}^{-1}(C_x^s) \subset C_{\mathcal{F}^{-1}x}^s \quad (\text{инвариантность}) \quad (3.56)$$

и для всех $v \in C_x^s$

$$\|D_x \mathcal{F}^{-1}(v)\| \geq \Lambda \|v\| \quad (\text{сжатие}). \quad (3.57)$$

Можно применить результаты упражнений 3.50 и 3.51 (с очевидными модификациями); в частности,

$$E_x^s = \bigcap_{n \geq 0} D_{x_n} \mathcal{F}^{-n}(C_{x_n}^s). \quad (3.58)$$

Конусы C_x^u называются *неустойчивыми*, а C_x^s — *устойчивыми* конусами.

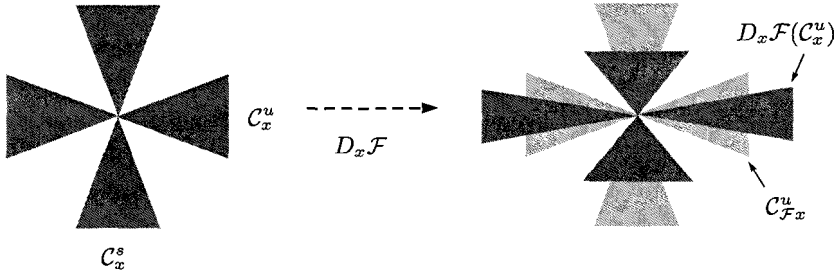


Рис. 3.11. Преобразование неустойчивого и устойчивого конусов

ЗАМЕЧАНИЕ 3.52. Заметим, что свойства инвариантности (3.53) и (3.56) сами по себе не влекут гиперболичности. Например, инвариантные конусы C_x^u и C_x^s можно построить для билиардов в окружностях и квадратах (глава 1), которые не являются гиперболическими. Это построение предоставляется читателю в качестве упражнения; см. также § 8.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.53. М. Войтковский [Wo85, Wo86] доказал, что если конусы *строго инвариантны*, то есть

$$D_x \mathcal{F}(C_x^u) \subset \text{int } C_{\mathcal{F}x}^u \cup \{0\} \quad (3.59)$$

и

$$D_x \mathcal{F}^{-1}(C_x^s) \subset \text{int } C_{\mathcal{F}^{-1}x}^s \cup \{0\}, \quad (3.60)$$

тогда гиперболичность следует без предположений о растяжении и сжатии (3.54) и (3.57). Однако это справедливо только для симплектических отображений (в двумерном случае симплектическое свойство эквивалентно сохранению абсолютно непрерывной меры).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.54. Предположим, что существует невырожденная квадратичная форма Q_x , определенная на $T_x\mathcal{M}$, для любой точки $x \in \mathcal{M}$ такая, что

$$Q_{\mathcal{F}(x)}(D_x\mathcal{F}(u)) > Q_x(u) \quad \forall u \neq 0$$

(то есть Q монотонно растет под действием $\mathcal{F}$). Тогда конусы

$$C_x^u = \{Q_x(u) \geq 0\} \quad \text{и} \quad C_x^s = \{Q_x(u) \leq 0\}$$

строго инвариантны и гиперболичность $\mathcal{F}$ следует из результатов Войтковского; см. выше. Заметим, что в некоторых случаях более удобно найти монотонно возрастающую квадратичную форму, чем строить инвариантные конусы; см., например, [Mar88].

Наконец, очевидно, что условия (3.53)–(3.54) и (3.56)–(3.57) могут выполняться только для равномерно гиперболических отображений (см. § 3.1), что делает их достаточно ограничивающими. Для неравномерно гиперболических отображений метод конусов можно адаптировать следующим образом. Предположим, что существует измеримая функция $n_x: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что для всех $n \geq n_x$

$$D_x\mathcal{F}^n(C_x^u) \subset C_{\mathcal{F}^n x}^u \quad (\text{возможная инвариантность}) \quad (3.61)$$

и для всех $v \in C_x^u$

$$\|D_x\mathcal{F}^n(v)\| \geq \Lambda\|v\| \quad (\text{возможное растяжение}), \quad (3.62)$$

и аналогичные модификации вносятся в (3.56) и (3.57). Тогда отображение $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ является гиперболическим и формулы (3.55) и (3.58) выполнены.

Заметим, что если функция n_x на $\mathcal{M}$ ограничена (то есть, что эквивалентно, постоянная), отображение $\mathcal{F}$ в действительности является равномерно гиперболическим.

ГЛАВА 4

Рассеивающие билиарды

4.1. Классификация и примеры

В этом разделе будет представлен главный класс хаотических билиардов. Впервые он был введен и хорошо изучен Я. Синаем [Sin70].

Определение 4.1. Говорят, что билиардный стол $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ (или $\mathcal{D} \subsetneq \text{Toг}^2$) называется *рассеивающим*, если все его стенки $\Gamma_i \subset \Gamma = \partial\mathcal{D}$ — рассеивающие, то есть $\Gamma = \Gamma_+$; ср. с § 2.1.

В свою очередь, рассеивающие билиарды можно классифицировать в соответствии со следующими атрибутами:

- (а) есть ли у стола $\mathcal{D}$ углы; если да, имеет ли он каспы;
- (б) если $\mathcal{D} \subsetneq \text{Toг}^2$, является ли горизонт ограниченным.

Определим шесть подклассов (категорий) рассеивающих билиардов:

	нет углов	несколько углов, нет каспов	несколько каспов
ограниченный горизонт	A	C	E
неограниченный горизонт	B	D	F

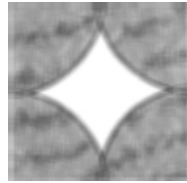
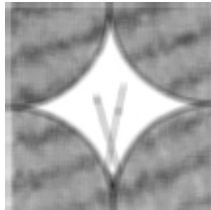


Рис. 4.1. Билиарды категорий E (слева) и C (справа)

УПРАЖНЕНИЕ 4.2. Пусть $\mathcal{D}_r = \text{Tor}^2 \setminus B_r$, где B_r — диск радиуса $r > 0$. К какой категории принадлежит $\mathcal{D}_r$? Ответ: к категории В при $r < 1/2$ (см. рис. 2.4), к Е при $r = 1/2$ и к С при $r > 1/2$ (рис. 4.1). Бильярдный стол в форме ромба на рис. 4.1 (справа) достаточно популярен в численных экспериментах [CCG, GG94].

УПРАЖНЕНИЕ 4.3. Показать, что если область $\mathcal{D}$ принадлежит к категории А или В, то ее граница $\partial\mathcal{D}$ является конечным объединением гладких замкнутых кривых, каждая из которых охватывает выпуклую область. Затем доказать, что $\mathcal{D} \subsetneq \text{Tor}^2$; то есть $\mathcal{D}$ не может быть ограниченной областью в $\mathbb{R}^2$.

Любая выпуклая область, окруженная гладкой выпуклой кривой $\Gamma_i \subset \Gamma$, называется *рассеивателем* (*scatterer*). В бильярдах категорий А и В частица движется между рассеивателями и отскакивает от них (как в автомате для пинбола).

Бильярдный стол типа А показан на рис. 4.2 (слева); у него два рассеивателя (диски побольше и поменьше), которые расположены так, чтобы блокировать все возможные направления, в которых частица может двигаться свободно, без столкновений. На рис. 4.2 (справа) показано универсальное покрытие для Tor^2 .

УПРАЖНЕНИЕ 4.4. Можно ли построить бильярдный стол категории А с одним рассеивателем?

Любая бильярдная траектория на столе $\mathcal{D} \subset \text{Tor}^2$ типа А или В может быть преобразована из тора в универсальное покрытие $\mathbb{R}^2$; см. пример на рис. 4.2. Тогда получаются траектории, движущиеся на неограниченном столе с бесконечным числом периодически расположенных рассеивателей.

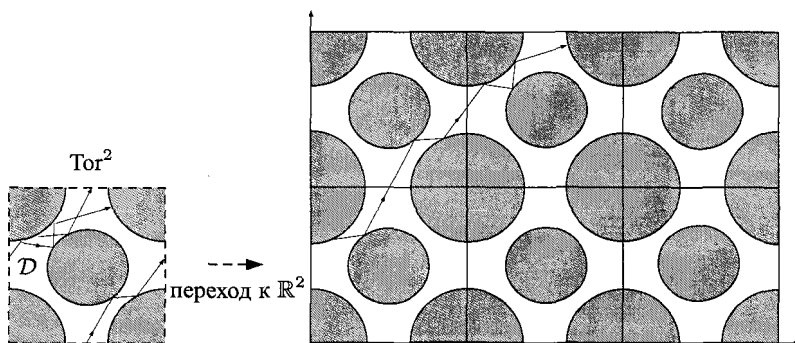


Рис. 4.2. Бильярд категории А

УПРАЖНЕНИЕ 4.5. Найти периодическую траекторию на столе $\mathcal{D} \subset \text{Tor}^2$, показанном на рис. 4.2 (слева), такую, что ее «преобразованная сестра» на рис. 4.2 (справа) не является периодической.

В физике модель, состоящая из точечной частицы, движущейся между бесконечным числом непересекающихся выпуклых тел в пространстве, известна как *газ Лоренца*. Это понятие было введено Лоренцом в 1905 году [Lo05] при описании движения электронов в металлах (тела представляли тяжелые молекулы). В нашем случае получается двумерная версия этой модели, в которой тела (рассеиватели) расположены периодически. Этот вариант называется *плоским периодическим газом Лоренца*.

УПРАЖНЕНИЕ 4.6. Показать, что для бильярдов категорий А и В функция $\tau(x)$, определенная в § 2.9, имеет положительную нижнюю границу:

$$\tau(x) \geq \tau_{\min} > 0 \quad \forall x \in \mathcal{M} \quad (4.1)$$

($\tau_{\min}$ — минимальное расстояние между рассеивателями). С другой стороны, для категорий А, С и Е эта функция имеет верхнюю оценку:

$$\tau(x) \leq \tau_{\max} < \infty \quad \forall x \in \mathcal{M}. \quad (4.2)$$

Несмотря на то что *все* типы рассеивающих бильярдов технически достаточно сложны, некоторые из них сложнее, чем другие. По нашему мнению, их уровень сложности описывается приблизительно следующей диаграммой:

«легкие»	А
средние	В, С
трудные	D, E, F

Исторически все главные свойства рассеивающих бильярдов (гиперболичность, эргодичность, перемешивание Бернулли, оценки корреляций, центральная предельная теорема и т. д.) впервые были доказаны для категории А. Большинство из них позже было расширено до категорий В и С, но это всегда требовало дополнительных усилий и специальных подходов. Категории D, E и F (как наиболее сложные и, возможно, наименее интересные) остаются практически неисследованными.

В данной книге основное внимание уделяется главной категории А, но некоторые замечания и упражнения посвящены другим категориям. Чтобы избежать путаницы, будем использовать простое соглашение: все главные результаты будут относиться к категории А, если не оговорено другое.

4.2. Другая механическая модель

В этом параграфе опишем механическую систему двух жестких дисков, которая сводится к рассеивающему бильярду. Эта механическая модель фактически является прототипом всех рассеивающих бильiardных столов и моделью, которая мотивировала Синяя ввести рассеивающие бильiardы после исследования движения жестких дисков и жестких шаров в 1960-х годах.

Рассмотрим два одинаковых диска единичной массы $m = 1$ и малым радиусом r , движущиеся по единичному тору Tor^2 без препятствий и стенок любого типа. Диски движутся свободно, с постоянной скоростью и сталкиваются друг с другом упруго, как описано ниже.

Пусть диски сталкиваются; обозначим их векторы скорости перед столкновением через u_- и v_- . Пусть L обозначает общую касательную к дискам в момент столкновения. Для любого вектора v обозначим соответственно через $v^\perp$ и $v^\parallel$ его перпендикулярную и параллельную относительно прямой L компоненты. Назовем $v^\parallel$ *тангенциальной* компонентой v , а $v^\perp$ — *нормальной* компонентой v .

Согласно закону упругого столкновения, векторы скорости после столкновения дисков имеют вид

$$u_+ = u_-^\parallel + v_-^\perp \quad \text{и} \quad v_+ = v_-^\parallel + u_-^\perp. \quad (4.3)$$

Другими словами, *векторы скорости сохраняют свои тангенциальные компоненты, но обмениваются своими нормальными компонентами*; см. рис. 4.3. Заметим, что из этого правила следует сохранение полной кинетической энергии

$$\|u_+\|^2 + \|v_+\|^2 = \|u_-\|^2 + \|v_-\|^2$$

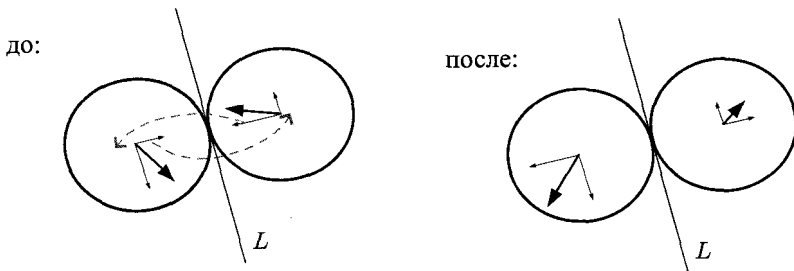


Рис. 4.3. Упругое столкновение двух дисков

и полного импульса

$$u_+ + v_+ = u_- + v_-$$

(напомним, что диски имеют единичную массу).

Согласно закону сохранения полного импульса, центр масс (x_c, y_c) движется по тору с постоянным вектором скорости. Это простое периодическое или квазипериодическое движение (см. приложение С), исключим его из рисунка, предполагая, что полный импульс равен нулю; то есть $u + v = 0$ для всех моментов времени.

Теперь центр масс находится в покое. Точнее, пусть величины $0 \leq x, y \leq 1$ обозначают прямоугольные координаты на Tor^2 , а (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — центры наших дисков. Выберем систему координат так, что в начальный момент времени центр масс

$$x_c = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{и} \quad y_c = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

совпадает с центром тора $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; эквивалентно,

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \text{и} \quad y_1 + y_2 = 1. \quad (4.4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.7. Проверить, что уравнения (4.4) выполнены в любой момент времени; следовательно, центр масс остается постоянным: $x_c = \frac{1}{2}$ и $y_c = \frac{1}{2}$. Указание: напомним, что x и y — циклические координаты, так что они периодически увеличиваются или уменьшаются на единицу. Затем показать, что если, например, значение x_1 увеличивается на единицу, то значение x_2 должно уменьшиться на единицу и т. д.

Диски сталкиваются друг с другом, если только расстояние между их центрами равно $2r$, то есть если

$$(x_1 - x_2 + m)^2 + (y_1 - y_2 + n)^2 = (2r)^2$$

для некоторого $m = 0, \pm 1$ и $n = 0, \pm 1$. Благодаря (4.4) это условие эквивалентно соотношению

$$\left(x_1 - \frac{1-m}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{1-n}{2}\right)^2 = r^2. \quad (4.5)$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.8. Показать, что уравнение (4.5) определяет четыре окружности радиуса r с центрами в $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Пусть $\mathbb{O}_i$, $1 \leq i \leq 4$, — окружности (4.5). Исследуем преобразование векторов скорости u и v при столкновении. Так как $u + v = 0$, очевидно, что $u_-^\parallel = -v_-^\parallel$ и $u_-^\perp = -v_-^\perp$ в обозначениях (4.3); следовательно,

$$u_+ = u_-^\parallel - u_-^\perp \quad \text{и} \quad v_+ = v_-^\parallel - v_-^\perp.$$

Другими словами, каждый вектор скорости отражается от общей касательной L , проведенной к сталкивающимся дискам. Заметим, что L параллельна касательной к окружности $\mathbb{O}_i$, на которой лежит точка (x_1, y_1) в момент столкновения. Также заметим, что величины $\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}/2$ остаются постоянными по времени.

Следовательно, центр (x_1, y_1) первого диска движется по Tor^2 с постоянным вектором скорости, пока не столкнется с одной из окружностей $\mathbb{O}_i$. В этом случае его скорость отражается по касательной к этой окружности в точке удара и т. д. Получим в точности бильiardную траекторию¹ на столе $\text{Tor}^2 \setminus \bigcup \mathbb{O}_i$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.9. Используя симметрию, свести эту модель к бильiardу на «четверти тора» $[0, 1/2] \times [0, 1/2]$ с единственным круговым рассеивателем радиуса r .

УПРАЖНЕНИЕ 4.10. Определить, как тип результирующего рассеивающего бильiardа меняется с изменением r и что это означает в терминах механики. Указание: использовать упражнение 4.2. Ответ: бильiard имеет тип В при $r < 1/4$ (диски достаточно малы и движутся вокруг свободно), тип Е при $r = 1/4$ и тип С при $r > 1/4$ (диски слишком велики и блокируют друг другу путь на торе).

4.3. Рассеивающиеся фронты волны

В рассеивающих бильiardах кривизна границы $\partial\mathcal{D}$ положительна $\mathcal{K} > 0$, и, благодаря предположению АЗ, можно записать для нее верхнюю и нижнюю оценки:

$$0 < \mathcal{K}_{\min} \leq \mathcal{K} \leq \mathcal{K}_{\max} < \infty.$$

Напомним, что касательные $L \subset T_X^\perp \Omega$ в фазовых точках $X \in \Omega$ могут характеризоваться углом наклона $\mathcal{B} = d\omega/d\xi$ и могут представляться с помо-

¹Чтобы быть точным, точка (x_1, y_1) движется с постоянной, но не единичной, скоростью. Можно изменить масштаб по времени (упражнение 1.10), чтобы получить принятую единичную скорость.

щью фронтов волны (кривизна которых равна $\mathcal{B}$); ср. § 3.7. Рассеивающиеся фронты волны имеют положительную кривизну $\mathcal{B} > 0$.

Лемма 4.11. *Если касательная $L \subset T_X^\perp \Omega$ имеет положительный угол наклона $\mathcal{B} > 0$, то ее образ $L_t = D_X \Phi^t(L)$ будет иметь положительный угол наклона $\mathcal{B}_t > 0$ для всех $t > 0$. Другими словами, рассеивающиеся фронты волны остаются рассеивающимися в будущем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно использовать простое доказательство по индукции, основанное на (3.31) и (3.33), так как $\mathcal{R} = 2\mathcal{K}/\cos \varphi > 0$ при каждом столкновении. ■

Рассеивающиеся фронты волны играют важную роль при исследовании рассеивающих бильярдов. В первых нескольких параграфах этой главы представим необходимые технические средства для анализа фронтов волны. Во многих отношениях рассеивающиеся фронты волны напоминают неустойчивые орициклы в геодезических потоках на многообразиях отрицательной кривизны.

Параметр столкновения $\mathcal{R} = 2\mathcal{K}/\cos \varphi$ отделен от нуля:

$$\mathcal{R} \geq \mathcal{R}_{\min} := 2\mathcal{K}_{\min} > 0. \quad (4.6)$$

Кроме того, для почти скользящих столкновений, где $\cos \varphi \approx 0$, существует лучшая оценка,

$$C_1/\cos \varphi \leq \mathcal{R} \leq C_2/\cos \varphi, \quad (4.7)$$

где $0 < C_1 < C_2$ — постоянные. Например, если почти скользящее столкновение происходит в момент t , то $\mathcal{B}_{t+0} > \mathcal{R} \geq C_1/\cos \varphi$ может быть произвольно большим.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.12. Очевидно, что некоторые величины, такие как $\mathcal{R}$ и $\mathcal{B}_{t+0}$ в данном примере, растут до бесконечности (взрываются) при $\cos \varphi \rightarrow 0$. Такая ситуация типична для рассеивающих бильярдов. Почти скользящие столкновения (где $\cos \varphi \approx 0$) часто вызывают трудности и требуют специальной обработки.

Соглашение. Будем записывать неравенства, подобные (4.7), более коротко в виде $\mathcal{R} \asymp 1/\cos \varphi$. Или в более общем виде,

$$F \asymp G \quad \Longleftrightarrow \quad C_1 < F/G < C_2,$$

где постоянные $0 < C_1 < C_2$ зависят только от стола $\mathcal{D}$.

Далее заметим, что плоский фронт ($\mathcal{B} = 0$) останется плоским вплоть до первого столкновения с $\partial\mathcal{D}$, после которого он становится рассеивающимся и остается таким навсегда; то есть $\mathcal{B}_t > 0$ для всех $t > t^+(X)$; см. (3.15).

Далее будет рассматриваться долговременная эволюция рассеивающихся фронтов волны, так что будем всегда предполагать, что наши фронты являются рассеивающимися некоторое время в прошлом.

Графиком B_t является пилообразная кривая: при каждом столкновении она совершает скачок на соответствующее значение $\mathcal{R}$. Тогда между столкновениями график убывает по гиперболе (горизонтальная асимптота которой $B = 0$) и т.д.; см. рис. 4.4.

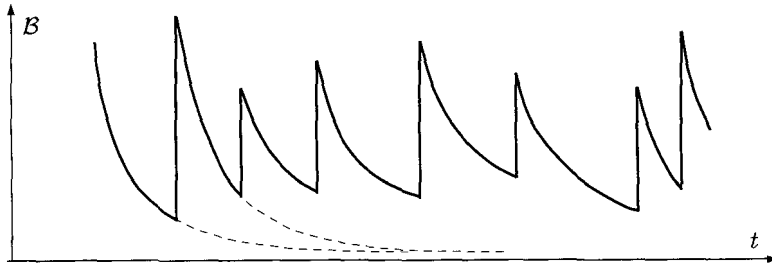


Рис. 4.4. Функция B_t для рассеивающегося фронта

УПРАЖНЕНИЕ 4.13. Пусть величины $B, B' > 0$ обозначают кривизну двух рассеивающихся волновых фронтов в одной точке X . Показать, что если $B > B'$, то $B_t > B'_t$ для всех $t > 0$ (монотонность сохраняется в будущем).

Для рассеивающихся волновых фронтов в бильярдах с конечным горизонтом (категорий А, С и Е) функция B_t отделена от нуля:

$$B_t \geq B_{\min} := \frac{1}{\tau_{\max} + 1/\mathcal{R}_{\min}} > 0. \quad (4.8)$$

Лемма 4.14. Если касательный вектор $(d\xi, d\omega) \in T_X^\perp \Omega$ имеет положительный угол наклона $d\omega/d\xi > 0$, то его образ $(d\xi_t, d\omega_t) = D_X \Phi^t(d\xi, d\omega)$ будет монотонно возрастать; то есть для любого $0 < t' < t''$ имеем

$$|d\xi_{t'}| < |d\xi_{t''}| \quad \text{и} \quad |d\omega_{t'}| \leq |d\omega_{t''}|$$

(другими словами, рассеивающиеся фронты волны монотонно расширяются в будущем).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря предыдущей лемме $\mathcal{B}_t = d\omega_t/d\xi_t > 0$ для всех $t > 0$, и, согласно (3.37), получим $\frac{d}{dt} \log |d\xi_t| = \mathcal{B}_t > 0$. Монотонность (нестрогая) $|d\omega_t|$ теперь следует из (3.25) и (3.27). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 4.15. Для категорий А, С и Е имеем $\frac{d}{dt} \log |d\xi_t| \geq \mathcal{B}_{\min}$; следовательно,

$$\frac{|d\xi_t|}{|d\xi|} \geq e^{t\mathcal{B}_{\min}}. \quad (4.9)$$

Таким образом, рассеивающиеся фронты волны растут экспоненциально все время.

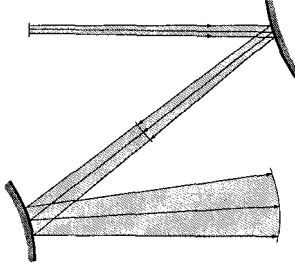


Рис. 4.5. Распространение рассеивающегося фронта волны

Проведем оценку $\mathcal{B}_t$ для волновых фронтов в моменты столкновений. Будем использовать следующее обозначение: для заданной точки $x = (r, \varphi) \in \mathcal{M}$ обозначим через $x_n = (r_n, \varphi_n) = \mathcal{F}^n(x)$ ее образы, а через $\mathcal{K}_n$, $\mathcal{R}_n$ и т.д. — соответствующие параметры в точке x_n . Для заданного фронта волны, движущегося вдоль траектории x , его образ при n -ом столкновении порождает касательную $L_n \subset \mathcal{T}_{x_n}\mathcal{M}$; обозначим через $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{B}_n^\pm$ и т.д. соответствующие величины, определенные в предыдущих главах. Обозначим через t_n время n -го столкновения, а через $\tau_n = \tau(x_n) = t_{n+1} - t_n$ — интервалы между столкновениями.

Следующие оценки промежуточные: для любого рассеивающегося волнового фронта

$$\mathcal{B}_n^+ \geq \mathcal{R}_{\min} / \cos \varphi_n \quad (4.10)$$

и, более того, для билиардов категорий А и В

$$\mathcal{B}_n^- \leq \mathcal{B}_{\max}^- := 1/\tau_{\min} \quad (4.11)$$

и

$$\mathcal{B}_n^+ \asymp 1/\cos \varphi_n. \quad (4.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.16. Инволюция, введенная в § 2.14, устанавливает простую и явную сопряженность между Φ^t и Φ^{-t} , а также между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$. Это позволяет нам «обратить время» и связать свойства Φ^{-t} и $\mathcal{F}^{-1}$ со свойствами Φ^t и $\mathcal{F}$ соответственно. Например, лемма 4.11 имеет свой аналог для «обратного течения времени»: из $\mathcal{B} < 0$ следует, что $\mathcal{B}_t < 0$ для всех $t < 0$; то есть фокусирующиеся фронты волны останутся фокусирующимися в прошлом (заметим, что инволюция трансформирует рассеивающиеся фронты волны в фокусирующиеся и наоборот). Почти любое утверждение, касающееся $\mathcal{F}$ или Φ^t , имеет свой аналог для «обратного хода времени», но в данной книге не всегда об этом будет упоминаться явно.

4.4. Гиперболичность

Лемма 4.11 позволяет построить неустойчивые конусы $\mathcal{C}_x^u$ для отображения $\mathcal{F}$: все фронты волны, которые являются рассеивающимися или плоскими после достижения точки x (то есть такие, что $\mathcal{B}^- \geq 0$), в соответствии с (3.39) образуют конус

$$\mathcal{C}_x^u = \{(dr, d\varphi) \in T_x \mathcal{M} : \mathcal{K} \leq d\varphi/dr \leq \infty\}.$$

Из леммы 4.14 легко получить инвариантность $\mathcal{C}_x^u$ в смысле (3.53), но мы докажем более строгое утверждение.

УПРАЖНЕНИЕ 4.17. Для любой точки $x_0 \in \mathcal{M}$, используя (3.31) и (3.33), вычислить верхнюю границу $\mathcal{V}_{\text{up}}$ и нижнюю границу $\mathcal{V}_{\text{lo}}$ конуса $D_{x_0} \mathcal{F}(\mathcal{C}_{x_0}^u) \subset T_{x_1} \mathcal{M}$ в точке $x_1 = \mathcal{F}(x_0)$. Ответ:

$$\mathcal{V}_{\text{up}} = \mathcal{K}_1 + \frac{\cos \varphi_1}{\tau_0}, \quad \mathcal{V}_{\text{lo}} = \mathcal{K}_1 + \frac{\cos \varphi_1}{\tau_0 + \cos \varphi_0 / 2\mathcal{K}_0};$$

см. обозначение в предыдущем параграфе.

Лемма 4.18. Конусы $\mathcal{C}_x^u$ строго инвариантны:

$$D_{x_0} \mathcal{F}(\mathcal{C}_{x_0}^u) \subset \text{int } \mathcal{C}_{x_1}^u \cup \{0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущего упражнения $\mathcal{K}_1 < \mathcal{V}_{\text{lo}} < \mathcal{V}_{\text{up}} < \infty$. ■

УПРАЖНЕНИЕ 4.19. Показать, что более узкие неустойчивые конусы, имеющие вид

$$\widehat{\mathcal{C}}_x^u = \{(dr, d\varphi) \in T_x \mathcal{M} : \mathcal{K} \leq d\varphi/dr \leq \mathcal{K} + \cos \varphi / \tau_{-1}\}, \quad (4.13)$$

строго инвариантны. Также проверить, что $D_{x_0} \mathcal{F}(\mathcal{C}_{x_0}^u) \subset \widehat{\mathcal{C}}_{x_1}^u$.

Для билиардов категорий А и В узкие конусы $\widehat{C}_x^u$ дают равномерные верхнюю и нижнюю оценки для углов наклона неустойчивых векторов:

$$0 < \mathcal{V}_{\min} < d\varphi/dr < \mathcal{V}_{\max} < \infty, \quad (4.14)$$

где $\mathcal{V}_{\min} = \mathcal{K}_{\min}$ и $\mathcal{V}_{\max} = \mathcal{K}_{\max} + 1/\tau_{\min}$.

Используя результаты Войтковского (см. замечание 3.53), приходим к следствию.

Следствие 4.20. *Отображение $\mathcal{F}$ является гиперболическим: почти любая точка $x \in \mathcal{M}$ имеет один положительный и один отрицательный показатели Ляпунова. Следовательно, поток Φ^t будет также гиперболическим; см. § 3.3.*

Далее покажем равномерную гиперболичность для главных категорий рассеивающих билиардов. Пусть $dx = (dr, d\varphi) \in C_x^u$ — неустойчивый касательный вектор и $dx_n = (dr_n, d\varphi_n) = D_x \mathcal{F}^n(dx)$ — его образ. Коэффициент растяжения dx в p -метрике определяется формулой (3.40). Заметим, что

$$\frac{\|dx_{n+1}\|_p}{\|dx_n\|_p} = 1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+ \geq 1 + \tau_n \mathcal{R}_{\min}. \quad (4.15)$$

Кроме того, при почти скользящих столкновениях справедлива более точная оценка:

$$\frac{\|dx_{n+1}\|_p}{\|dx_n\|_p} \asymp \frac{\tau_n}{\cos \varphi_n}. \quad (4.16)$$

Для билиардов категорий А и В получим

$$\Lambda = 1 + \tau_{\min} \mathcal{R}_{\min} > 1; \quad (4.17)$$

следовательно, гиперболичность будет равномерной:

$$\frac{\|dx_n\|_p}{\|dx_0\|_p} \geq \Lambda^n \quad \forall n \geq 1.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.21. Показать, что гиперболичность также будет равномерной для билиардов категорий С и D. Указание: использовать результат упражнения 2.18.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.22. Для билиардов категорий E и F гиперболичность не равномерна. Каспы действуют как «ловушки», в которых с билиардной траекторией может происходить произвольно много столкновений в течение произвольно короткого интервала времени; см. рис. 4.1 (слева). Недавние исследования показывают [СМ06], что если траектория имеет n столкновений внутри каспа, коэффициенты растяжения неустойчивых фронтов всего лишь $\sim n^a$, где $a > 0$ — постоянная.

Ранее p -метрика использовалась, чтобы доказать равномерную гиперболичность билиардов типа A и B. Проведем соответствующие вычисления в евклидовой метрике $\|dx\| = \sqrt{(dr)^2 + (d\varphi)^2}$. Благодаря (3.41)

$$\frac{\|dx_n\|}{\|dx_0\|} = \frac{\|dx_n\|_p}{\|dx_0\|_p} \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_n} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_0^2}}. \quad (4.18)$$

Последняя дробь равномерно отделена от нуля и бесконечности вследствие (4.14). Прежде чем работать со средней дробью, напомним, что

$$\frac{\|dx_1\|_p}{\|dx_0\|_p} \geq \frac{\text{const}}{\cos \varphi_0}$$

согласно (4.16). Следовательно,

$$\frac{\|dx_n\|}{\|dx_0\|} \geq \text{const} \times \frac{\|dx_n\|_p}{\|dx_1\|_p} \geq \hat{c} \Lambda^n, \quad (4.19)$$

где $\hat{c} = \hat{c}(D) > 0$ — постоянная.

Таким образом, гиперболичность будет равномерной в обеих метриках. Заметим, что расширение неустойчивых векторов всегда монотонное в p -метрике, однако это может быть не так в евклидовой метрике.

УПРАЖНЕНИЕ 4.23. Показать, что существует рассеивающий билиардный стол $\mathcal{D}$ и неустойчивый вектор $dx \in \hat{\mathcal{C}}_x^u$ такой, что $\|\mathcal{F}(dx)\| < \|dx\|$. (Указание: необходимо, чтобы $\cos \varphi_0 \ll 1$, $\cos \varphi_1 \approx 1$, $\mathcal{K}_0 \approx 0$, $\mathcal{K}_1 \approx 0$ и $B^- \approx 0$.)

Наконец, из (4.16) и (3.41) следует полезное соотношение

$$\frac{\|dx_{n+1}\|}{\|dx_n\|} \asymp \frac{\tau_n}{\cos \varphi_{n+1}}. \quad (4.20)$$

4.5. Устойчивые и неустойчивые кривые

В этом параграфе введем устойчивые и неустойчивые кривые, которые играют важную роль при изучении эргодических и статистических свойств рассеивающих билиардов.

Если фронты волны используются для представления касательных $L \subset T_X^\perp \Omega$, необходимо лишь, чтобы они были бесконечно малыми. В этом параграфе рассмотрим рассеивающиеся фронты волны положительного размера. Тогда $\mathcal{B}(X)$ становится функцией фронта.

Если $\gamma \subset \Omega$ — рассеивающийся фронт волны, то его образ $\gamma_t = \Phi^t(\gamma)$ должен расти (лемма 4.14). Но пространство Ω имеет конечный размер; следовательно, фронт γ_t должен разрушиться и свернуться с ростом t . Этот процесс представлен на рис. 4.6.

УПРАЖНЕНИЕ 4.24. Пусть γ — рассеивающийся фронт волны. Показать, что в билиярдах категорий А, В, С и D его образ $\gamma_t = \Phi^t(\gamma)$ есть конечное объединение рассеивающихся фронтов волны для любого $t > 0$. В билиярдах категорий А и В (где поток Φ^t непрерывен согласно упражнению 2.29) γ_t является непрерывной кривой для любого $t > 0$. Кривая выглядит как зигзаг, фрагмент которого показан на рис. 4.6.

Если рассеивающийся фронт волны γ является C^m -гладким, $m \geq 1$, то γ_t есть объединение $C^{m'}$ -гладких фронтов волны, где $m' = \min\{m, \ell - 1\}$, так как поток Φ^t — $C^{\ell-1}$ -гладкий (§ 2.7). По этой причине будем рассматривать только $C^{\ell-1}$ -гладкие фронты волны.

Любой рассеивающийся фронт волны γ можно спроектировать на пространство столкновений $\mathcal{M}$ с помощью отображения $\mathbf{P}^+$, определенного в (3.17). Будем называть $\mathbf{P}^+(\gamma)$ *следом*, оставляемым фронтом волны γ на $\mathcal{M}$ во время своей эволюции.

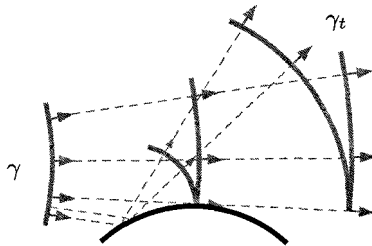


Рис. 4.6. Рассеивающийся фронт сворачивается

УПРАЖНЕНИЕ 4.25. Пусть γ — рассеивающийся фронт волны. Показать, что в билиардах категорий А и С их след $\mathbf{P}^+(\gamma)$ является *конечным* объединением гладких кривых. С другой стороны, найти рассеивающийся волновой фронт γ в билиарде категории В, показанном на рис. 2.4, след которого является *бесконечным* объединением гладких кривых.

Предположим, что кривая $W \subset \mathcal{M}$ определяется функцией $\varphi = \varphi_W(r)$ для некоторого $r'_W \leq r \leq r''_W$. Будем говорить, что W является C^m -гладкой ($m \geq 1$), если функция $\varphi_W(r)$ C^m -гладкая с точностью до конечных точек r'_W и r''_W .

Будем говорить, что C^m -гладкая кривая $W \subset \mathcal{M}$ *неустойчивая* (или *возрастающая*), если в каждой точке $x \in W$ касательная $T_x W$ принадлежит неустойчивому конусу $\widehat{C}_x^u$; см. (4.13).

Аналогично, C^m -гладкая кривая $W \subset \mathcal{M}$ называется *устойчивой* (или *убывающей*), если в каждой точке $x \in W$ касательная $T_x W$ принадлежит устойчивому конусу

$$\widehat{C}_x^s = \{(dr, d\varphi) \in T_x \mathcal{M} : -\mathcal{K} - \cos \varphi / \tau \leq d\varphi/dr \leq -\mathcal{K}\}, \quad (4.21)$$

который является аналогом $\widehat{C}_x^u$ для «обратного течения времени».

Заметим, что устойчивые и неустойчивые кривые монотонны в координатах r и φ . Их угол наклона отделен от нуля, а для билиардов категорий А и В — от бесконечности.

Для любой гладкой кривой $W \subset \mathcal{M}$ обозначим через $|W|$ ее длину в евклидовой метрике, а через $|W|_p$ — ее длину в p -метрике:

$$|W|_p = \int_{r'_W}^{r''_W} \cos \varphi_W(r) dr.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.26. Показать, что в билиардах категорий А и В для любых устойчивых или неустойчивых кривых W выполняется соотношение

$$|W|_p < |W| < C |W|_p^{1/2}, \quad (4.22)$$

где $C = C(\mathcal{D})$ — постоянная. Таким образом, эти метрики эквивалентны на устойчивых и неустойчивых кривых. (Оценки (4.22) также справедливы для билиардов категорий С и D, но соответствующие доказательства достаточно трудны; см. [BSC91].)

Следующие простые факты заслуживают внимания.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.27. Устойчивые и неустойчивые кривые не могут иметь самопересечений. Их длины (в обеих метриках $|\cdot|$ и $|\cdot|_p$) равномерно ограничены. Если W^u — это неустойчивая кривая, а W^s — устойчивая кривая, то их пересечение $W^u \cap W^s$ состоит из не более чем одной точки.

Для заданной гладкой неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}$ траектории ее точек $x \in W$ образуют рассеивающийся фронт волны, след которого на $\mathcal{M}$ будет образом $\mathcal{F}(W)$. Итак, $\mathcal{F}(W)$ — это объединение неустойчивых кривых.

УПРАЖНЕНИЕ 4.28. Показать, что $\mathcal{F}(W)$ состоит из конечного числа неустойчивых кривых для билиардов категорий A и C; показать, что это число может быть счетным для категорий B и D. По индукции показать что то же самое справедливо для последующих образов $\mathcal{F}^n(W)$, $n \geq 1$.

Если кривая W является C^m -гладкой, то $\mathcal{F}(W)$ состоит из $C^{m'}$ -гладких кривых, где $m' = \min\{m, \ell - 1\}$, так как отображение $\mathcal{F}$ является $C^{\ell-1}$ -гладким. По этой причине, далее будем рассматривать только $C^{\ell-1}$ -гладкие устойчивые и неустойчивые кривые.

До сих пор на производные

$$\varphi_W^{(\nu)}(r) = d^\nu \varphi_W(r) / dr^\nu, \quad 1 \leq \nu \leq \ell - 1, \quad (4.23)$$

не накладывалось никаких ограничений для устойчивых и неустойчивых кривых. Однако интуитивно понятно, что если кривая W неустойчивая, то ее образы $\mathcal{F}^n(W)$, $n \geq 1$, растягиваются экспоненциально быстро (по n), так что все нерегулярности вдоль этих кривых должны сгладиться. В конечном итоге все производные (4.23), соответствующие кривым $W' \subset \mathcal{F}^n(W)$, должны быть ограничены абсолютной постоянной, что приводит нас к следующему предложению.

Предложение 4.29. Пусть $\mathcal{D}$ — билиард категории A или B. Тогда для каждого $\nu = 1, \dots, \ell - 1$ существует постоянная $C_\nu = C_\nu(\mathcal{D}) > 0$ такая, что для любой $C^{\ell-1}$ -гладкой неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}$ существует такое $n_W \geq 1$, что для всех $n > n_W$ ν -ая производная любой гладкой кривой $W' \subset \mathcal{F}^n(W)$ ограничена константой C_ν :

$$|\varphi_{W'}^{(\nu)}(r)| \leq C_\nu. \quad (4.24)$$

Доказательство (4.24) для $\nu > 2$ до сих пор никогда не публиковалось (случай $\nu = 2$ рассматривается в [Ch01], а случай $\nu = 1$ тривиален). Поскольку это новый результат, приведем полное доказательство в следующем параграфе. Однако это доказательство достаточно техническое, и читатель может пропустить его без ущерба для дальнейшего прочтения книги.

4.6. Доказательство предложения 4.29

Первая производная $d\varphi/dr$ ограничена (4.14). Дифференцируя (3.39), получим

$$d^2\varphi/dr^2 = dK/dr - \mathcal{B}^- \sin \varphi \, d\varphi/dr + \cos \varphi \, d\mathcal{B}^-/dr;$$

следовательно, вторая производная была бы ограничена, если бы нашлась равномерная оценка для $d\mathcal{B}^-/dr$. Дальнейшее дифференцирование (оставим это действие в качестве упражнения) позволяет свести предложение 4.29 к следующей лемме.

Лемма 4.30. *Для каждого $\nu = 1, \dots, \ell - 2$ существует постоянная $C'_\nu = C'_\nu(\mathcal{D}) > 0$ такая, что для любой $C^{\ell-1}$ -гладкой неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}$ существует такое $n_W \geq 1$, что для всех $n > n_W$ любая гладкая кривая $W' \subset \mathcal{F}^n(W)$ удовлетворяет неравенству*

$$|d^\nu \mathcal{B}_{W'}^-/dr^\nu| \leq C'_\nu,$$

где $\mathcal{B}_{W'}^-(r) = (d\varphi_{W'}(r)/dr - \mathcal{K}(r))/\cos \varphi_{W'}(r)$ согласно (3.39).

Значение $\mathcal{B}_{W'}^-$ — это кривизна рассеивающегося волнового фронта, соответствующая неустойчивой кривой W' непосредственно перед столкновением. Так как $\mathcal{B} = d\omega/d\xi$ согласно (3.30), то будет более удобным продифференцировать $\mathcal{B}$ по ξ , а не по r . Эта замена переменных требует анализа, который и будет проведен далее.

Пусть γ — рассеивающийся фронт волны (в обозначениях § 3.7) и s — гладкий параметр на кривой $\pi_q(\gamma) \subset \mathcal{D}$. Для любой точки $X_s = (x_s, y_s, \omega_s) \in \gamma$ обозначим через $X_{st} = (x_{st}, y_{st}, \omega_{st}) = \Phi^t(X_s)$ ее образ в момент времени $t > 0$ (здесь используются координаты (x, y, ω) , введенные в § 2.6). Точки $\{X_{st}\}$ заполняют двумерную поверхность $\Sigma \subset \Omega$, параметризованную через s и t ; см. рис. 4.7.

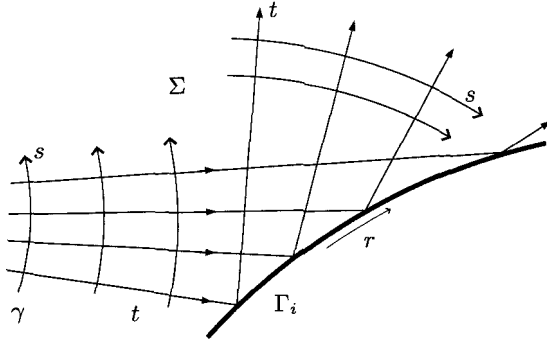
Далее будем обозначать дифференцирование по s штрихами, а дифференцирование по t — точками. Например,

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\omega}) = (\cos \omega, \sin \omega, 0).$$

Вектор (x', y') остается ортогональным вектору скорости $(\cos \omega, \sin \omega)$ на протяжении всего времени (см. § 3.7); следовательно, $x' \cos \omega + y' \sin \omega = 0$. Пусть

$$u = -x' \sin \omega + y' \cos \omega.$$

Заметим, что $u^2 = (x')^2 + (y')^2$; следовательно, модуль $|u|$ равен расстоянию на столе $\mathcal{D}$, соответствующему единичному приращению параметра s .

Рис. 4.7. Параметризация Σ через s и t

УПРАЖНЕНИЕ 4.31. Проверить, что для любой гладкой функции $F: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{dF}{d\xi} = \frac{1}{u} \frac{dF}{ds}. \quad (4.25)$$

В частности,

$$\mathcal{B} = \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\omega'}{u}. \quad (4.26)$$

Проверить также, что

$$\dot{u} = u\mathcal{B}. \quad (4.27)$$

Комбинируя (4.25) и (4.27), получим

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{d\xi} F = -\mathcal{B} \frac{d}{d\xi} F + \frac{d}{d\xi} \frac{d}{dt} F. \quad (4.28)$$

В частности, полагая $F = \omega$ и используя (4.26), имеем

$$\frac{d\mathcal{B}}{dt} = -\mathcal{B}^2; \quad \text{следовательно,} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mathcal{B}} \right) = 1, \quad (4.29)$$

что согласуется с (3.31). Обозначим

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{d^\nu \mathcal{B}}{d\xi^\nu}, \quad \nu = 1, \dots, \ell - 2.$$

Тогда из (4.28) следует

$$\dot{\mathcal{E}}_\nu = -\mathcal{E}_\nu \mathcal{B} + \frac{d}{d\xi} \dot{\mathcal{E}}_{\nu-1}, \quad \nu = 1, \dots, \ell - 2$$

(где предполагается, что $\mathcal{E}_0 = \mathcal{B}$). В частности, легко проверить, что

$$\dot{\mathcal{E}}_1 = -3\mathcal{E}_1 \mathcal{B}, \quad \dot{\mathcal{E}}_2 = -4\mathcal{E}_2 \mathcal{B} - 3\mathcal{E}_1^2 \quad \text{и т. д.}$$

Заметим, что $\dot{\mathcal{E}}_\nu$ — это однородный квадратичный многочлен по $\mathcal{B}, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_\nu$ для любого $\nu \geq 1$.

До сих пор проводился анализ свободного пробега между столкновениями. Далее рассмотрим, что происходит при столкновении со стенкой Γ_i ; см. рис. 4.7. Для любой точки столкновения $(\bar{x}(r), \bar{y}(r)) \in \Gamma_i$ (вновь используются обозначения § 2.6) существует такая единственная пара (s, t) , что

$$x_{st} = \bar{x}(r) \quad \text{и} \quad y_{st} = \bar{y}(r); \quad (4.30)$$

следовательно, s и t , ограниченные столкновением, становятся функциями r . Дифференцируя (4.30) и используя элементарную тригонометрию (оставим это в качестве упражнения), получим

$$\frac{dt}{dr} = \sin \varphi \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dr} = \frac{\cos \varphi}{u^-} = -\frac{\cos \varphi}{u^+} \quad (4.31)$$

(заметим, что $u^+ = -u^-$, так как система координат (s, t) меняет ориентацию после столкновения; см. рис. 4.7).

Теперь для любой гладкой функции $F: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через F^- и F^+ ее сужения на части Σ до и после столкновения соответственно. Тогда, следуя (4.31), получим

$$\begin{aligned} \frac{dF^-(s(r), t(r))}{dr} &= \frac{(F')^- \cos \varphi}{u^-} + (\dot{F})^- \sin \varphi = \\ &= \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^- \cos \varphi + (\dot{F})^- \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.32)$$

и, аналогично,

$$\frac{dF^+(s(r), t(r))}{dr} = -\left(\frac{dF}{d\xi} \right)^+ \cos \varphi + (\dot{F})^+ \sin \varphi. \quad (4.33)$$

Вернемся теперь к доказательству леммы 4.30. Используя (4.32) и (4.29), получим

$$d\mathcal{B}^-/dr = \mathcal{E}_1^- \cos \varphi - (\mathcal{B}^-)^2 \sin \varphi, \quad (4.34)$$

так что производная $d\mathcal{B}^-/dr$ будет равномерно ограниченной, если величина $\mathcal{E}_1^-$ равномерно ограничена. Продолжая дифференцирование, получим

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{B}^-/dr^2 = & \mathcal{E}_2^- \cos^2 \varphi - 5\mathcal{E}_1^- \mathcal{B}^- \cos \varphi \sin \varphi - \mathcal{E}_1^- \mathcal{V} \sin \varphi - \\ & - (\mathcal{B}^-)^2 \mathcal{V} \cos \varphi + 2(\mathcal{B}^-)^3 \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

где $\mathcal{V} = d\varphi/dr = \mathcal{B}^- \cos \varphi + \mathcal{K}$; см. (3.39). Следовательно, производная $d^2\mathcal{B}^-/dr^2$ будет равномерно ограничена, если равномерно ограничена $\mathcal{E}_2^-$. Последующее дифференцирование (оставим его в качестве упражнения) сводит лемму 4.30 к следующей лемме.

Лемма 4.32. *Для каждого $\nu = 1, \dots, \ell - 2$ существует такая постоянная $\mathcal{C}_\nu'' = \mathcal{C}_\nu''(\mathcal{D}) > 0$, что для любого $C^{\ell-1}$ -гладкого рассеивающегося фронта волны $\gamma \subset \Omega$ существует такое $n_\gamma \geq 1$, что для всех $n \geq n_\gamma$ ν -ая производная $\mathcal{E}_\nu = d^\nu \mathcal{B}/d\xi^\nu$ кривизны $\mathcal{B}$ его образа $\Phi^t(\gamma)$ перед n -ым столкновением удовлетворяет неравенству*

$$|\mathcal{E}_\nu| \leq \mathcal{C}_\nu''.$$

Читатель должен заметить, что рассеивающиеся фронты волны играют такую же роль для потока Φ^t , как неустойчивые кривые играют для отображения $\mathcal{F}$. В этом смысле лемма 4.32 — это «потокковая» версия предложения 4.29 об «отображении».

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала полагаем $\nu = 1$, а затем используем индукцию по ν . Предположим, что F — это такая гладкая функция на поверхности Σ , введенной выше, что $dF/dt = 0$; то есть функция F не зависит от t между столкновениями. Тогда из (4.29) и (4.28) следует, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mathcal{B}} \frac{d}{d\xi} F \right) = \frac{\mathcal{B}^2}{\mathcal{B}^2} \frac{d}{d\xi} F - \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}} \frac{d}{d\xi} F = 0; \quad (4.35)$$

то есть функция $G = \mathcal{B}^{-1} dF/d\xi$ также не зависит от t между столкновениями.

Благодаря (4.29) функция $F_0 = t - 1/\mathcal{B}$ удовлетворяет $\dot{F}_0 = 0$. Следовательно, функция

$$F_1 = \frac{1}{\mathcal{B}} \frac{dF_0}{d\xi} = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}^3} \quad (4.36)$$

не зависит от t между столкновениями; то есть $\dot{F}_1 = 0$. Чтобы вычислить ее приращение при столкновениях, напомним, что

$$B^+ = B^- + \mathcal{R},$$

где $\mathcal{R} = 2\mathcal{K}(r)/\cos\varphi$. Дифференцируя это уравнение относительно r и используя (4.32)–(4.33), получим

$$-\mathcal{E}_1^+ = \mathcal{E}_1^- + \mathcal{R}_1,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= (B^+)^2 \operatorname{tg} \varphi - (B^-)^2 \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d\mathcal{R}}{dr} = \\ &= \frac{6\mathcal{K}^2 \sin \varphi + 6\mathcal{K}B^- \sin \varphi \cos \varphi + 2\mathcal{K}' \cos \varphi}{\cos^3 \varphi}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{K}' = d\mathcal{K}/dr$. Следовательно,

$$-F_1^+ = \left(\frac{B^-}{B^+}\right)^3 F_1^- + H_1, \quad (4.37)$$

где $H_1 = \mathcal{R}_1/(B^+)^3$, то есть

$$H_1 = \frac{6\mathcal{K}^2 \sin \varphi + 6\mathcal{K}B^- \sin \varphi \cos \varphi + 2\mathcal{K}' \cos \varphi}{(2\mathcal{K} + B^- \cos \varphi)^3}.$$

Заметим, что H_1 представляется дробью, все члены которой равномерно ограничены и знаменатель которой больше, чем положительная постоянная $8\mathcal{K}_{\min}^3$. Таким образом, $|H_1| \leq \tilde{C}_1 = \tilde{C}_1(\mathcal{D})$ — абсолютная постоянная. Также заметим, что

$$\frac{B^-}{B^+} = \frac{B^-}{B^- + \mathcal{R}} \leq \theta, \quad \theta := \frac{B_{\max}^-}{B_{\max}^- + \mathcal{R}_{\min}} < 1.$$

Так как F_1 постоянна между столкновениями, обозначим через $F_1(n)$ ее величину между n -ым и $(n+1)$ -ым столкновениями. Тогда из (4.37) следует, что

$$|F_1(n)| \leq \theta^3 |F_1(n-1)| + \tilde{C}_1,$$

и простая индукция по n влечет

$$\begin{aligned} |F_1(n)| &\leq \theta^{3n} |F_1(0)| + \tilde{C}_1 (1 + \theta^3 + \dots + \theta^{3(n-1)}) \leq \\ &\leq \theta^{3n} |F_1(0)| + \tilde{C}_1 / (1 - \theta^3). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Следовательно, для всех

$$n > n_{\gamma,1} := \ln(|\tilde{C}_1|/|F_1(0)|)/\ln \theta^3$$

получим $|F_1(n)| < \tilde{C}'_1 = 2\tilde{C}_1/(1 - \theta^3)$. В итоге из (4.36) следует оценка $|\mathcal{E}_1| < \tilde{C}'_1 B^3$; таким образом,

$$|\mathcal{E}_1^-| < \tilde{C}'_1 (B^-)^3 \leq \tilde{C}'_1 (B_{\max}^-)^3 =: C''_1$$

для всех столкновений после $n_{\gamma,1}$ -го столкновения. Это доказывает лемму 4.32 для $\nu = 1$.

Вернемся к шагу индукции. Сначала сделаем индуктивные предположения. Предположим, что для некоторого $1 \leq \nu \leq \ell - 3$ на Σ определена функция F_ν со следующими свойствами (читателю следует проверить, что эти свойства верны для $\nu = 1$).

(a)

$$F_\nu = \frac{Q_\nu(\mathcal{E}_\nu, \mathcal{E}_{\nu-1}, \dots, \mathcal{E}_1, B)}{B^{2\nu+1}},$$

где Q_ν — однородный многочлен степени ν от переменных $\mathcal{E}_\nu, \dots, \mathcal{E}_1$ и B , где $\mathcal{E}_\nu$ появляется только в одном члене, а именно в $\mathcal{E}_\nu B^{\nu-1}$. Кроме того, если заменить $\mathcal{E}_i$ на x^i , а B на $x^0 = 1$, то любой член $Q_\nu(x)$ будет пропорционален x^ν .

(b) $|F_\nu| < \tilde{C}'_\nu$ для некоторой постоянной $\tilde{C}'_\nu(\mathcal{D}) > 0$ в любой момент времени после $n_{\gamma,\nu}$ -го столкновения.

(c) $\dot{F}_\nu = 0$; то есть F_ν не зависит от t между столкновениями.

(d) Приращения F_ν при столкновениях удовлетворяют уравнению

$$(-1)^\nu F_\nu^+ = \left(\frac{B^-}{B^+}\right)^{\nu+2} F_\nu^- + H_\nu, \quad (4.39)$$

где

$$H_\nu = \frac{G_\nu}{(2\mathcal{K} + B^- \cos \varphi)^{2\nu+1}}$$

и G_ν — алгебраическое выражение (многочлен), члены которого («переменные») $\cos \varphi, \sin \varphi, B^-, \mathcal{E}_1^-, \dots, \mathcal{E}_{\nu-1}^-, \mathcal{K}, d\mathcal{K}/dr, \dots, d^\nu \mathcal{K}/dr^\nu$.

Также предполагается, что была доказана оценка $|\mathcal{E}_i| \leq \tilde{C}''_\nu B^{i+2}$ для некоторых постоянных $\tilde{C}''_\nu(\mathcal{D}) > 0$ и всех $1 \leq i \leq \nu$ для всех моментов времени после $n_{\gamma,\nu}$ -го столкновения.

Продолжим индуктивный шаг. Благодаря (4.35) функция

$$F_{\nu+1} = \frac{1}{B} \frac{dF_{\nu}}{d\xi}$$

не зависит от t между столкновениями; то есть $\dot{F}_{\nu+1} = 0$. Из свойства (а) функции F_{ν} следует, что

$$F_{\nu+1} = \frac{B dQ_{\nu}/d\xi - (2\nu+1)Q_{\nu}\mathcal{E}_1}{B^{2\nu+3}} = \frac{Q_{\nu+1}(\mathcal{E}_{\nu+1}, \dots, \mathcal{E}_1, B)}{B^{2\nu+3}}, \quad (4.40)$$

где $Q_{\nu+1}$ — однородный многочлен степени $\nu+1$, в котором величина $\mathcal{E}_{\nu+1} = d\mathcal{E}_{\nu}/d\xi$ появляется в одном члене, а именно в $\mathcal{E}_{\nu+1}B^{\nu}$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.33. Проверить соотношения

$$Q_2 = \mathcal{E}_2 B - 3\mathcal{E}_1^2, \quad Q_3 = \mathcal{E}_3 B^2 - 10\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1 B + 15\mathcal{E}_1^3.$$

Показать, используя индукцию по ν , что если заменить $\mathcal{E}_i$ на x^i , а B на $x^0 = 1$, то любой член $Q_{\nu}(x)$ будет пропорционален x^{ν} . Более того, если заменить $\mathcal{E}_i$ на x^{i+2} и B на x , то любой член $Q_{\nu}(x)$ будет иметь степень $\geq 2\nu+1$.

Чтобы оценить изменение $F_{\nu+1}$ при столкновениях, продифференцируем (4.39) относительно r и используем (4.32)–(4.33), что дает

$$(-1)^{\nu+1} F_{\nu+1}^+ = \left(\frac{B^-}{B^+} \right)^{\nu+3} F_{\nu+1}^- + H_{\nu+1}, \quad (4.41)$$

где

$$H_{\nu+1} = \frac{1}{B^+ \cos \varphi} \frac{dH_{\nu}}{dr} + (\nu+2) F_{\nu}^- (B^-)^{\nu+1} \frac{\mathcal{R} dB^-/dr - B^- d\mathcal{R}/dr}{(B^+)^{\nu+4} \cos \varphi}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.34. Показать, что

$$H_{\nu+1} = \frac{G_{\nu+1}}{(2\mathcal{K} + B^- \cos \varphi)^{2\nu+3}},$$

где $G_{\nu+1}$ — алгебраическое выражение (многочлен), членами которого («переменными») являются $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, B^- , $\mathcal{E}_1^-, \dots, \mathcal{E}_{\nu}^-$ и $\mathcal{K}$, $d\mathcal{K}/dr, \dots, \dots, d^{\nu+1}\mathcal{K}/dr^{\nu+1}$. Прийти к соотношению $|H_{\nu+1}| \leq \tilde{C}_{\nu+1}$, где $\tilde{C}_{\nu+1}(\mathcal{D}) > 0$ — постоянная.

Заметим, что на последнем шаге при $\nu = \ell - 3$ функция $H_{\nu+1} = H_{\ell-2}$ будет включать в себя функцию $d^{\ell-2}\mathcal{K}/dr^{\ell-2}$, которая является непрерывной, но необязательно дифференцируемой функцией. Следовательно, $H_{\ell-2}$ может оказаться недифференцируемой, но по-прежнему равномерно ограниченной.

Остальная часть доказательства аналогична случаю $\nu = 1$. Пусть $F_{\nu+1}(n)$ обозначает величину $F_{\nu+1}$ между n -ым и $(n+1)$ -м столкновениями. Тогда из (4.41) имеем

$$|F_{\nu+1}(n)| \leq \theta^{\nu+3}|F_{\nu+1}(n-1)| + \tilde{C}_{\nu+1}$$

и индукция по n дает

$$|F_{\nu+1}(n)| \leq \theta^{(\nu+3)n}|F_{\nu+1}(0)| + \tilde{C}_{\nu+1}/(1 - \theta^{\nu+3});$$

следовательно, для всех достаточно больших n справедлива оценка $|F_{\nu+1}(n)| < \tilde{C}_{\nu+1}^- := 2\tilde{C}_{\nu+1}/(1 - \theta^{\nu+3})$.

В заключение оценим $\mathcal{E}_{\nu+1}$. Используя соотношение (4.40) и последующие за ним комментарии, получим

$$|\mathcal{E}_{\nu+1}| \leq \tilde{C}_{\nu+1}''|\mathcal{B}|^{\nu+3} + \hat{Q}_{\nu+1}/\mathcal{B}^{\nu},$$

где $\hat{Q}_{\nu+1}$ — однородный многочлен степени $\nu+1$ от переменных $\mathcal{E}_{\nu}, \dots, \mathcal{E}_1$ и $\mathcal{B}$. Так как $|\mathcal{E}_i| \leq \tilde{C}_i''\mathcal{B}^{i+2}$ для всех $1 \leq i \leq \nu$, из последней части упражнения 4.33 следует, что $|\hat{Q}_{\nu+1}/\mathcal{B}^{\nu}| \leq \text{const} \cdot \mathcal{B}^{\nu+3}$; таким образом, $|\mathcal{E}_{\nu+1}| \leq \tilde{C}_{\nu+1}''\mathcal{B}^{\nu+3}$ для некоторой постоянной $\tilde{C}_{\nu+1}''(\mathcal{D}) > 0$ и

$$|\mathcal{E}_{\nu+1}^-| \leq \tilde{C}_{\nu+1}''(\mathcal{B}^-)^{\nu+3} \leq \tilde{C}_{\nu+1}''(\mathcal{B}_{\max}^-)^{\nu+3} =: C_{\nu+1}''.$$

Индукцией по ν лемма 4.32 доказана. Предложение 4.29 доказано. $\blacksquare$

4.7. Еще о непрерывных дробях

Пусть $X \in \Omega$ — гиперболическая точка. В этом параграфе вычислим угол наклона $\mathcal{B}^u(X)$ неустойчивого подпространства E_X^u , используя метод конусов Алексева, описанный в § 3.13. Выведем замечательную формулу для непрерывной дроби, открытую Синаем [Sin70].

Пусть $x = \mathbf{P}^+(X)$ (см. (3.17)) и $x_n = \mathcal{F}^n(x)$ для $n \in \mathbb{Z}$. Также будем использовать обозначения $\tau_n = \tau_n(x)$ и $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n(x)$, введенные в § 4.3.

Предложение 4.35. Пусть $X \in \Omega$ — гиперболическая точка. Угол наклона $\mathcal{B}^u(X)$ неустойчивого подпространства E_X^u определяется бесконечной непрерывной дробью

$$\mathcal{B}^u(X) = \frac{1}{|t^-(X)| + \frac{1}{\mathcal{R}_{-1} + \frac{1}{\tau_{-2} + \frac{1}{\mathcal{R}_{-2} + \frac{1}{\tau_{-3} + \ddots}}}}}, \quad (4.42)$$

где $|t^-(X)|$ определяется соотношением (3.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом (3.31) достаточно доказать это утверждение для $X \in \mathcal{M}$, и в этом случае $x = X$ и $|t^-(X)| = \tau_{-1}$. Следовательно, (4.42) представляет собой кривизну $\mathcal{B}^{u-}(X)$ до столкновения.

Величина бесконечной непрерывной дроби по определению равна пределу своих подходящих дробей. Подходящие дроби с четными номерами

$$\mathcal{B}_{-n}^e = \frac{1}{\tau_{-1} + \frac{1}{\mathcal{R}_{-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\mathcal{R}_{-n}}}}}$$

соответствуют фронтам волны, прообразы которых перед n -ым столкновением в прошлом являются плоскими (то есть $\mathcal{B}_{-n}^- = 0$) (вспомним (3.34)). Подходящие дроби с нечетными номерами

$$\mathcal{B}_{-n}^o = \frac{1}{\tau_{-1} + \frac{1}{\mathcal{R}_{-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\tau_{-n}}}}}$$

соответствуют фронтам волны, прообразы которых перед n -ым столкновением в прошлом фокусируются (то есть $\mathcal{B}_{-n}^{\pm} = \infty$). Так как обе дроби $\mathcal{B}_{-n}^e$ и $\mathcal{B}_{-n}^o$ соответствуют образам рассеивающихся фронтов волны, построенных в удаленном прошлом, они сходятся к $\mathcal{B}^u(X)$ при $n \rightarrow \infty$, как следствие (3.51). ■

Интересно, что сходимость $\mathcal{B}_{-n}^e$ и $\mathcal{B}_{-n}^o$ к общему пределу (4.42) можно также проверить непосредственно и независимо от гиперболичности точки X .

Лемма 4.36. *Последовательности $\{\mathcal{B}_{-n}^e\}$ и $\{\mathcal{B}_{-n}^o\}$ сходятся к общему пределу (4.42) всякий раз, когда $t_{-n} \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$, то есть если прошлая траектория точки X определена для всех моментов времени. Более того,*

$$|\mathcal{B}^u(X) - \mathcal{B}_{-n}^e| \leq 1/|t_{-n}|, \quad |\mathcal{B}^u(X) - \mathcal{B}_{-n}^o| \leq 1/|t_{-n}|. \quad (4.43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{R}_n > 0$ и $\tau_n > 0$ для всех n , несложно проверить, что

$$\mathcal{B}_{-1}^e < \mathcal{B}_{-2}^e < \dots < \mathcal{B}_{-n}^e < \dots < \mathcal{B}_{-n}^o < \dots < \mathcal{B}_{-2}^o < \mathcal{B}_{-1}^o. \quad (4.44)$$

Далее оценим разность $\mathcal{B}_{-n}^o - \mathcal{B}_{-n}^e$. Эти две конечные непрерывные дроби отличаются только последним членом. Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{a+b_1} - \frac{1}{a+b_2} = \frac{1}{a+b_1} \frac{1}{a+b_2} (b_2 - b_1),$$

затем аналогично преобразуем $b_2 - b_1$ (так как b_2 и b_1 также непрерывные дроби) и т. д. В конечном итоге приходим к соотношению

$$\mathcal{B}_{-n}^o - \mathcal{B}_{-n}^e = W_1^o W_1^e W_2^o W_2^e \dots W_{n-1}^o W_{n-1}^e \left[\frac{1}{\tau_{-n}} - \frac{1}{\tau_{-n} + 1/\mathcal{R}_{-n}} \right],$$

где

$$W_i^o = \frac{1}{1 + \tau_{-i} \left(\mathcal{R}_{-i} + \frac{1}{\tau_{-i-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\tau_{-n}}}} \right)}$$

и W_i^e определяется аналогично, но вместо τ_{-n} стоит член $\mathcal{R}_{-n}$. Так как все члены дробей положительны, легко проверить, что $W_i^e \leq 1$ и

$$W_i^o \leq \frac{\tau_{-i-1} + \dots + \tau_{-n}}{\tau_{-i} + \dots + \tau_{-n}}.$$

Комбинируя все оценки, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{-n}^o - \mathcal{B}_{-n}^e &\leq \frac{1}{\tau_{-n}} \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\tau_{-i-1} + \dots + \tau_{-n}}{\tau_{-i} + \dots + \tau_{-n}} = \\ &= \frac{1}{\tau_{-1} + \dots + \tau_{-n}} = \frac{1}{|t_{-n}|}, \end{aligned}$$

что доказывает лемму. ■

Следствие 4.37. Пусть $L \subset T_X^\perp \Omega$ — касательная с углом наклона $B > 0$. Предположим, что $\mathcal{B}_{t_{-n}-0}^e \geq 0$, где t_{-n} — время n -го столкновения в прошлом. Тогда $|B - \mathcal{B}^u(X)| \leq 1/|t_{-n}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Касательная $D_X \Phi^{t_{-n}-0}(L)$ соответствует фронту волны, кривизна которого лежит между нулем (этот факт использовался при построении $\mathcal{B}_{-n}^e$; см. доказательство предложения 4.35) и бесконечностью (этот факт использовался при построении $\mathcal{B}_{-n}^o$). Следовательно, $\mathcal{B}_{-n}^e \leq B \leq \mathcal{B}_{-n}^o$ благодаря результату упражнения 4.13. ■

Лемма 4.36 показывает, что $\mathcal{B}^u(X)$ вводится с помощью (4.42) на множестве $\tilde{\Omega}^- = \{X: \Phi^t(X) \text{ существует } \forall t < 0\}$ фазовых точек, прошлые траектории которых существуют (оно определено больше, чем множество гиперболических точек).

УПРАЖНЕНИЕ 4.38. Пусть $\hat{\Omega}^- \subset \tilde{\Omega}^-$ обозначает множество точек, прошлые траектории которых участвовали только в регулярных столкновениях (но не скользящих столкновениях). Показать, что функция $\mathcal{B}^u(X)$ непрерывна в каждой точке $X \in \hat{\Omega}^-$, но разрывна в каждой точке $X \in \tilde{\Omega}^- \setminus \hat{\Omega}^-$. Указание: заметим, что непрерывная дробь $\mathcal{B}^u(X)$ зависит непрерывно от своих членов. Затем использовать следствие 4.37.

Вследствие обратимости времени (замечание 4.16) угол наклона $\mathcal{B}^s(X)$ устойчивого подпространства E_X^s , $X \in \Omega$, выражается в виде непрерывной

дроби

$$\mathcal{B}^s(X) = -\frac{1}{t^+(X) + \frac{1}{\mathcal{R}_0 + \frac{1}{\tau_0 + \frac{1}{\mathcal{R}_1 + \frac{1}{\tau_1 + \frac{1}{\ddots}}}}}}, \quad (4.45)$$

где $t^+(X)$ определено в (3.15), а символы τ_i и $\mathcal{R}_i$ вновь относятся к точке $x = \mathbf{P}^+(X)$.

Функция $\mathcal{B}^s(X)$ однозначно определена на множестве $\tilde{\Omega}^+ = \{X: \Phi^t(X) \text{ существует } \forall t > 0\}$ и является непрерывной на подмножестве $\hat{\Omega}^+ \subset \tilde{\Omega}^+$ точек, будущие траектории которых участвуют только в регулярных столкновениях.

Неустойчивое подпространство $E_x^u \subset T_x\mathcal{M}$ имеет угол наклона

$$\mathcal{V}^u(x) = \mathcal{B}^{u-}(x) \cos \varphi + \mathcal{K} = \mathcal{B}^{u+}(x) \cos \varphi - \mathcal{K}; \quad (4.46)$$

см. определение $\mathcal{B}^{u\pm}(x)$ в (3.38) и § 3.12. Проведенный анализ показывает, что функция $\mathcal{V}^u(x)$ однозначно определена и непрерывна на множестве

$$\widehat{\mathcal{M}}^- := \mathcal{M} \setminus \cup_{n=-\infty}^0 \mathcal{S}_n \quad (4.47)$$

точек, в которых все прошлые итерации $\mathcal{F}$ являются гладкими; ср. с (2.28). Аналогично, устойчивое подпространство $E_x^s \subset T_x\mathcal{M}$ имеет угол наклона

$$\mathcal{V}^s(x) = \mathcal{B}^{s-}(x) \cos \varphi + \mathcal{K} = \mathcal{B}^{s+}(x) \cos \varphi - \mathcal{K}, \quad (4.48)$$

который однозначно определен и непрерывен на множестве

$$\widehat{\mathcal{M}}^+ := \mathcal{M} \setminus \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n \quad (4.49)$$

точек, где все будущие итерации $\mathcal{F}$ гладкие.

Заметим, что углы наклона $\mathcal{V}^u$ и $\mathcal{V}^s$ непрерывны на своих областях, но они не будут непрерывны по Гельдеру (в отличие от их аналогов в системах Аносова и аксиомы А).

В заключение этого параграфа ответим на вопрос, поднятый в § 3.12.

Предложение 4.39. *Функция $\mathcal{B}^u(X)$ интегрируема на Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя обозначение § 2.12 и соотношение (3.31), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{B}^u(X) d\mu_{\Omega} &= C \int_{\mathcal{M}} \int_0^{\tau(x)} \frac{1}{t + 1/\mathcal{B}^{u+}(x)} dt d\mu = \\ &= C \int_{\mathcal{M}} \ln[1 + \tau(x)\mathcal{B}^{u+}(x)] d\mu \leq \\ &\leq C \int_{\mathcal{M}} \ln[1 + \tau(x)] d\mu + C \int_{\mathcal{M}} \ln[1 + \mathcal{B}^{u+}(x)] d\mu, \end{aligned}$$

где $C > 0$ — постоянная. Первый интеграл конечен, так как функция $\tau(x)$ интегрируема (§ 2.13). Второй интеграл равен

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}} \ln[1 + \mathcal{R}(x) + \mathcal{B}^{u-}(x)] d\mu \leq \\ &\leq \int_{\mathcal{M}} \ln[1 + \mathcal{R}(x)] d\mu + \int_{\mathcal{M}} \ln[1 + \mathcal{B}^{u-}(x)] d\mu. \end{aligned}$$

Первый интеграл здесь конечен, так как $\int |\ln \cos \varphi| d\mu < \infty$ (см. (3.8)), а для второго интеграла заметим, что $\mathcal{B}^{u-}(x) \leq 1/\tau_{-1}(x)$. Таким образом,

$$\int_{\mathcal{M}} \ln[1 + \mathcal{B}^{u-}(x)] d\mu \leq \int_{\mathcal{M}} \ln[1 + \tau_{-1}(x)] d\mu + \int_{\mathcal{M}} |\ln \tau_{-1}(x)| d\mu,$$

где первый интеграл справа конечен (см. выше), а второй интеграл конечен согласно упражнению 2.43. ■

4.8. Особенности (локальный анализ)

Исследуем множество особенностей $\mathcal{S}_n$ отображения $\mathcal{F}^n$, $n \in \mathbb{Z}$; вспомним соответствующие определения (2.19), (2.20) и (2.27).

УПРАЖНЕНИЕ 4.40. Используйте инволюцию (§ 2.14), чтобы показать, что если $x = (r, \varphi) \in \mathcal{S}_n$, то $(r, -\varphi) \in \mathcal{S}_{-n}$.

Эта симметрия позволяет ограничиться случаем $n < 0$; то есть рассмотреть особенности прошлых итераций отображения $\mathcal{F}$.

Предложение 4.41. Для любого $n < 0$ множество $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{S}_0$ состоит из C^1 -гладких неустойчивых кривых $S \subset \mathcal{M}$ (то есть касательная к S в любой точке $x \in S$ лежит в неустойчивом конусе $\widehat{C}_x^u$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить это утверждение для $n = -1$, а затем использовать инвариантность конусов (§ 4.4). Любая кривая $S \subset \mathcal{S}_{-1} \setminus \mathcal{S}_0$ образуется из траекторий или (i) появляющихся из скользящих столкновений, или (ii) выходящих из углов; см. рис. 4.8. Оба типа траекторий, очевидно, образуют рассеивающиеся фронты волны, когда они сталкиваются с $\partial\mathcal{D}$ и образуют кривую S . Прообразы этих рассеивающихся фронтов волны фокусируются на предыдущем столкновении, которое будет или скользящим столкновением или появляться в углу.

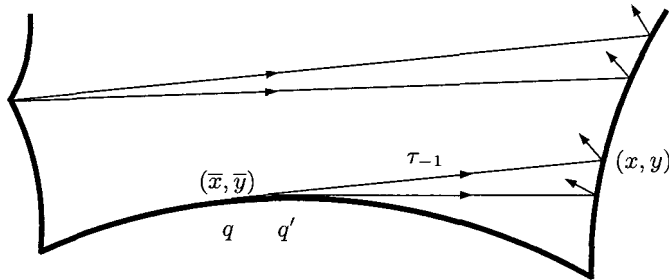


Рис. 4.8. Траектории, образующие множество $\mathcal{S}_{-1}$

Фокусировка в угловой точке очевидна, поэтому докажем, что фокусировка также происходит при скользящем столкновении. Рассмотрим две близко лежащие точки q и $q' = q + dq$ на стенке, на которой происходят скользящие столкновения; см. рис. 4.8. Тогда соответствующие векторы скорости (которые в этом случае будут касательными к $\partial\mathcal{D}$) — назовем их v и $v' = v + dv$ — отличаются на $\|dv\| \sim \mathcal{K}\|dq\|$. С другой стороны, расстояние от точки q до прямой $q' + tv'$, $t \in \mathbb{R}$, имеет порядок $\mathcal{O}(\|dq\|^2)$; а точнее, оно равно $\frac{1}{2}\mathcal{K}\|dq\|^2 + o(\|dq\|^2)$. Следовательно, соответствующее расстояние между прямыми $q + tv$ и $q' + tv'$ вдоль ортогонального сечения этого семейства скользящих траекторий также равно $\|dq\|_{\perp} = \mathcal{O}(\|dq\|^2)$. Таким образом,

$$\mathcal{B} = \lim_{\|dq\| \rightarrow 0} \|dv\|/\|dq\|_{\perp} = \infty.$$

Итак, каждая кривая $S \subset \mathcal{S}_{-1} \setminus \mathcal{S}_0$ соответствует фронту волны, прообраз которого фокусируется при предыдущем столкновении. Следовательно, когда фронт волны приближается к столкновению в точке $x = (r, \varphi) \in S \subset \mathcal{S}_{-1} \setminus \mathcal{S}_0$, он имеет угол наклона $\mathcal{B} = 1/\tau_{-1}$, так что угол наклона кривой S с учетом (3.39) равен

$$\mathcal{V} = d\varphi/dr = \mathcal{K} + \cos \varphi / \tau_{-1}, \quad (4.50)$$

где $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$ и $\tau_{-1} = \tau_{-1}(x)$. Предложение 4.41 доказано. ■

Усилим предыдущее предложение, показав, что угол наклона кривых разрыва $S \subset \mathcal{S}_{-n} \setminus \mathcal{S}_{-(n+1)}$ стремится при увеличении n к углу наклона неустойчивого пространства E_x^u в близлежащих точках x .

Предложение 4.42. Пусть $\mathcal{D}$ — бильярд категории A , B , C или D . Тогда существует последовательность $\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ такая, что для любой кривой $S \subset \mathcal{S}_{-n} \setminus \mathcal{S}_{-(n-1)}$ и любой точки $y \in S$ существует открытая окрестность $U_{y,n} \subset \mathcal{M}$ такая, что угол наклона $\mathcal{V}_y(S)$ кривой S в точке y удовлетворяет неравенству

$$\sup_{x \in U_y} |\mathcal{V}_x^u - \mathcal{V}_y(S)| < \beta_n.$$

(Очевидно, супремум здесь выбирается по $x \in U_{y,n}$, где $\mathcal{V}_x^u$ определено. Такие точки описываются в § 4.7.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть t_{-n} обозначает время n -го столкновения в прошлом. Легко проверить, что $|t_{-n}| > an - b$, где $a, b > 0$ — постоянные (действительно, для бильярдов категорий A и B можно выбрать $a = b = \tau_{\min}$, а для бильярдов категорий C и D см. упражнение 2.18). Далее полагаем $\beta_n = 1/(an - b)$, и тогда наше предложение следует из следствия 4.37. ■

Грубо говоря, предложение 4.42 утверждает, что кривые разрыва $S \subset \mathcal{S}_{-n} \setminus \mathcal{S}_{-(n-1)}$ выравниваются с неустойчивым подпространством E^u с ростом n . Это свойство называется *выравниванием линий разрыва*.

Предложение 4.43. В бильярдах категорий A и B каждая кривая $S \subset \mathcal{S}_{-n} \setminus \mathcal{S}_0$, $n \geq 1$, является $C^{\ell-1}$ -гладкой с ограниченными производными (с точностью до конечных точек). Более того, для каждого $\nu = 1, \dots, \ell - 1$ ν -ая производная равномерно ограничена постоянной $C_\nu(\mathcal{D}) > 0$, независимой от n , и кривой $S \subset \mathcal{S}_{-n} \setminus \mathcal{S}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать это предположение для $n = 1$, а затем воспользоваться результатами § 4.5. В (4.50) функция $\mathcal{K} = \mathcal{K}(r)$ является $C^{\ell-2}$ -гладкой и имеет равномерно ограниченные производные. Следовательно, достаточно доказать, что функция $\tau_{-1} = \tau_{-1}(r)$ будет $C^{\ell-2}$ -гладкой с равномерно ограниченными производными; здесь $\tau_{-1}(r) = \tau_{-1}(r, \varphi_S(r))$ — это функция τ_{-1} , ограниченная кривой S . В действительности докажем даже более широкое утверждение.

Лемма 4.44. *Функция $\tau_{-1}(r)$ вдоль каждой кривой $S \subset \mathcal{S}_{-1} \setminus \mathcal{S}_0$ является $C^{\ell-1}$ -гладкой и имеет равномерно ограниченные производные с точностью до концевых точек S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки $(r, \varphi) \in S$ обозначим через $(\bar{r}, \bar{\varphi}) = \mathcal{F}^{-1}(r, \varphi)$ ее прообраз, где $\bar{\varphi} = \pm\pi/2$. Таким образом, $\bar{r}$ есть функция от r . Пусть пара (x, y) обозначает декартовы координаты точки $\pi_q(r, \varphi)$, а $(\bar{x}, \bar{y})$ — координаты точки $\pi_q(\bar{r}, \bar{\varphi})$; см. рис. 4.8. Заметим, что

$$\tau_{-1}^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2, \quad (4.51)$$

и напомним, что x и y есть C^ℓ -гладкие функции от r (§ 2.1) и, аналогичным образом, что $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — это C^ℓ -гладкие функции от $\bar{r}$. Итак, достаточно доказать, что $\bar{r}$ — это $C^{\ell-1}$ функция от r . Пусть $(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}}) = (d\bar{x}/d\bar{r}, d\bar{y}/d\bar{r})$ — единичный касательный вектор к $\partial\mathcal{D}$ в точке $(\bar{x}, \bar{y})$. Заметим, что вектор $(x - \bar{x}, y - \bar{y})$ параллелен вектору $(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}})$; следовательно,

$$(x - \bar{x})\dot{\bar{y}} = (y - \bar{y})\dot{\bar{x}}.$$

Непосредственным дифференцированием получим

$$\frac{d\bar{r}}{dr} = \frac{\dot{\bar{x}}\dot{\bar{y}} - \dot{\bar{y}}\dot{\bar{x}}}{(x - \bar{x})\ddot{\bar{y}} - (y - \bar{y})\ddot{\bar{x}}}. \quad (4.52)$$

Это соотношение также может быть получено из (2.26). Заметим, что $\bar{n} = (\ddot{\bar{x}}, \ddot{\bar{y}})$ — нормальный вектор в точке $(\bar{x}, \bar{y})$, а $\|\bar{n}\| = \bar{\mathcal{K}}$ — кривизна $\partial\mathcal{D}$ в той же самой точке. Следовательно, абсолютная величина знаменателя в (4.52) равна $\bar{\mathcal{K}}\tau_{-1} \geq \mathcal{K}_{\min}\tau_{\min} > 0$, то есть она отделена от нуля. Лемма 4.44 следует из теоремы о неявной функции. Заметим, что данное доказательство работает для бильярдов с горизонтом и без него.

Итак, лемма 4.44 и предложение 4.43 доказаны. ■

4.9. Особенности (глобальный анализ)

Предложение 4.45. Для рассеивающих билиардов с конечным горизонтом (категории A , C и E) множество $S_{-1} \setminus S_0$ состоит из конечного числа компактных² гладких неустойчивых (возрастающих) кривых, а множество $S_1 \setminus S_0$ состоит из конечного числа компактных гладких устойчивых (убывающих) кривых.

Для билиардов без горизонта (категории B , D и F) тоже справедливо это утверждение, но в этом случае число таких кривых может быть бесконечным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кривые $S_{-1} \setminus S_0$ — это следы, оставляемые на M конечным числом рассеивающихся фронтов волны (исходящих из угловых точек и образованных скользящими столкновениями со стенками). Далее можно применить результаты § 4.5, в частности упражнение 4.25. ■

УПРАЖНЕНИЕ 4.46. Показать, что предложение 4.45 распространяется без изменений на множества $S_{-n} \setminus S_0$ и $S_n \setminus S_0$ для всех $n \geq 1$. Указание: использовать индукцию по n и последнее предложение из замечания 4.27.

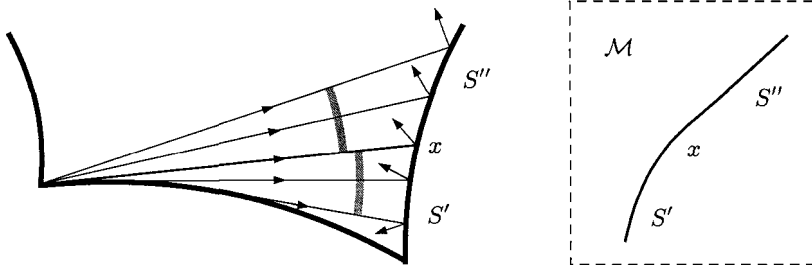


Рис. 4.9. Соединение двух кривых разрыва

Несложно проверить, что каждая гладкая кривая $S \subset S_n \setminus S_0$ заканчивается на $S_0 = \partial M$ или на другой гладкой кривой $\tilde{S} \subset S_n \setminus S_0$. Например, на рис. 4.9 показана кривая $S' \subset S_{-1} \setminus S_0$ типа (i) (порожденная скользящими столкновениями), заканчивающаяся на кривой $S'' \subset S_{-1} \setminus S_0$ типа (ii) (выходящей из угловой точки). Заметим, что кривые S' и S'' имеют общую концевую точку x (и, кроме того, общую касательную с углом наклона $\mathcal{V} = \mathcal{K} + \cos \phi / \tau^{-1}(x)$ в точке x , но их кривизны в x могут отличаться).

²Точнее, компактными будут их замыкания; исключение S_0 лишает некоторые кривые в S_{-1} своих концевых точек.

На рис. 4.10 показана кривая $S' \subset S_{-1} \setminus S_0$ типа (i), которая порождается скользящими столкновениями с рассеивателем 1 и заканчивается на другой, более длинной кривой $S'' \subset S_{-1} \setminus S_0$ типа (i), которая порождается скользящими столкновениями с рассеивателем 2. Заметим, что S' заканчивается на внутренней точке x кривой S'' и кривые пересекаются трансверсально.

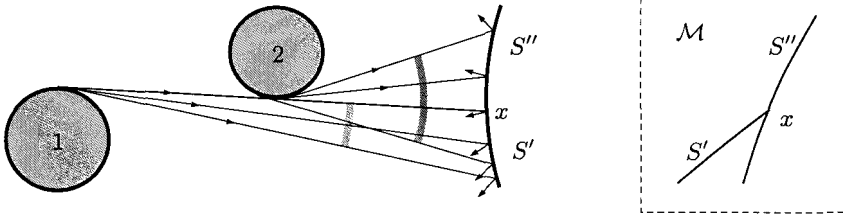


Рис. 4.10. Другое соединение двух кривых разрыва

Предложение 4.47. Для любого $n \neq 0$ каждая кривая $S \subset S_n \setminus S_0$ является частью некоторой монотонной непрерывной (и кусочно-гладкой) кривой $\tilde{S} \subset S_n \setminus S_0$, которая заканчивается на $S_0 = \partial M$ (кривая $\tilde{S}$ монотонно возрастает при $n < 0$ и монотонно убывает при $n > 0$).

Таким образом, можно продолжить каждую гладкую кривую $S \subset S_n \setminus S_0$ монотонно с точностью до естественной границы M . Это свойство часто называется *продолжением линий разрыва*.

УПРАЖНЕНИЕ 4.48. Доказать предложение 4.47. Указание: непосредственно проверить случаи $n = \pm 1$ (два возможных случая показаны на рис. 4.9 и 4.10; остальные случаи подобны) и затем использовать индукцию по n .

УПРАЖНЕНИЕ 4.49. Показать, что для каждого $n', n'' \geq 0$ множество $M \setminus (S_{-n'} \cup S_{n''})$ будет конечным или счетным объединением таких открытых областей с кусочно-гладкими границами (криволинейные многоугольники), что внутренние углы, образованные их компонентами границы, не превышают π (то есть эти многоугольники «выпуклые», поскольку речь идет о внутренних углах). Некоторые внутренние углы могут равняться нулю; см. ниже.

Типичная структура кривых разрыва показана на рис. 4.11. Заметим симметрию, установленную в упражнении 4.40.

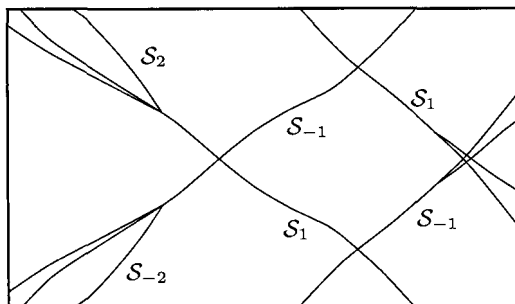


Рис. 4.11. Кривые разрыва

Для билиардов категорий А и В каждая кривая $S \subset S_1 \setminus S_0$ состоит из траекторий, которые начинаются на стенке Γ_i и образуют скользящее столкновение со стенкой Γ_j ; см. рис. 4.12. (Возможен случай, когда $j = i$ (это происходит, если $\mathcal{D} \subsetneq \text{Tor}^2$) и когда траектории, выходящие из Γ_i , проходят вокруг тора и возвращаются обратно в Γ_i .)

Кривая S отделяет фазовые точки $x \in \mathcal{M}$, траектории которых ударяют Γ_j (почти по касательной), от точек, траектории которых проходят мимо Γ_j (они проходят вблизи). Таким образом, одна сторона S отображается с помощью $\mathcal{F}$ в окрестность $\mathcal{F}(S) \subset S_0$, а затем в одностороннюю окрестность кривой $S' = \mathcal{F}^2(S) \subset S_{-1} \setminus S_0$. Точки на другой стороне S отображаются непосредственно в *другую* одностороннюю окрестность S' ; см. диаграмму на рис. 4.13.

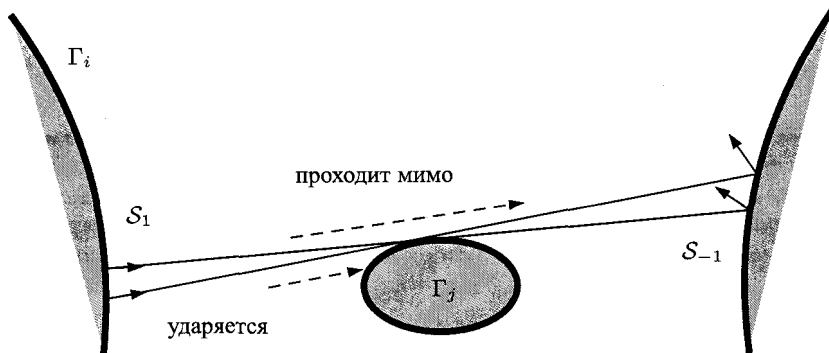
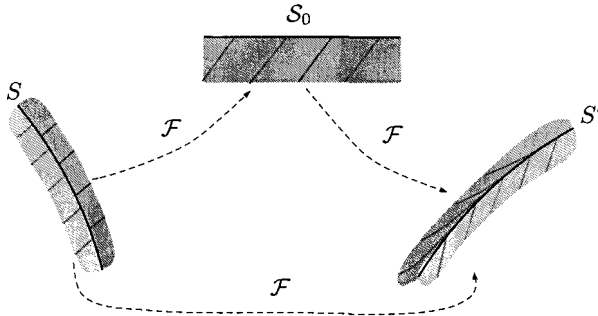


Рис. 4.12. Особенности и близлежащие траектории

Рис. 4.13. Действие $\mathcal{F}$ вблизи особенностей

Первая сторона S испытывает сильнейшее растяжение. Неустойчивые кривые длины ε , заканчивающиеся на S (темно-серые штрихи на рис. 4.13), отображаются в неустойчивые кривые длины $\sim \sqrt{\varepsilon}$, заканчивающиеся на S_0 , а затем — в неустойчивые кривые длины $\sim \sqrt{\varepsilon}$, заканчивающиеся на S' . Последние кривые являются в действительности касательными к S' и лежат на расстоянии $\sim \varepsilon$ от S' . Все это можно выяснить непосредственной проверкой, которая остается на совести читателя.

УПРАЖНЕНИЕ 4.50. Пусть $W \subset \mathcal{M}$ — неустойчивая кривая. Показать, что $|\mathcal{F}(W)| \leq C\sqrt{|W|}$, где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — постоянная.

На другой стороне от S растяжение умеренное: неустойчивые кривые длины ε , заканчивающиеся на S (светло-серые штрихи на рис. 4.13), отображаются в неустойчивые кривые длины $\sim \varepsilon$, заканчивающиеся на S' . Последние кривые образуют положительные углы с S' в своих конечных точках.

4.10. Особенности для билиардных столов типа В

В билиярдах категории В (без горизонта) множество особенностей $\mathcal{S}_{-1}$ состоит из бесконечного числа гладких кривых, которые и будут кратко описаны в этом параграфе. Они концентрируются в точках $x \in \mathcal{M}$, вблизи которых функция $\tau_{-1}(x)$ не ограничена.

УПРАЖНЕНИЕ 4.51. Показать, что существует только конечное число точек $x_k = (r_k, \varphi_k) \in \mathcal{M}$, $1 \leq k \leq k_{\max}$, таких, что

$$\limsup_{x \rightarrow x_k} \tau_{-1}(x) = \infty.$$

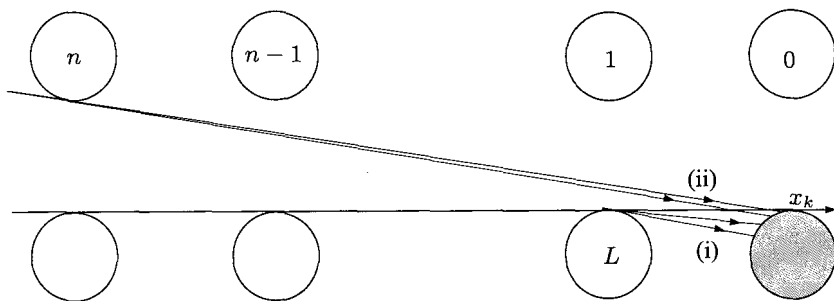


Рис. 4.14. Точка x_k , в которой концентрируются кривые разрыва

Это точки, траектории которых являются периодическими (замкнутые геодезические) на торе; ср. с упражнением 2.15. Заметим, что $\varphi_k = \pm\pi/2$ в любой такой точке.

Для бильярдного стола на рис. 2.4 рассмотрим точку $x_k = (r_k, \pi/2) \in \mathcal{M}$, траектория которой является горизонтальной линией; см. рис. 4.14. В окрестности этой точки множество S_{-1} образовано кривыми двух типов: (i) порожденными скользящими столкновениями с ближайшим рассеивателем, обозначенным L , слева в том же самом ряду и (ii) приходящими из удаленных рассеивателей слева в верхнем ряду (рис. 4.14).

Для данного стола есть только одна кривая типа (i), которую обозначим $S_{k,0}^-$, выходящая из x_k вниз в $\mathcal{M}$; см. рис. 4.15 (справа). Кривых типа (ii) бесконечно много; они проходят почти параллельно кривой $S_{k,0}^-$, на которой они заканчиваются (другая конечная точка лежит на верхней границе $\varphi = \pi/2$). Если занумеровать рассеиватели в верхнем ряду, как показано на рис. 4.14, то в соответствии с этими номерами можно обозначить кривые типа (ii): кривая, порожденная скользящими столкновениями с n -ым рассеивателем, обозначена $S_{k,n}^-$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.52. Показать, что длина $S_{k,n}^-$ равна $|S_{k,n}^-| \sim 1/\sqrt{n}$, расстояние между верхней конечной точкой $S_{k,n}^-$ и предельной точкой x_k равно $\sim 1/n$, а расстояние между $S_{k,n}^-$ и $S_{k,n+1}^-$ равно $\sim 1/n^2$, как указано на рис. 4.15 (справа). Здесь запись $\sim 1/n^a$, $a > 0$, обозначает $= c/n^a + o(1/n^a)$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторой постоянной $c = c(k, D) > 0$.

Аналогичный анализ показывает, что множество S_1 состоит из бесконечного множества кривых, сконцентрированных вблизи тех же самых

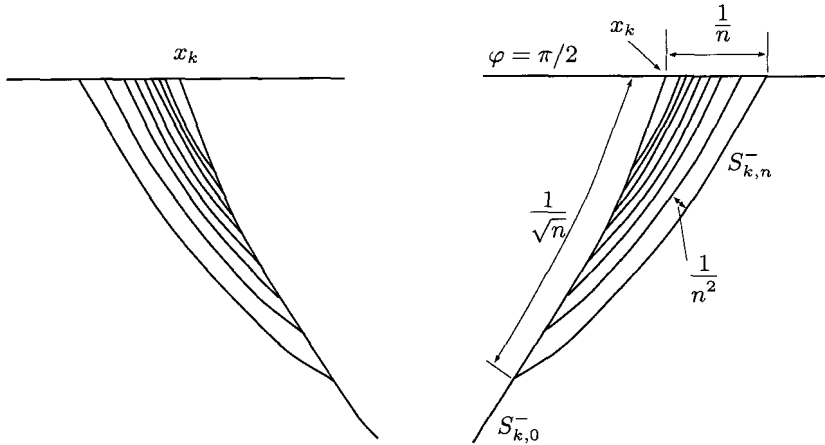


Рис. 4.15. Кривые разрыва (неограниченный горизонт): S_1 слева, S_{-1} справа

точек $x_k \in \mathcal{M}$, $1 \leq k \leq k_{\max}$. Кривые S_1 вблизи x_k можно получить отражением кривых S_{-1} от вертикальной линии $r = r_k$ (которая проходит через x_k); см. рис. 4.15 (слева). (Заметим, что левая и правая части рис. 4.15 должны быть наложены одна на другую, чтобы получилась правильная картина.) Обозначим результирующие кривые через $S_{k,0}^+$ и $S_{k,n}^+$ соответственно.

Далее, пусть $D_{k,n}^-$ — это область, ограниченная кривыми $S_{k,n}^-$, $S_{k,n-1}^-$, $S_{k,0}^-$ и верхней границей $\varphi = \pi/2$. (Эта область в литературе иногда называется n -ячейкой. Она заполнена всеми траекториями, идущими непосредственно от n -го рассеивателя; см. рис. 4.14.) Аналогично, n -ячейка $D_{k,n}^+$ по определению является областью, ограниченной кривыми $S_{k,n}^+$, $S_{k,n-1}^+$, $S_{k,0}^+$ и ребром $\varphi = \pi/2$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.53. Показать, что $\mathcal{F}^{-1}(D_{k,n}^-) = D_{k',n}^+$ для некоторого $1 \leq k' \leq k_{\max}$; то есть «положительные» n -ячейки преобразуются в «отрицательные» n -ячейки с помощью $\mathcal{F}$; см. рис. 4.16.

УПРАЖНЕНИЕ 4.54. Пусть $dx \in \mathcal{T}_x \mathcal{M}$ — неустойчивый касательный вектор в точке $x \in D_{k,n}^+$. Доказать, что $\|D_x \mathcal{F}(dx)\|_p / \|dx\|_p \geq \text{const } n^{3/2}$, а также, что $\|D_x \mathcal{F}(dx)\| / \|dx\| \geq \text{const } n^{3/2}$. То есть коэффициент растяжения в n -ячейках (в обеих метриках) растет (взрывается) при $n \rightarrow \infty$. Указание: используйте (4.16) и (4.20) и тот факт, что $\tau(x) \geq \text{const } n$.

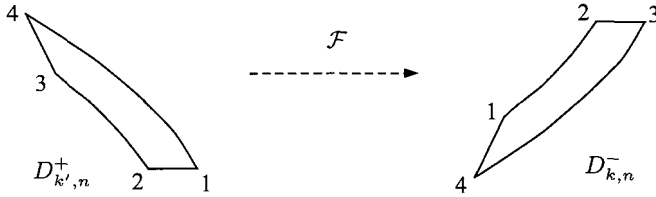


Рис. 4.16. Отображение $\mathcal{F}$ преобразует n -ячейки. Углы $D_{k',n}^+$ и их соответствующие образы занумерованы и показывают действие $\mathcal{F}$

Этим утверждением закончим короткое описание кривых разрыва для билиардов категории В; дальнейшие подробности заинтересованный читатель может найти в [BSC90, BSC91, Ch99].

4.11. Устойчивые и неустойчивые многообразия

Рассмотрим множества точек

$$S_\infty = \bigcup_{n=0}^\infty S_n \quad \text{и} \quad S_{-\infty} = \bigcup_{n=0}^\infty S_{-n}, \quad (4.53)$$

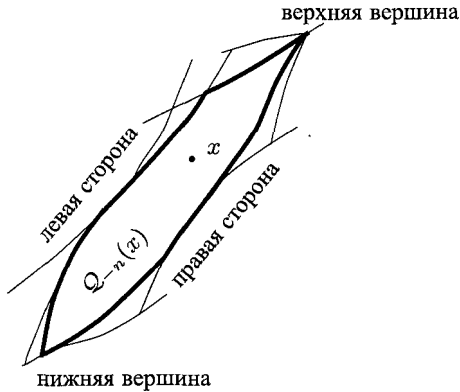
в которых *некоторая будущая* и, соответственно, *некоторая прошлая* итерация $\mathcal{F}$ разрывна.

Лемма 4.55. *Оба множества S_∞ и $S_{-\infty}$ плотные в $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, например, что множество S_∞ не плотное. В этом случае существовала бы неустойчивая кривая $W \subset \mathcal{M} \setminus S_\infty$ и ее образы $\mathcal{F}^n(W)$ росли экспоненциально быстро с ростом n , не проходя при этом через разрывы и не заканчиваясь, так что рано или поздно они бы вышли за естественные границы $\mathcal{M}$ благодаря (4.14), что невозможно. ■

Заметим, что S_∞ — это счетное объединение гладких устойчивых кривых и границы $\partial\mathcal{M}$, тогда как $S_{-\infty}$ — это счетное объединение гладких неустойчивых кривых плюс $\partial\mathcal{M}$. Для каждого $M_i \subset \mathcal{M}$ (ср. с (2.17)) множества $M_i \cap S_\infty$ и $M_i \cap S_{-\infty}$ линейно связные; ср. с предложением 4.47.

С другой стороны, множество $\mathcal{M} \setminus S_{-\infty}$ имеет полную меру μ , но оно сильно несвязное. Проанализируем его связные компоненты. Пусть $x \in \mathcal{M} \setminus S_{-\infty}$ и для любого $n \geq 1$ обозначим через $\mathcal{Q}_{-n}(x)$ связную компоненту открытого множества $\mathcal{M} \setminus S_{-n}$, которое содержит x . Напомним, что $\mathcal{Q}_{-n}(x)$ — это криволинейный многоугольник с внутренними углами $\leq \pi$ (упражнение 4.49).

Рис. 4.17. Связная компонента $Q_{-n}(x)$

УПРАЖНЕНИЕ 4.56. Показать, что $\partial Q_{-n}(x)$ состоит из двух монотонно возрастающих (и кусочно-гладких) кривых, концевые точки которых — верхняя и нижняя вершины $Q_{-n}(x)$; см. рис. 4.17. Будем называть эти кривые левыми и правыми сторонами и обозначим их через $\partial^L Q_{-n}(x)$ и $\partial^R Q_{-n}(x)$ соответственно.

Очевидно, $Q_{-n}(x) \supseteq Q_{-(n+1)}(x)$ для всех $n \geq 1$, а пересечение их замыканий

$$\widetilde{W}^u(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{Q_{-n}(x)}$$

есть замкнутая непрерывная монотонно возрастающая кривая. Обозначим через $W^u(x)$ кривую $\widetilde{W}^u(x)$ без своих концевых точек.

Лемма 4.57. *Справедливо соотношение $W^u(x) \subset \bigcap_{n \geq 1} Q_{-n}(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что некоторая точка $y \in W^u(x)$ принадлежит кривой разрыва $S \subset \partial Q_{-n}(x)$ для конечного значения $n \geq 1$. Без потери общности предположим, что $S \subset \partial^L Q_{-n}(x)$. Тогда y также предельная точка для последовательности кривых $S'_{-m} \subset \partial^R Q_{-m}(x)$. Так как $S \subset S_{-n}$ для конечного n , кривая S имеет угол наклона в y , отличный от предельного угла наклона кривых S'_{-m} (напомним предложение 4.42). Это приводит к противоречию. См. также предложение 4.47 и упражнение 4.49. ■

УПРАЖНЕНИЕ 4.58. Доказать, что в каждой точке $y \in W^u(x)$ угол наклона кривой $W^u(x)$ равен $\mathcal{V}^u(y)$. Указание: использовать непрерывность $\mathcal{V}^u(y)$ (ср. с (4.46)) и предложение 4.42.

Заметим, что $\mathcal{F}^{-n}(W^u(x)) \subset \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_\infty$ — это неустойчивая кривая для каждого $n \geq 1$. Пусть $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{M}$ — линейный отрезок (в координатах r, φ), соединяющий концевые точки $\mathcal{F}^{-n}(W^u(x))$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.59. Показать, что $\mathcal{L}_n \cap \mathcal{S}_n = \emptyset$. (Указание: заметить, что $\mathcal{F}^{-n}(W^u(x)) \cap \mathcal{S}_n = \emptyset$ и использовать предложение 4.47.) Затем показать, что неустойчивые кривые $\mathcal{F}^n(\mathcal{L}_n)$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к $W^u(x)$ в метрике C^0 .

Неустойчивые кривые $\mathcal{F}^n(\mathcal{L}_n)$, $n \geq 1$, являются $C^{\ell-1}$ -гладкими, и все их $\ell - 1$ производные равномерно ограничены; см. предложение 4.29.

Лемма 4.60. Пусть $f_n(t)$, $n \geq 1$ — такие C^q -гладкие функции на интервале (a, b) , что $|f_n^{(\nu)}(t)| \leq C = \text{const}$ для всех $n \geq 1$, $1 \leq \nu \leq q$ и $t \in (a, b)$. Предположим, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ для всех $a < t < b$. Тогда функция $f(t)$ по меньшей мере C^{q-1} -гладкая, $f_n^{(\nu)}(t) \rightarrow f^{(\nu)}(t)$ и $|f^{(\nu)}(t)| \leq C$ для всех $1 \leq \nu \leq q - 1$ и $t \in (a, b)$. Более того, $f^{(q-1)}(t)$ — это липшицева непрерывная функция с постоянной C ; то есть $|f^{(q-1)}(t) - f^{(q-1)}(t')| \leq C|t - t'|$.

Доказательство леммы остается читателю в качестве упражнения.

Следствие 4.61. Кривая $W^u(x)$ является $C^{\ell-2}$ -гладкой, все ее производные порядка $\ell - 2$ ограничены постоянной, не зависящей от x , а $(\ell - 2)$ -ая производная — это липшицева непрерывная функция с липшицевой постоянной, не зависящей от x .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.62. Можно показать, что почти для всех $x \in \mathcal{M}$ кривая $W^u(x)$ в действительности является $C^{\ell-1}$ -гладкой, но это требует отдельного доказательства; см., например, теорему 6.1 в [KS86, часть I].

Напомним, что $\mathcal{F}^{-n}(W^u(x)) \subset \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_\infty$ есть неустойчивая кривая для всех $n \geq 1$. Из равномерной гиперболичности $\mathcal{F}$ (см. § 4.4) следует, что

$$|\mathcal{F}^{-n}(W^u(x))| \leq C\Lambda^{-n}|W^u(x)| \quad \forall n \geq 1;$$

следовательно, прообразы $W^u(x)$ стягиваются экспоненциально быстро.

Все построения имеют аналоги для обратного хода времени; см. замечание 4.16. В частности, для любой точки $x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_\infty$ получим устойчивую кривую $W^s(x)$, которая удовлетворяет неравенству

$$|\mathcal{F}^n(W^s(x))| \leq C\Lambda^{-n}|W^s(x)| \quad \forall n \geq 1.$$

Определение 4.63. Гладкая кривая $W^u \subset \mathcal{M}$ называется *неустойчивым многообразием*, если отображение $\mathcal{F}^{-n}$ гладкое на W^u для любого $n \geq 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{F}^{-n}(W^u)| = 0.$$

Аналогично, гладкая кривая $W^s \subset \mathcal{M}$ называется *устойчивым многообразием*, если отображение $\mathcal{F}^n$ гладкое на W^s для любого $n \geq 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{F}^n(W^s)| = 0.$$

Анализ показывает, что $W^u(x)$ и $W^s(x)$ являются соответственно максимальным неустойчивым и устойчивым многообразиями, проходящими через x , и сходимость в определении выше в действительности экспоненциальная. Многообразия также имеют следующее свойство инвариантности.

УПРАЖНЕНИЕ 4.64. Доказать, что $W^u(x) \supseteq \mathcal{F}^{-k}[W^u(\mathcal{F}^k x)]$ для всех $k \geq 1$. В соответствии с этим $\mathcal{F}^k(W^u(x))$ — это объединение нескольких неустойчивых многообразий.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.65. Устойчивые и неустойчивые многообразия были впервые построены для гладких равномерно гиперболических диффеоморфизмов, а их графики были получены с помощью последовательных аппроксимаций и принципа сжимающих отображений (этот метод появился благодаря Адамару [Had01]). Это построение было расширено на гладкие неравномерно гиперболические отображения Песиным [Pes76, Pes77a] и на гиперболические отображения с особенностями Катка и Стрельциным [KS86, теорема 6.1]. Здесь будет представлено альтернативное построение, в котором кривые разрыва играют ключевую роль. Такой подход имеет два преимущества: он дает равномерные оценки на производные и позволяет непосредственно оценить размер неустойчивых многообразий; см. следующий параграф.

4.12. Размер неустойчивых многообразий

Пусть $W \subset \mathcal{M}$ — гладкая неустойчивая (или устойчивая) кривая. Любая точка $x \in W$ делит W на два отрезка; обозначим через $r_W(x)$ длину (в евклидовой метрике) более короткого отрезка. Для краткости обозначим $r^u(x) := r_{W^u(x)}(x)$. В случае если $W^u(x) = \emptyset$, то полагаем $r^u(x) = 0$. Очевидно, $r^u(x)$ характеризует размер $W^u(x)$.

Теорема 4.66. $W^u(x)$ существует (то есть $r^u(x) > 0$) почти для всех $x \in \mathcal{M}$. Кроме того,

$$\mu\{x: r^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon \quad (4.54)$$

для некоторой постоянной $C = C(\mathcal{D}) > 0$ и всех $\varepsilon > 0$.

Существование $W^u(x)$ следует из общей теории гиперболических отображений с особенностями [KS86, теорема 6.1], но оценка (4.54) характерна только для билиардов. Теория гарантирует только, что $\mu\{x: r^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon^a$ для некоторого $a > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки $x \in \mathcal{M}$ обозначим через $d^u(x, \mathcal{S}_1)$ длину кратчайшей неустойчивой кривой, которая соединяет x с множеством $\mathcal{S}_1$.

Лемма 4.67. Для любого $x \in \mathcal{M}$

$$r^u(x) \geq \min_{n \geq 1} \widehat{c} \Lambda^n d^u(\mathcal{F}^{-n}x, \mathcal{S}_1), \quad (4.55)$$

где $\widehat{c} = \widehat{c}(\mathcal{D}) > 0$ — это постоянная из (4.19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предположить, что $x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-\infty}$. Обозначим через $x_{-n} = \mathcal{F}^{-n}(x)$ для $n \geq 1$, и вновь пусть $\mathcal{Q}_{-n}(x)$ — связанная компонента $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-n}$, содержащая точку x . Очевидно, $\mathcal{Q}_{-n}(x_{-n}) = \mathcal{F}^{-n}(\mathcal{Q}_{-n}(x))$ — это связанная компонента $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_n$, содержащая точку x_{-n} .

Пусть W'_{-n} — произвольная неустойчивая кривая, проходящая через x_{-n} и заканчивающаяся на противоположных сторонах $\mathcal{Q}_{-n}(x_{-n})$; см. рис. 4.18. Тогда $W' = \mathcal{F}^n(W'_{-n})$ — неустойчивая кривая, проходящая через x и заканчивающаяся на $\partial \mathcal{Q}_{-n}(x)$. Эта кривая делится точкой x на два отрезка; обозначим через W более короткий из отрезков. Пусть $W_{-m} = \mathcal{F}^{-m}(W)$ для всех $m \geq 1$.

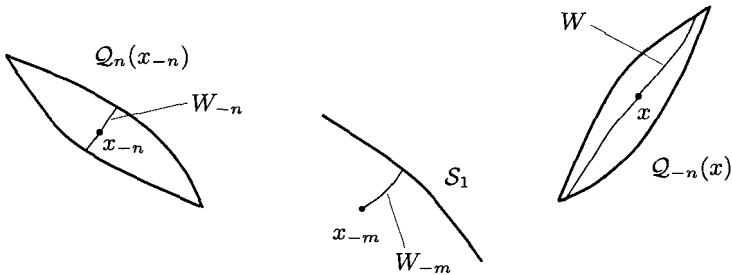


Рис. 4.18. Доказательство леммы 4.67

Так как W_{-n} заканчивается на $\mathcal{S}_n$, существует такое $m \in [1, n]$, что W_{-m} соединяет x_{-m} с $\mathcal{S}_1$. Благодаря равномерной гиперболичности $\mathcal{F}$ (см. (4.19)) имеем

$$r_{W'}(x) = |W| \geq \widehat{c} \Lambda^m |W_{-m}| \geq \widehat{c} \Lambda^m d^u(\mathcal{F}^{-m}x, \mathcal{S}_1).$$

Так как это справедливо для всех $n \geq 1$, лемма доказана. $\blacksquare$

Далее, выберем $\widehat{\Lambda} \in (1, \Lambda)$ и заметим, что

$$r^u(x) \geq r_*^u(x) := \min_{n \geq 1} \widehat{c} \widehat{\Lambda}^n d^u(\mathcal{F}^{-n}x, \mathcal{S}_1)$$

(ниже будем предполагать, что $\widehat{\Lambda} < \Lambda$).

Итак, если $r^u(x) = 0$, то $r_*^u(x) = 0$; то есть полутраектория x в прошлом стремится к множеству особенностей $\mathcal{S}_1$ быстрее, чем экспоненциальная функция $\widehat{\Lambda}^{-n}$. Используя лемму Бореля–Кантелли, покажем, что это происходит с нулевой вероятностью.

Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{S}_1)$ ε -окрестность множества $\mathcal{S}_1$, и пусть

$$\mathcal{U}_\varepsilon^u(\mathcal{S}_1) = \{x: d^u(x, \mathcal{S}_1) < \varepsilon\}$$

(это тип ε -окрестности $\mathcal{S}_1$, измеренной вдоль неустойчивых кривых). С учетом (4.14) $\mathcal{U}_\varepsilon^u(\mathcal{S}_1) \subset \mathcal{U}_{D\varepsilon}(\mathcal{S}_1)$ для некоторой постоянной $D > 0$ (так как множество $\mathcal{S}_1$ состоит из монотонно убывающих кривых и горизонтальных линий); следовательно,

$$\mu(\mathcal{U}_\varepsilon^u(\mathcal{S}_1)) < C\varepsilon \quad (4.56)$$

для некоторого $C > 0$ и всех $\varepsilon > 0$.

Далее покажем, что $r_*^u(x) > 0$ почти для всех точек $x \in \mathcal{M}$ по мере μ . Пусть

$$B_n := \mathcal{F}^n(\mathcal{U}_{\widehat{\Lambda}^{-n}}^u(\mathcal{S}_1)) = \{x: d^u(\mathcal{F}^{-n}(x), \mathcal{S}_1) \leq \widehat{\Lambda}^{-n}\}.$$

Из инвариантности меры μ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathcal{U}_{\widehat{\Lambda}^{-n}}^u(\mathcal{S}_1)) < \infty.$$

Обозначим через $B = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} B_n$ множество точек, которые принадлежат бесконечному числу B_n . Из леммы Бореля–Кантелли следует, что $\mu(B) = 0$, и легко проверить, что $r_*^u(x) > 0$ для любого $x \in \mathcal{M} \setminus B$.

Лемма 4.68. Для некоторой постоянной $C = C(\mathcal{D}) > 0$ и всех $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\mu\{x: r_*^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $r_*^u(x) < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{F}^n(\mathcal{U}_{\varepsilon\hat{C}^{-1}\hat{\Lambda}^{-n}}^u(S_1))$ для некоторого $n \geq 1$. Из (4.56) следует нужный нам результат. ■

Это завершает доказательство теоремы 4.66. ■

Заметим: $x \in \mathcal{F}^n(\mathcal{U}_{\varepsilon\hat{C}^{-1}\hat{\Lambda}^{-n}}^u(S_1))$ означает, что x лежит в окрестности S_{-n} . Следовательно, точки x , для которых $r_*^u(x) < \varepsilon$ (то есть где неустойчивые многообразия могут быть короткими), сконцентрированы в окрестностях кривых разрыва S_{-n} , главным образом с малым n (так как мера точек, соответствующих большим n , экспоненциально мала).

4.13. Дополнительные факты о неустойчивых многообразиях

В предыдущем параграфе использовалась евклидова метрика, но похожие результаты выполняются и в p -метрике, как будет описано ниже.

Любая гладкая кривая $W \subset \mathcal{M}$ делится любой точкой $x \in W$ на два отрезка; обозначим через $p_W(x)$ p -длину (см. § 3.10) более короткого отрезка. Полагаем $p^u(x) = p_{W^u(x)}(x)$.

Теорема 4.69. Для некоторой постоянной $C = C(\mathcal{D}) > 0$ и всех $\varepsilon > 0$ имеем $\mu\{x: p^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $d_p^u(y, S_1)$ p -длину кратчайшей неустойчивой кривой, которая соединяет точку y с множеством S_1 . Проводя доказательство по аналогии с доказательством леммы 4.67, получим

$$p^u(x) \geq \min_{n \geq 1} \Lambda^n d_p^u(\mathcal{F}^{-n}x, S_1). \quad (4.57)$$

Выберем $\hat{\Lambda} \in (1, \Lambda)$ и заметим, что

$$p^u(x) \geq p_*^u(x) = \min_{n \geq 1} \hat{\Lambda}^n d^u(\mathcal{F}^{-n}x, S_1).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ пусть

$$\mathcal{U}_{p,\varepsilon}^u(S_1) = \{x: d_p^u(x, S_1) < \varepsilon\}.$$

Далее докажем аналог (4.56).

Лемма 4.70. *Справедливо неравенство*

$$\mu(\mathcal{U}_{p,\varepsilon}^u(S_1)) < C\varepsilon, \quad (4.58)$$

где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — постоянная.

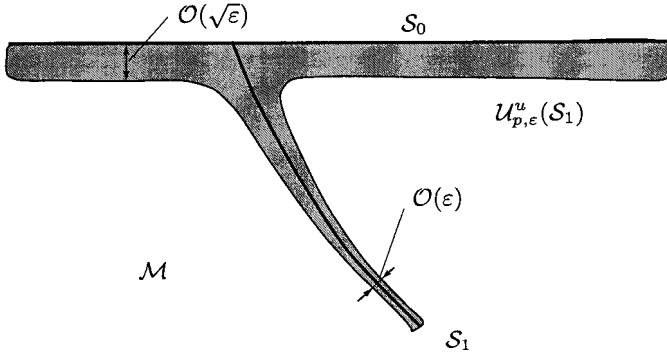


Рис. 4.19. Множество $\mathcal{U}_{p,\varepsilon}^u(S_1)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что S_1 состоит из $S_0 = \partial M$ и конечного числа гладких устойчивых кривых. Множество $\mathcal{U}_{p,\varepsilon}^u(S_1)$ показано на рис. 4.19; оно становится толще при $\cos \varphi \rightarrow 0$ и имеет ширину $\sim \sqrt{\varepsilon}$ вблизи S_0 . Данное множество можно расслоить однопараметрическим семейством гладких неустойчивых кривых W_α , где $\alpha \in \mathfrak{A}$ — это параметр такой, что $|W_\alpha|_p \leq 2\varepsilon$. Тогда

$$\mu(\mathcal{U}_{p,\varepsilon}^u(S_1)) = \int_{\mathfrak{A}} \left(\int_{W_\alpha} \cos \varphi \, dm_\alpha \right) d\mu^f,$$

где dm_α — это одномерная мера Лебега на W_α , а $d\mu^f$ — это фактор-мера (читатель, незнакомый с измеримыми разбиениями и фактор-мерами может обратиться к приложению А). Внутренний интеграл $\leq \text{const } \varepsilon$ для любого W_α , так как $\cos \varphi \, dm \asymp \cos \varphi \, dr = dp$ (элемент р-длины), и $|W_\alpha|_p \leq 2\varepsilon$. Фактор-мера, очевидно, конечна, а ее масса ограничена постоянной, не зависящей от ε . ■

Заметим, что $p_*^u(x) < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{F}^n(\mathcal{U}_{p, \varepsilon \hat{\Lambda}^{-n}}^u(S_1))$ для некоторого $n \geq 1$. Теперь из (4.58) следует, что

$$\mu\{x: p_*^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon$$

для некоторой постоянной $C = C(\mathcal{D}) > 0$ и всех $\varepsilon > 0$. Теорема 4.69 доказана. $\blacksquare$

Далее представим еще несколько фактов о неустойчивых многообразиях.

Пусть $\{x_m\}$ — последовательность точек в $\mathcal{M}$, сходящихся к точке $y \in \mathcal{S}_{-\infty}$ при $m \rightarrow \infty$. Легко увидеть, что $r^u(x_m) \rightarrow 0$. Следовательно, произвольно короткие неустойчивые многообразия будут плотными в $\mathcal{M}$: для любого $\varepsilon > 0$ и любого открытого множества $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ имеем $\mu\{x \in \mathcal{U}: r^u(x) < \varepsilon\} > 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.71. Показать, что если последовательность неустойчивых многообразий $\{W_m^u\}$ сходится при $m \rightarrow \infty$ к кривой W (в C^0 -метрике), то кривая W (взятая без своих концевых точек) сама является неустойчивым многообразием. Указание: заметим, что $W \cap \mathcal{S}_{-1} = \emptyset$, тогда, используя индукцию по n , можно доказать, что $\mathcal{F}^{-n}(W_m^u) \rightarrow \mathcal{F}^{-n}(W)$; следовательно, $\mathcal{F}^{-n}(W) \cap \mathcal{S}_{-1} = \emptyset$ для всех $n \geq 1$.

Далее рассмотрим концевые точки неустойчивого многообразия $W^u(x)$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.72. Показать, что если $r_*^u(x) > 0$, то $r_*^u(y) > 0$ для всех $y \in W^u(x)$. (Указание: заметим, что $|\mathcal{F}^{-n}(W^u(x))| \leq \hat{c}\Lambda^{-n}$ и $\hat{\Lambda} < \Lambda$.)

Затем заметим, что если y является концевой точкой $W^u(x)$, то или $r_*^u(y) > 0$, или $y \in \mathcal{S}_{-\infty}$. Однако неравенство $r_*^u(y) > 0$ невозможно, так как в этом случае $W^u(x)$ может быть расширено за пределы точки y . Следовательно, $y \in \mathcal{S}_{-\infty}$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.73. Показать, что почти для всех $x \in \mathcal{M}$ (по мере μ) обе концевые точки $W^u(x)$ принадлежат $\mathcal{S}_{-\infty}$. (Используйте предыдущее упражнение.)

Заметим, что никакие два неустойчивых многообразия не могут пересекать друг друга, но они могут иметь общую концевую точку (которая лежит на кривой разрыва).

Определение 4.74. Для любого $x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-\infty}$ глобальным неустойчивым многообразием называется многообразие

$$GW^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}^n(W^u(\mathcal{F}^{-n}x)).$$

Глобальное неустойчивое многообразие для типичной точки x — это счетное объединение локальных неустойчивых многообразий, некоторые из которых могут иметь общие концевые точки.

4.14. Расширение на бильярдные столы типа В

В рассеивающих бильярдах категории В множество особенностей S_1 состоит из бесконечного числа кривых (ср. § 4.10), общая длина которых бесконечна. Несмотря на это, оценки теорем 4.66 и 4.69 по-прежнему выполняются.

Теорема 4.75. *Для бильярдных столов категории В имеем*

$$\mu\{x: r^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon, \quad (4.59)$$

$$\mu\{x: p^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon \quad (4.60)$$

для некоторой постоянной $C = C(\mathcal{D}) > 0$ и всех $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уточним доказательства предыдущих параграфов, поскольку оценки (4.56) и (4.58), как уже говорилось, не действуют для столов категории В.

УПРАЖНЕНИЕ 4.76. Проверить, что мера $\mu(\mathcal{U}_\varepsilon^u(S_1)) \sim \varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ и мера $\mu(\mathcal{U}_{p,\varepsilon}^u(S_1)) \sim \varepsilon^{4/5}$. Следовательно, обе меры $\gg \varepsilon$.

Будем использовать обозначения и результаты § 4.10. Пусть $E_u(x)$ — кусочно-постоянная функция на $\mathcal{M}$, определенная следующим образом: $E_u(x) = n^{3/2}$ для всех $x \in D_{k,n}^+$, где $1 \leq k \leq k_{\max}$ и $n \geq 1$, и $E_u(x) = 1$ для всех других точек в $\mathcal{M}$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.77. Доказать, что существует малая постоянная $\tilde{c} = \tilde{c}(\mathcal{D}) > 0$ такая, что $\tilde{c}E_u(x)$ будет нижней границей коэффициента растяжения неустойчивых векторов $dx \in \mathcal{T}_x\mathcal{M}$ для всех $x \in \mathcal{M}$, то есть $\|D_x\mathcal{F}(dx)\| \geq \tilde{c}E_u(x)\|dx\|$. Указание: используйте (4.19) и упражнение 4.54.

Теперь (4.55) можно преобразовать следующим образом:

$$r^u(x) \geq \min_{n \geq 1} \tilde{c}E_u(\mathcal{F}^{-n}x) \hat{c}\Lambda^{n-1} d^u(\mathcal{F}^{-n}x, S_1). \quad (4.61)$$

Очевидно, можно повторить доказательство леммы 4.67 со следующей модификацией:

$$|W| = |W_{-m}| \frac{|W_{-m+1}|}{|W_{-m}|} \frac{|W|}{|W_{-m+1}|} \geq \tilde{c}E_u(x_{-m}) \hat{c}\Lambda^{m-1}|W_{-m}|;$$

тогда получим (4.61). Как и ранее, выберем $\widehat{\Lambda} \in (1, \Lambda)$ и заметим, что

$$r^u(x) \geq \widehat{r}_*^u(x) = \min_{n \geq 1} \widehat{c} \widehat{c} E_u(\mathcal{F}^{-n}x) \widehat{\Lambda}^{n-1} d^u(\mathcal{F}^{-n}x, \mathcal{S}_1).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ пусть

$$\widetilde{\mathcal{U}}_\varepsilon^u(\mathcal{S}_1) = \{x: E_u(x) d^u(x, \mathcal{S}_1) < \varepsilon\}.$$

Обратите внимание, что $\widehat{r}_*^u(x) < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{F}^n(\widetilde{\mathcal{U}}_{\varepsilon \widehat{c}^{-1} \widehat{c}^{-1} \widehat{\Lambda}^{-n+1}}^u(\mathcal{S}_1))$ для некоторого $n \geq 1$. Таким образом, чтобы доказать (4.59), достаточно вывести следующий аналог (4.56):

$$\mu(\widetilde{\mathcal{U}}_\varepsilon^u(\mathcal{S}_1)) < C\varepsilon \quad (4.62)$$

для некоторой постоянной $C > 0$ и всех $\varepsilon > 0$. Для любого $n \geq 1$ и $1 \leq k \leq k_{\max}$ множество $D_{k,n}^+ \cap \widetilde{\mathcal{U}}_\varepsilon^u(\mathcal{S}_1)$ лежит внутри $\mathcal{O}(n^{-3/2}\varepsilon)$ -окрестности границы $\partial D_{n,k}^+$. Так как длина последней равна $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ (см. упражнение 4.52), получим

$$\mu(D_{k,n}^+ \cap \widetilde{\mathcal{U}}_\varepsilon^u(\mathcal{S}_1)) < \text{const } n^{-5/2}\varepsilon \quad (4.63)$$

(дополнительный множитель перед $n^{-1/2}$ появляется из плотности $\cos \varphi = \mathcal{O}(n^{-1/2})$ меры μ на $D_{k,n}^+$). Обозначим

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \setminus \bigcup_{k,n} D_{k,n}^+.$$

Так как общая длина линий разрыва $\mathcal{S}_1$ внутри множества $\mathcal{M}_0$ конечна, то

$$\mu(\mathcal{M}_0 \cap \widetilde{\mathcal{U}}_\varepsilon^u(\mathcal{S}_1)) < \text{const } \varepsilon.$$

Складывая эти оценки, получим (4.62) и, следовательно, (4.59).

Доказательство (4.60) проходит аналогично, но с некоторыми изменениями. Функция $E_u(x)$ определена таким же образом, как и ранее, и $\widehat{c}E_u(x)$ вновь будет нижней оценкой для коэффициента растяжения неустойчивых векторов, как следствие упражнения 4.54. Теперь (4.57) можно изменить следующим образом:

$$p^u(x) \geq \min_{n \geq 1} \widehat{c}E_u(\mathcal{F}^{-n}x) \Lambda^{n-1} d_p^u(\mathcal{F}^{-n}x, \mathcal{S}_1).$$

Оставим проверку читателю. Вновь выберем $\widehat{\Lambda} \in (1, \Lambda)$ и заметим, что

$$p^u(x) \geq \widetilde{p}_*^u(x) = \min_{n \geq 1} \widetilde{c} E_u(\mathcal{F}^{-n}x) \widehat{\Lambda}^{n-1} d_p^u(\mathcal{F}^{-n}x, \mathcal{S}_1).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ полагаем

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{p,\varepsilon}^u(\mathcal{S}_1) = \{x: E_u(x) d_p^u(x, \mathcal{S}_1) < \varepsilon\}.$$

Обратите внимание, что $\widetilde{p}_*^u(x) < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{F}^n(\widetilde{\mathcal{U}}_{p,\varepsilon \widetilde{c}^{-1} \widehat{\Lambda}^{-n+1}}^u(\mathcal{S}_1))$ для некоторого $n \geq 1$. Таким образом, чтобы доказать (4.60), достаточно вывести следующий аналог (4.58):

$$\mu(\widetilde{\mathcal{U}}_{p,\varepsilon}^u(\mathcal{S}_1)) < C\varepsilon \quad (4.64)$$

для некоторой постоянной $C > 0$ и всех $\varepsilon > 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.78. Показать, что для всех $1 \leq k \leq k_{\max}$ и $n \geq 1$

$$\mu(D_{k,n}^+ \cap \widetilde{\mathcal{U}}_{p,\varepsilon}^u(\mathcal{S}_1)) < \text{const } n^{-2} \varepsilon.$$

Указание: использовать метод доказательства леммы 4.70.

С другой стороны,

$$\mu(\mathcal{M}_0 \cap \widetilde{\mathcal{U}}_{p,\varepsilon}^u(\mathcal{S}_1)) < \text{const } \varepsilon;$$

данную оценку можно получить так же, как при доказательстве леммы 4.70. Сложение этих оценок дает (4.64) и, следовательно, (4.60). $\blacksquare$

ГЛАВА 5

Динамика неустойчивых многообразий

Эта глава посвящена трем фундаментальным свойствам устойчивых и неустойчивых многообразий в рассеивающих билиярдах, известным как *ограничения на искажения* (*distortion bounds*), *абсолютная непрерывность* и *лемма о росте*. Эти свойства появляются, тем или иным образом, во всех серьезных исследованиях билиардной динамики (чаще всего при доказательстве эргодичности и оценок для корреляции; последние существенны для центральной предельной теоремы и многих приложений в физике).

Эти свойства в простейшей форме были доказаны в работе Сина [Sin70], а в последующих исследованиях они были существенно улучшены и переработаны. В этой главе представим их современные версии в самой полной и универсальной форме.

Заметим, что подобные свойства были доказаны для многих других классов равномерно гиперболических систем (с особенностями или без); см. ссылки на литературу ниже. Однако в билиярдах эти свойства требуют специального построения («однородных» неустойчивых многообразий; см. § 5.4), и доказать их достаточно трудно. Их доказательство является, возможно, наиболее технической частью нашей теории, но они же дают мощные инструменты для получения перспективных результатов.

Обсуждение этой главы ограничивается (как и в предыдущей главе) рассеивающими билиярдами главной категории А. Отдельные замечания приводятся для категории В. Обобщение на другие категории требует существенной технической работы и здесь не проводится.

5.1. Измеримое разбиение на неустойчивые многообразия

Определим два важных разбиения пространства столкновений $\mathcal{M}$. Как обычно, разбиение ξ — это совокупность $\{C_\alpha\}$, состоящая из непересекающихся подмножеств $C_\alpha \subset \mathcal{M}$ таких, что $\cup_\alpha C_\alpha = \mathcal{M}$; обозначим через $\xi(x)$ единственный элемент ξ , содержащий точку $x \in \mathcal{M}$.

Пусть ξ^u — разбиение $\mathcal{M}$ на неустойчивые многообразия. Точнее, для любой точки $x \in \mathcal{M}$ полагаем $\xi^u(x) = W^u(x)$, если последнее не пусто, и $\xi^u(x) = \{x\}$ — в ином случае. Заметим, что если y — концевая точка $W^u(x)$, то $W^u(y) = \emptyset$; следовательно, $\xi^u(y) = \{y\}$.

Важно, что ξ^u — это измеримое разбиение $\mathcal{M}$. Измеримые разбиения обладают многими полезными свойствами; в частности, на их элементах можно ввести угловые меры. Важные определения и факты см. в приложении А.

Чтобы доказать, что ξ^u — это измеримое разбиение, для него необходимо построить счетное множество образующих $\{B_m\}_{m=1}^\infty$; вновь см. приложение А. Рассмотрим счетную совокупность множеств $\underline{Q}_{-n}(x)$, определенную в § 4.11 для всех $x \in \mathcal{M}$ и $n \geq 1$, и их замыкания $\overline{Q}_{-n}(x)$. Обозначим эту совокупность через $\{B_m\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Проверить, что $\{B_m\}$ действительно является множеством образующих для разбиения ξ^u . Необходимо проверить два свойства. Во-первых, для каждого элемента $C \in \xi^u$ и каждого B_m показать, что или $C \subset B_m$, или $C \cap B_m = \emptyset$. Затем для всех пар несовпадающих элементов $C_1 \neq C_2$ разбиения ξ^u найти B_m такое, что $C_1 \subset B_m$ и $C_2 \cap B_m = \emptyset$, или наоборот.

Так как разбиение ξ^u измеримо, можно применить операции, определенные на разбиениях из приложений А и С. Во-первых, образ $\xi_n^u = \{\mathcal{F}^n(C) : C \in \xi^u\}$ — это измеримое разбиение $\mathcal{M}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Во-вторых, разбиение $\xi_{n_1}^u$ более мелкое, чем $\xi_{n_2}^u$ для любого $n_1 < n_2$ (напомним упражнение 4.64); то есть последовательность разбиений $\{\xi_n^u\}$ убывает:

$$\dots \succ \xi_{-n}^u \succ \dots \succ \xi_{-1}^u \succ \xi_0^u \succ \xi_1^u \succ \dots \succ \xi_n^u \succ \dots \quad (5.1)$$

Далее опишем их объединение $\bigvee_{n=-\infty}^\infty \xi_n^u$ и пересечение $\bigwedge_{n=-\infty}^\infty \xi_n^u$; см. приложение А. Поскольку диаметр $\mathcal{F}^{-n}(W^u)$ сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то

$$\bigvee_{n=-\infty}^\infty \xi_n^u = \varepsilon, \quad (5.2)$$

где ε обозначает разбиение $\mathcal{M}$ на отдельные точки.

С пересечением $\pi^u = \bigwedge_{n=-\infty}^\infty \xi_n^u$ работать сложнее, так как его нельзя построить «поэлементно». Действительно, образы $\mathcal{F}^n(W^u)$ неустойчивых многообразий растут при $n \rightarrow \infty$ и сходятся к глобальному неустойчивому многообразию GW^u (см. определение 4.74), но разбиение $\mathcal{M}$ на глобальные неустойчивые многообразия не измеримо.

Поскольку разбиение π^u не используется в данной книге, обсудим его лишь кратко. Оно связано с так называемым разбиением Пинскера $\pi(\mathcal{F})$, которое является объединением всех конечных разбиений с нулевой энтропией; см. приложение С. Из (5.1) и (5.2) следует, что $\pi^u \succcurlyeq \pi(\mathcal{F})$; см. приложение С. Кроме того, для некоторых классов гиперболических отображений, включая гиперболические билиарды, справедливо тождество $\pi^u = \pi(\mathcal{F}) \pmod{0}$ (см. [Sin66, Pes77b]), так что π^u совпадает с разбиением Пинскера. Из эргодической теории известно, что автоморфизм является К-перемешивающим тогда и только тогда, когда его разбиение Пинскера тривиально; то есть если его элементы имеют меру 0 или 1; см. приложение С. В главе 6 будет доказано, что отображение $\mathcal{F}$ действительно является К-перемешивающим; следовательно, его разбиение Пинскера тривиально. Таким образом, π^u в действительности тривиальное разбиение.

Благодаря обратимости времени (см. замечание 4.16) разбиение ξ^s пространства $\mathcal{M}$ на устойчивые многообразия имеет аналогичные свойства. В частности, его образы $\xi_n^s = \mathcal{F}^n \xi^s$ образуют возрастающую последовательность

$$\dots \preccurlyeq \xi_{-n}^s \preccurlyeq \dots \preccurlyeq \xi_{-1}^s \preccurlyeq \xi_0^s \preccurlyeq \xi_1^s \preccurlyeq \dots \preccurlyeq \xi_n^s \preccurlyeq \dots,$$

их объединение $\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n^s = \varepsilon$ и пересечение $\pi^s = \bigwedge_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n^s$ имеют свойства, подобные свойствам π^u .

5.2. u-SRB плотности

Из измеримости разбиения ξ^u следует существование угловых мер на его элементах, порожденных мерой μ ; см. приложение А. В этом параграфе опишем эти меры.

Введем удобные обозначения. Для любой точки $x \in W$, взятой на любой неустойчивой (или устойчивой) кривой $W \subset \mathcal{M}$, обозначим через

$$\mathcal{J}_W \mathcal{F}^n(x) = \frac{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|}{\|dx\|} \quad (5.3)$$

якобиан сужения отображения $\mathcal{F}^n$ на одномерную кривую W в точке x в евклидовой метрике (здесь dx обозначает ненулевой касательный вектор к кривой W в x).

Теорема 5.2. *Почти для всех $x \in \mathcal{M}$ угловая мера $\nu_{W^u(x)}$ на неустойчивом многообразии $W = W^u(x)$ абсолютно непрерывна относительно*

меры Лебега на W^u , а ее плотность $\rho_W(y)$ есть $C^{\ell-2}$ -гладкая функция, удовлетворяющая

$$\frac{\rho_W(y)}{\rho_W(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{I}_W \mathcal{F}^{-n}(y)}{\mathcal{I}_W \mathcal{F}^{-n}(z)} \quad (5.4)$$

для любых $y, z \in W$ (заметим, что это соотношение определяет плотность ρ_W на W с точностью до постоянного множителя, но, поскольку мера ν_W должна быть вероятностной, величина ρ_W полностью определяется условием $\int_W \rho_W(x) dx = 1$).

Гладкие угловые меры на неустойчивых многообразиях с такими свойствами были впервые построены Синаем в 1968 году [Sin68a] (для диффеоморфизмов Аносова), а к настоящему моменту все вышеперечисленные факты доказаны для больших классов гиперболических отображений и стали стандартными в эргодической теории. Однако полные доказательства достаточно сложны, чтобы приводить их здесь; полное описание читатель может найти в [Sin68a] и [PeS82, теорема 3] (аналогичное доказательство также приводится в [Led84, предложение 3.1]). Гладкость плотностей условного распределения (для диффеоморфизмов Аносова) была установлена в [Ll92, следствие 4.4].

Приведем здесь только полувыверстический правдоподобный набросок, объясняющий (но не доказывающий) данную теорему. Существование предела (5.4) и $C^{\ell-2}$ -гладкость ρ_W будут доказаны сразу после предложения 5.4.

Если бы неустойчивые многообразия были параллельными линиями (как в примере в приложении А, проиллюстрированном на рис. А.1), то плотность $\nu_{W^u(x)}$ была бы пропорциональна плотности μ , если последняя ограничена $W^u(x)$. Чтобы это наблюдение работало в нашем случае, применим $\mathcal{F}^{-n}$ и воспользуемся инвариантностью меры.

Выберем большое $n \gg 1$ и рассмотрим все неустойчивые многообразия $W^u \subset \mathcal{Q}_{-2n}(x)$. Очевидно, кривые $W^u \subset \mathcal{Q}_{-2n}(x)$ не являются ни параллельными, ни прямолинейными, так как функция $\mathcal{V}^u(x)$ непостоянна. Однако кривые $W_n^u := \mathcal{F}^{-n}(W^u)$ оказываются достаточно близки к тому, чтобы быть параллельными и прямолинейными в следующем смысле.

Заметим, что

$$W_n^u \subset \mathcal{Q}_{-n,n} := \mathcal{Q}_{-n}(\mathcal{F}^{-n}x) \cap \mathcal{Q}_n(\mathcal{F}^{-n}x),$$

где $\mathcal{Q}_n(\mathcal{F}^{-n}x)$ — это связные компоненты $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_n$, содержащие точку $\mathcal{F}^{-n}(x)$. Диаметр области $\mathcal{Q}_{-n,n}$ меньше, чем $C\Lambda^{-n}$, где $C > 0$ — это максимальный размер устойчивых и неустойчивых кривых, так что каждая

кривая будет почти прямолинейной (так как кривизна неустойчивых многообразий равномерно ограничена). Кроме того, поскольку отображение $\mathcal{F}^{-n}$ гладкое на $\mathcal{Q}_{-n,n}$, осцилляцию функции $\mathcal{B}^u$ на $\mathcal{Q}_{-n,n}$ можно сделать произвольно малой, выбирая достаточно большое n ; см. § 4.7. В этом смысле все кривые $W_n^u \subset \mathcal{Q}_{-n,n}$ почти параллельны.

Теперь меру μ на $\mathcal{Q}_{-n,n}$ можно хорошо аппроксимировать мерой, условные распределения которой на W_n^u равномерны. Внесем эту аппроксимирующую меру под $\mathcal{F}^n$ и получим аппроксимацию меры μ на $\mathcal{Q}_{-2n}(x)$, условные распределения которой на $W^u \subset \mathcal{Q}_{-2n}(x)$ имеют плотности $\rho_{W^u,n}$, удовлетворяющие соотношению

$$\frac{\rho_{W^u,n}(y)}{\rho_{W^u,n}(z)} = \frac{\mathcal{J}_{W^u} \mathcal{F}^{-n}(y)}{\mathcal{J}_{W^u} \mathcal{F}^{-n}(z)}$$

для любого $y, z \in W^u$. Переход к пределу $n \rightarrow \infty$ дает нужный результат.

Определение 5.3. Для любого неустойчивого многообразия $W \subset \mathcal{M}$ единственная плотность вероятности ρ_W , удовлетворяющая (5.4), называется *u-SRB плотностью*, а соответствующая вероятностная мера ν_W называется *u-SRB мерой* (или иногда *u-мерой Гиббса*).

Аббревиатура SRB введена в честь Синая, Рюэлля и Боуэна, в работах которых [Sin68a, Ru76, Bow75] была впервые исследована эта мера. u-SRB меры удовлетворяют следующему свойству инвариантности.

Предложение 5.4. Пусть $W \subset \mathcal{M}$ — неустойчивое многообразие и $\mathcal{F}(W) = \cup_i W_i$ — его образ, который является конечным или счетным объединением неустойчивых многообразий W_i . Тогда образ $\mathcal{F}(\nu_W)$ меры ν_W , условной на каждом W_i , совпадает с ν_{W_i} .

Доказательство оставим в качестве упражнения. Указание: используйте (5.4).

Проверим, что предел (5.4) существует по крайней мере для типичных неустойчивых многообразий. Переход к логарифму и использование правила дифференцирования сложной функции сводит задачу к исследованию сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(y_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(z_n) \right), \quad (5.5)$$

где $W_n = \mathcal{F}^{-n}(W)$ и $y_n = \mathcal{F}^{-n}(y)$ (то же самое для z_n).

Чтобы описать сужение неустойчивых многообразий под действием обратного отображения $\mathcal{F}^{-1}$, выберем $x \in W$ и обозначим $x_n = \mathcal{F}^{-n}(x)$. Тогда, используя результаты и обозначения (4.18) и (3.40), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) &= \frac{1}{1 + \tau_{n+1} \mathcal{B}_{n+1}^+} \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_{n+1}} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{V}_{n+1}^2}}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}} = \\ &= \frac{\cos \varphi_n}{2\mathcal{K}_{n+1}\tau_{n+1} + \cos \varphi_{n+1}(1 + \tau_{n+1}\mathcal{B}_{n+1}^-)} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{V}_{n+1}^2}}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}}, \quad (5.6) \end{aligned}$$

где $\tau_n = \tau(x_n)$ и $\mathcal{B}_n, \mathcal{K}_n$ и т.д. берутся в точке x_n ; заметим, что здесь использовалось уравнение зеркала (3.33). Следовательно,

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) &= \ln \cos \varphi_n + \frac{1}{2} \ln(1 + \mathcal{V}_{n+1}^2) - \frac{1}{2} \ln(1 + \mathcal{V}_n^2) - \\ &\quad - \ln[2\mathcal{K}_{n+1}\tau_{n+1} + \cos \varphi_{n+1}(1 + \tau_{n+1}\mathcal{B}_{n+1}^-)]. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Благодаря равномерной гиперболичности $\mathcal{F}$ (ср. с (4.19)) $\text{dist}(y_n, z_n) \leq \leq \text{diam}(W_n) \leq \hat{C}\Lambda^{-n}$, где $\hat{C} = 1/\hat{c}$. Таким образом,

$$|\ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(y_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(z_n)| \leq \hat{C}\Lambda^{-n} \max \left| \frac{d}{dx_n} \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) \right|,$$

где максимум выбирается по всем $x_n \in W_n$ и d/dx_n обозначает производную относительно евклидовой длины на W_n (здесь не фиксируется ориентация W_n , так как используется только абсолютное значение этой производной).

Далее продифференцируем (5.7) по x_n . Соотношение (5.7) содержит функции, зависящие от x_{n+1} ; для них используются правила дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dx_n} = \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \frac{d}{dx_{n+1}} = \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) \frac{d}{dx_{n+1}}$$

(заметим также, что множитель $\mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n)$ равномерно ограничен).

Теперь напомним, что величины $\varphi, \mathcal{K}, \mathcal{B}^-$ и $\mathcal{V}$ есть $C^{\ell-2}$ -гладкие функции на неустойчивых многообразиях с равномерно ограниченными производными (ср. со следствием 4.61, замечанием 4.62 и леммой 4.30), тогда как из (4.51) вытекает, что τ_{n+1} — это C^{ℓ} -гладкая функция от x_{n+1} и x_n .

Кроме того, все выражения в правой части (5.7), за исключением первого, равномерно ограничены. Таким образом,

$$\frac{d}{dx_n} \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) = \frac{Q_n(x_n)}{\cos \varphi_n}, \quad (5.8)$$

где Q_n — это $C^{\ell-3}$ -гладкая равномерно ограниченная функция переменной x_n с равномерно ограниченными производными.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. В билиардах категории В свободный пробег τ ограничен снизу ($\tau_{\min} > 0$), но не сверху; следовательно, последний логарифмический член в (5.7) ограничен снизу, но не сверху. Однако это не приводит к серьезным затруднениям, так как производная этого члена равна

$$\frac{\tilde{Q}(x_n)}{2\mathcal{K}_{n+1}\tau_{n+1} + \cos \varphi_{n+1}(1 + \tau_{n+1}\mathcal{B}_{n+1}^-)},$$

где $\tilde{Q}(x_n)$ — гладкая равномерно ограниченная функция x_n с равномерно ограниченными производными. Знаменатель в данном случае отделен от нуля; следовательно, (5.8) также выполняется для билиардов категории В.

В билиардах категории С-Ф свободный пробег τ может быть произвольно близким к нулю. Это вызывает более серьезные сложности при получении оценок, но и для этих случаев соответствующие оценки могут быть выведены; см. [BSC91, приложение 1].

Продолжим анализ. Из (5.8) следует, что

$$|\ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(y_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(z_n)| \leq \frac{\text{const} \cdot \Lambda^{-n}}{\min_x \cos \varphi_n},$$

где минимум берется по всем $x \in W$. Для успешной работы с потенциально малым знаменателем необходимо предположить, что $\tau_*^u(x) > 0$ для некоторой точки $x \in W$ (и следовательно, для всех точек $x \in W$; см. упражнение 4.72); это предположение справедливо для типичных кривых W ; см. § 4.12. Кроме того, ограничим анализ отрезком $W[y, z] \subset W$ кривой W с концевыми точками y и z . Тогда $d^u(\mathcal{F}^{-n}x, S_1) \geq c\hat{\Lambda}^{-n}$; следовательно, $\cos \varphi_n > c\hat{\Lambda}^{-n}$ для всех $n \geq 1$ и всех $x \in W[y, z]$ и для некоторого $c = c(y, z) > 0$. Также напомним, что $\hat{\Lambda} < \Lambda$; следовательно, $\hat{\Lambda}^{-n} \gg \Lambda^{-n}$, и, таким образом,

$$\min_x \cos \varphi_n > \frac{1}{2} c\hat{\Lambda}^{-n}.$$

То есть ряд (5.5) сходится экспоненциально, а u-SRB плотность ρ_W существует.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. При доказательстве предполагалось, что $r_*^u > 0$ на W ; то есть необходимо, чтобы $\mathcal{F}^{-n}(W[y, z])$ находилось хотя бы на некотором расстоянии ($\geq \text{const } \hat{\Lambda}^{-n}$) от особенностей $\mathcal{S}_1$ и это расстояние должно быть намного больше, чем размер $\mathcal{F}^{-n}(W[y, z])$. Кроме того, предполагается, что если это не так, то есть если $\mathcal{F}^{-n}(W[y, z])$ подходит слишком часто и слишком близко к особенностям, то u -SRB плотность может не существовать.

5.3. Контроль за искажением и полосы однородности

u -SRB плотности ρ_W существуют почти на всех неустойчивых многообразиях $W \subset M$, но они могут быть очень неоднородными. Колебания ρ_W на W являются результатом неравномерного сужения прообразов $\mathcal{F}^{-n}(W)$ под действием обратного отображения $\mathcal{F}^{-1}$ (см. предыдущий параграф), и самые большие отклонения в коэффициенте сужения (наибольшие искажения неустойчивых многообразий, вызванные $\mathcal{F}^{-1}$) наблюдаются вблизи особенностей $\mathcal{S}_0 = \{\cos \varphi = 0\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.7. Используя (5.8), показать, что если одна конечная точка $\mathcal{F}^{-n}(W)$ лежит на $\mathcal{S}_0$ для некоторого $n \geq 0$, то плотность ρ_W обращается в нуль в соответствующей конечной точке W .

Для последующих исследований потребуется управлять колебаниями u -SRB плотностей ρ_W . Точнее, необходимо разделить каждое неустойчивое многообразие на части, на каждой из которых u -SRB плотность почти равномерна ($\rho_W \approx \text{const}$).

В случае равномерных гиперболических отображений без особенностей (диффеоморфизмы Аносова и аксиомы A) u -SRB плотность удовлетворяет равномерной оценке

$$\left| \frac{d}{dx} \ln \rho_W(x) \right| \leq C = \text{const}; \quad (5.9)$$

см. [LMM86, раздел 2] и [L192]. Следовательно, для всех $x, y \in W$

$$e^{-C|W|} \leq \frac{\rho_W(x)}{\rho_W(y)} \leq e^{C|W|}. \quad (5.10)$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что колебания u -SRB плотностей на δ -малых неустойчивых многообразиях ε -малы.

В случае с бильярдами нет таких роскошных условий. Как следует из (5.8) и упражнения 5.7, производная $\frac{d}{dx} \ln \rho_W(x)$ может быть не ограничена и колебания u -SRB плотности могут быть произвольно большими

на произвольно коротких неустойчивых многообразиях. Чтобы работать с такой задачей, будем делить неустойчивые многообразия на части, в которых колебания u-SRB меры будут ограниченными.

Так как наибольшие колебания происходят в окрестности $\mathcal{S}_0$, Я. Синай предложил [BSC91] делить неустойчивые многообразия счетным числом линий, параллельных $\mathcal{S}_0$ и сконцентрированных на $\mathcal{S}_0$; см. рис. 5.1. Введем определение.

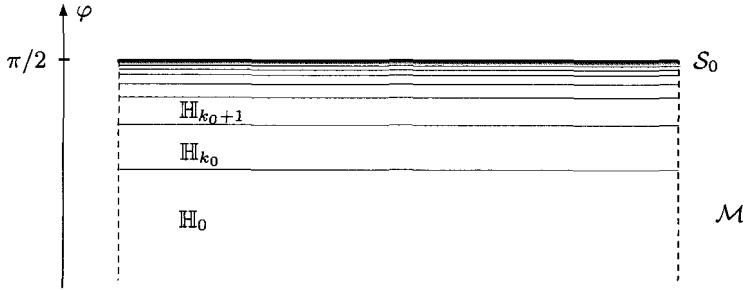


Рис. 5.1. Полосы однородности

Определение 5.8. Пусть $k_0 \geq 1$ — большая постоянная. Для каждого $k \geq k_0$ определим две *полосы однородности* $\mathbb{H}_{\pm k} \subset \mathcal{M}$

$$\mathbb{H}_k = \{(r, \varphi) : \pi/2 - k^{-2} < \varphi < \pi/2 - (k+1)^{-2}\}$$

и

$$\mathbb{H}_{-k} = \{(r, \varphi) : -\pi/2 + (k+1)^{-2} < \varphi < -\pi/2 + k^{-2}\}.$$

Пусть

$$\mathbb{H}_0 = \{(r, \varphi) : -\pi/2 + k_0^{-2} < \varphi < \pi/2 - k_0^{-2}\}. \quad (5.11)$$

Таким образом, $\mathcal{M}$ делится на полосы однородности $\mathbb{H}_k$. Обозначим через

$$\mathbb{S}_k = \{(r, \varphi) : |\varphi| = \pi/2 - k^{-2}\},$$

где $|k| \geq k_0$, границы полос однородности, и пусть

$$\mathbb{S} = \cup_{|k| \geq k_0} \mathbb{S}_k. \quad (5.12)$$

Большая постоянная $k_0 \gg 1$ будет выбрана в § 5.10 (любопытный читатель найдет ее в доказательстве леммы 5.56).

Определение 5.9. Говорят, что устойчивая или неустойчивая кривая $W \subset \mathcal{M}$ является *слабо однородной*, если W принадлежит одной полосе $\mathbb{H}_k$.

Запишем важную оценку.

Лемма 5.10. Для любой точки $x = (r, \varphi)$ на слабо однородной неустойчивой или устойчивой кривой $W \subset \mathbb{H}_k$ имеет место оценка

$$|W| \leq \text{const} (|k| + 1)^{-3} \leq \text{const} \cos^{3/2} \varphi. \quad (5.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из оценок (4.14) и определения 5.8. ■

5.4. Однородные неустойчивые многообразия

Определение 5.11. Говорят, что неустойчивое многообразие $W \subset \mathcal{M}$ является *однородным*, если $\mathcal{F}^{-n}(W)$ слабо однородное для каждого $n \geq 0$. Аналогично, устойчивое многообразие $W \subset \mathcal{M}$ называется однородным, если $\mathcal{F}^n(W)$ слабо однородное для каждого $n \geq 0$.

Для краткости назовем однородные многообразия *Н-многообразиями*.

УПРАЖНЕНИЕ 5.12. Доказать, что для заданного неустойчивого многообразия $W \subset \mathcal{M}$ связанные компоненты $W \setminus \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}^n(\mathbb{S})$ будут Н-многообразиями. Аналогично, для любого устойчивого многообразия $W \subset \mathcal{M}$ связанные компоненты $W \setminus \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}^{-n}(\mathbb{S})$ будут устойчивыми Н-многообразиями.

Таким образом, линии $\mathbb{S}_k \subset \mathbb{S}$ и их образы ведут себя как особенности. Тогда естественным будет объединить их с существующими множествами особенностей $\mathcal{S}_n$, $-\infty < n < \infty$, и работать с их объединением, как с новыми («расширенными») особенностями. Чтобы записать это в строгом виде, в [Ch99] было предложено переопределить пространство столкновений $\mathcal{M}$ следующим образом.

Определение 5.13 (новое пространство столкновений). Каждая связанная компонента старого пространства столкновений $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}$ (вспомните (2.17)) делится на счетное множество связанных полос однородности $\mathbb{H}_{i,k} := \mathcal{M}_i \cap \mathbb{H}_k$. Новое пространство столкновений $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ определяется как несвязное объединение замыканий $\mathbb{H}_{i,k}$.

Обратите внимание, что новое пространство $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ замкнуто, но более не является компактным (оно имеет счетное число связанных компонент). Также заметим, что $\partial \mathcal{M}_{\mathbb{H}} = \mathbb{S}$.

Отображение $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ естественным образом действует на новое пространство столкновений $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$; обозначим его $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}: \mathcal{M}_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{H}}$. Заметим, что $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ не определено на $\mathcal{F}^{-1}(S_0)$, так как прямая S_0 не принадлежит новому пространству столкновений. С другой стороны, каждая линия $S_k \subset \mathbb{S}$ преобразуется в две линии в $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$; таким образом, отображение $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ будет двузначным на $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{S})$ (это неудивительно, поскольку типичные бильярдные отображения и потоки многозначны в особенностях; ср. с главой 3).

УПРАЖНЕНИЕ 5.14. Показать, что отображению $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ не хватает гладкости на «расширенном» множестве особенностей $S_1 \cup \mathbb{S} \cup \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{S})$. Аналогично, отображение $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^n$ не является гладким на «расширенном» множестве особенностей

$$\mathcal{S}_{\mathbb{H}}^n := S_n \cup \left(\bigcup_{m=0}^n \mathcal{F}^{-m}(\mathbb{S}) \right). \quad (5.14)$$

Обратное отображение $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{-n}$ не будет гладким на «расширенном» множестве особенностей

$$\mathcal{S}_{-\mathbb{H}}^n := S_{-n} \cup \left(\bigcup_{m=0}^n \mathcal{F}^m(\mathbb{S}) \right). \quad (5.15)$$

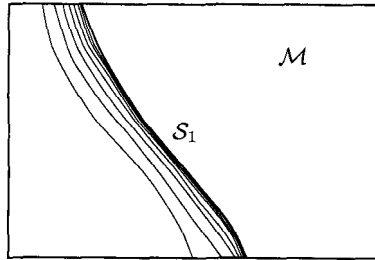


Рис. 5.2. Кривые $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{S})$, сконцентрированные на S_1

Заметим, что $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{S})$ — это счетное объединение устойчивых кривых, которые почти параллельны друг к другу и сконцентрированы на старых кривых разрыва $S_1 \setminus S_0$; см. рис. 5.2. (Заметим, что $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{S})$ сконцентрировано на одной стороне каждой кривой $S_1 \setminus S_0$ — стороне, которая отображается на окрестность S_0 ; ср. с § 4.9.) Таким образом, для каждого $n \geq 1$ множество $\mathcal{F}^{-n}(\mathbb{S})$ называется счетным объединением компактных $C^{\ell-1}$ -гладких устойчивых кривых. Аналогично, $\mathcal{F}^n(\mathbb{S})$ — это счетное объединение компактных $C^{\ell-1}$ -гладких неустойчивых кривых.

УПРАЖНЕНИЕ 5.15. Основываясь на результатах § 4.5, показать, что все $\ell - 1$ производных этих кривых равномерно ограничены.

УПРАЖНЕНИЕ 5.16. Проверить, что свойство выравнивания (§ 4.8), свойство продолжения (§ 4.9) и свойство «выпуклости» (упражнение 4.49) сохраняются для «расширенного» множества особенностей S_n^H .

Пусть $Q_{-n}^H(x)$ обозначает связную компоненту множества $M \setminus S_{-n}^H$, содержащую x . Эти новые области $Q_{-n}^H(x)$ вложены в старые области $Q_{-n}(x)$, которые использовались в § 4.11, и имеют похожую форму. Доказательства этого раздела останутся справедливыми для этих новых областей, и, следовательно, пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{Q_{-n}^H}(x)$ является замкнутой неустойчивой кривой. Пусть $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ обозначает кривую без концевых точек. Тогда $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ — это максимальное неустойчивое H -многообразие, проходящее через x .

Все факты, упомянутые в § 5.2, сохраняются для неустойчивых H -многообразий. Во-первых, разбиение $\xi_{\mathbb{H}}^u$ множества M на (максимальные) неустойчивые H -многообразия измеримо. Соответствующие угловые меры на кривых $W_{\mathbb{H}}^u$ — это u -SRB меры, плотность которых определяется (5.4).

Благодаря обратимости времени (см. замечание 4.16) устойчивые H -многообразия $W_{\mathbb{H}}^s(x)$ определяются и строятся подобным же образом. Разбиение $\xi_{\mathbb{H}}^s$ множества M на (максимальные) устойчивые H -многообразия также измеримо.

5.5. Размер H -многообразий

Анализ в предыдущем параграфе очевидно показывает, что неустойчивые (и устойчивые) H -многообразия для отображения $\mathcal{F}: M \rightarrow M$ являются неустойчивыми (соответственно устойчивыми) многообразиями для отображения $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}: M_{\mathbb{H}} \rightarrow M_{\mathbb{H}}$ на новом пространстве столкновений $M_{\mathbb{H}}$; отображение $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ имеет «больше особенностей», чем $\mathcal{F}$.

Этот факт позволяет использовать методики параграфов 4.11–4.14, чтобы оценить длину H -многообразия $W_{\mathbb{H}}^u(x)$. Обозначим через $r_{\mathbb{H}}^u(x) = r_{W_{\mathbb{H}}^u(x)}(x)$ расстояние, измеренное вдоль $W_{\mathbb{H}}^u(x)$, от x до ближайшей концевой точки $W_{\mathbb{H}}^u(x)$.

Теорема 5.17. $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ существует (то есть $r_{\mathbb{H}}^u(x) > 0$) почти для всех $x \in M$. Кроме того,

$$\mu\{x: r_{\mathbb{H}}^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon \quad (5.16)$$

для некоторой постоянной $C = C(\mathcal{D}) > 0$ и всех $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ход доказательства очень близок к доказательству (4.59) в § 4.14, поэтому некоторые шаги читателю придется проделать самостоятельно в качестве упражнений. Пусть $E_u(x)$ — кусочно-постоянная функция на $\mathcal{M}$, определенная как $E_u(x) = (|k|+1)^2$ для всех $x \in \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{H}_k)$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.18. Показать, что существует малая постоянная $\tilde{c} = \tilde{c}(D) > 0$ такая, что коэффициент растяжения неустойчивых векторов $dx \in \mathcal{T}_x \mathcal{M}$ для всех $x \in \mathcal{M}$ лежит между $\tilde{c}E_u(x)$ и $\tilde{c}^{-1}E_u(x)$, то есть

$$\tilde{c}E_u(x) \leq \frac{\|D_x \mathcal{F}(dx)\|}{\|dx\|} \leq \tilde{c}^{-1}E_u(x).$$

Указание: заметим, что если $x \in \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{H}_k)$, то $\cos \varphi \approx (|k|+1)^{-2}$ в точке $\mathcal{F}(x) \in \mathbb{H}_k$ и, используя соотношение (4.20), можно прийти к выводу, что $\|D_x \mathcal{F}(dx)\|/\|dx\| \asymp (|k|+1)^2$.

Для любой точки $x \in \mathcal{M}$ обозначим через $d^u(x, \mathcal{S}_1^{\mathbb{H}})$ длину самой короткой неустойчивой кривой, которая соединяет x с множеством $\mathcal{S}_1^{\mathbb{H}}$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.19. Адаптировать доказательство (4.61), чтобы показать, что

$$r_{\mathbb{H}}^u(x) \geq \min_{n \geq 1} \tilde{c}E_u(\mathcal{F}^{-n}x) \hat{c} \Lambda^{n-1} d^u(\mathcal{F}^{-n}x, \mathcal{S}_1^{\mathbb{H}}).$$

Выберем $\hat{\Lambda} \in (1, \Lambda)$ и заметим, что

$$r_{\mathbb{H}}^u(x) \geq r_{\mathbb{H}*}^u(x) := \min_{n \geq 1} \tilde{c} \hat{c} E_u(\mathcal{F}^{-n}x) \hat{\Lambda}^{n-1} d^u(\mathcal{F}^{-n}x, \mathcal{S}_1^{\mathbb{H}}).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ пусть

$$\mathcal{U}_{\varepsilon}^u(\mathcal{S}_1^{\mathbb{H}}) = \{x: E_u(x) d^u(x, \mathcal{S}_1^{\mathbb{H}}) < \varepsilon\}.$$

Заметим, что $r_{\mathbb{H}*}^u(x) < \varepsilon$ в том, и только в том случае, когда $x \in \mathcal{F}^n(\mathcal{U}_{\varepsilon \tilde{c}^{-1} \hat{c}^{-1} \hat{\Lambda}^{-n+1}}^u(\mathcal{S}_1^{\mathbb{H}}))$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.20. Адаптировать доказательство (4.62), чтобы показать, что $\mu(\mathcal{U}_{\varepsilon}^u(\mathcal{S}_1^{\mathbb{H}})) < C\varepsilon$ для некоторой постоянной $C > 0$ и всех $\varepsilon > 0$.

Указание: для любого k множество $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{H}_k) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon}^u(\mathcal{S}_1^{\mathbb{H}})$ лежит внутри $\mathcal{O}((|k|+1)^{-2}\varepsilon)$ -окрестности границы $\partial \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{H}_k)$; следовательно,

$$\mu(\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{H}_k) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon}^u(\mathcal{S}_1^{\mathbb{H}})) < \text{const } (|k|+1)^{-2}\varepsilon.$$

Также проверить, что ε -окрестность множества $\mathbb{S}$ (которая является частью $\mathcal{S}_1^{\mathbb{H}}$) имеет μ -меру $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Отсюда следует, что $\mu\{x: r_{\mathbb{H}*}^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon$; следовательно, теорема доказана. ■

Теорема 5.17 показывает, что, несмотря на то что неустойчивые Н-многообразия намного короче, чем обычные неустойчивые многообразия, они удовлетворяют такой же линейной «оценке хвоста» (сравните (4.54) и (5.16)!). Заметим, однако, что, как показывает следующее упражнение, не существует линейной оценки хвоста для длины Н-многообразия в p -метрике.

УПРАЖНЕНИЕ 5.21. Пусть $p_{\mathbb{H}}^u(x)$ обозначает расстояние от x до ближайшей концевой точки Н-многообразия $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ в p -метрике. Показать, что $\mu\{x: p_{\mathbb{H}}^u(x) < \varepsilon\} \geq C\varepsilon^{4/5}$ для некоторой постоянной $C > 0$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Указание: для любого $x \in \mathbb{H}_k$ имеем $|W_{\mathbb{H}}^u(x)|_p \leq \text{const } k^{-5}$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.22. Показать, что $\mu\{x: p_{\mathbb{H}}^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon^{4/5}$ для некоторой постоянной $C > 0$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Далее представим несколько дополнительных фактов о Н-многообразиях.

УПРАЖНЕНИЕ 5.23. Показать, что почти для всех точек $x \in \mathcal{M}$ множество $W^u(x) \cap \mathcal{F}^n(\mathbb{S})$ пустое для всех $n \geq 0$, за исключением конечного числа. Указание: заметим, что если $W^u(x) \cap \mathcal{F}^n(\mathbb{S}) \neq \emptyset$, то $\mathcal{F}^{-n}(W^u(x)) \subset \mathcal{U}_{C\hat{\Lambda}^{-n+1}}^u(\mathbb{S})$ для некоторой постоянной $C > 0$. Затем использовать оценку из упражнения 5.20.

Тем не менее для каждого $n \geq 0$ множество $W^u(x) \cap \mathcal{F}^n(\mathbb{S})$ является или конечным, или счетным, но в последнем случае его точки сходятся к концевой точке $W^u(x)$. Таким образом, множество $W^u(x) \cap (\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}^n(\mathbb{S}))$ концевых точек Н-многообразия $W_{\mathbb{H}}^u \subset W(x)$ или конечное, или счетное, и в последнем случае оно концентрирует концевые точки $W^u(x)$ (но внутри $W^u(x)$ точек сгущения нет); см. рис. 5.3.

УПРАЖНЕНИЕ 5.24. Используйте метод упражнения 4.71, чтобы показать, что если последовательность неустойчивых Н-многообразий $\{W_m^u\}$ сходится при $m \rightarrow \infty$ к кривой W (в C^0 -метрике), то W (взятое без своих концевых точек) само будет неустойчивым Н-многообразием.

УПРАЖНЕНИЕ 5.25. Используйте метод упражнения 4.72, чтобы показать, что если $r_{\mathbb{H}*}^u(x) > 0$, то $r_{\mathbb{H}*}^u(y) > 0$ для всех $y \in W_{\mathbb{H}}^u(x)$. Затем показать, что почти для всех $x \in \mathcal{M}$ по мере μ обе концевые точки $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ принадлежат $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{S}_{-n}^{\mathbb{H}}$.

Наконец, теорема 5.17 может быть расширена на билиарды категории В; укажем необходимые изменения при доказательстве для этого случая. Некоторые подробности остаются читателю.

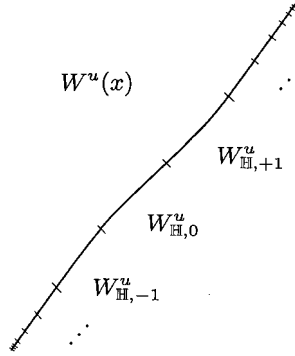


Рис. 5.3. Разбиение типичного неустойчивого многообразия на Н-многообразия

В первую очередь необходимо переопределить функцию $E_u(x)$, так что для каждого $x \in \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{H}_k \cap D_{l,n}^-)$ (эквивалентно, для каждого $x \in \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{H}_k) \cap D_{l,n}^+$) (см. определение n -ячеек $D_{l,n}^\pm$ в § 4.10) имеем $E_u(x) = n(|k| + 1)^2$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.26. Показать, что существует малая постоянная $\tilde{c} = \tilde{c}(\mathcal{D}) > 0$ такая, что коэффициент растяжения неустойчивых векторов $dx \in T_x \mathcal{M}$ для всех $x \in \mathcal{M}$ лежит в диапазоне между $\tilde{c}E_u(x)$ и $\tilde{c}^{-1}E_u(x)$, то есть

$$\tilde{c}E_u(x) \leq \frac{\|D_x \mathcal{F}(dx)\|}{\|dx\|} \leq \tilde{c}^{-1}E_u(x).$$

Указание: доказательство аналогично упражнению 5.18; используйте тот факт, что $\tau(x) \asymp n$ для $x \in D_{l,n}^+$.

Последнее изменение следует провести при доказательстве самой важной оценки $\mu(\mathcal{U}_\varepsilon^u(\mathbb{S}_1^\mathbb{H})) < C\varepsilon$. Непосредственным образом можно проверить, что для каждой n -ячейки $D_{l,n}^+$ множество $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{H}_k) \cap D_{l,n}^+$ будет узкой полоской, протяженной от верха до низа этой ячейки; см. рис. 5.4. Длина этой ячейки равна $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ (см. § 4.10); следовательно,

$$\mu(\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{H}_k) \cap D_{l,n}^+ \cap \mathcal{U}_\varepsilon^u(\mathbb{S}_1^\mathbb{H})) < \text{const } n^{-2}(|k| + 1)^{-2}\varepsilon$$

(дополнительный множитель $n^{-1/2}$ появляется благодаря плотности $\cos \varphi = \mathcal{O}(n^{-1/2})$ меры μ на $D_{l,n}^+$, так же, как в оценке (4.63)). Складывая эти оценки по всем k и n , получим требуемое утверждение.

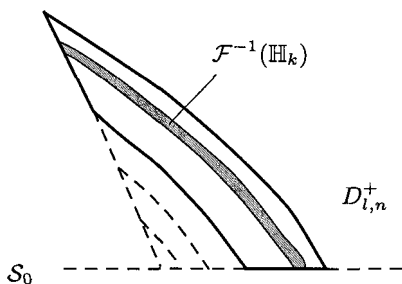


Рис. 5.4. Множество $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{H}_k) \cap D_{l,n}^+$ внутри ячейки $D_{l,n}^+$ для билиардов категории В

5.6. Ограничения на искажения

Как уже упоминалось, равномерных ограничений, подобных (5.9) и (5.10), для билиардов не существует. В этом параграфе выведем неоднородные ограничения на колебания u-SRB плотностей на неустойчивых Н-многообразиях, которые будут справедливы для билиардов.

Наша первая лемма применима к достаточно общим неустойчивым кривым (при условии, что они однородны в некотором смысле), но последующие теоремы ограничиваются неустойчивыми Н-многообразиями.

Пусть W — неустойчивая кривая такая, что $W_n = \mathcal{F}^{-n}(W)$ — это слабо однородная неустойчивая кривая для всех $0 \leq n \leq N-1$. Предположим, что кривые W_n являются $C^{\ell-1}$ -гладкими и все их $\ell-1$ производных равномерно ограничены (скажем, постоянными C_ν , $1 \leq \nu \leq \ell-1$, которые использовались в предположении 4.29).

Будем использовать обозначение § 5.4. В частности, для любой точки $x \in W$ полагаем $x_n = \mathcal{F}^{-n}(x)$ и обозначим через $\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x)$ коэффициент сужения W под действием отображения $\mathcal{F}^{-n}$ в x . Следующее утверждение является аналогом (5.10).

Лемма 5.27. Для любых $y, z \in W$ и каждого $1 \leq n \leq N$ имеем

$$C_d^{-1} \leq e^{-C|W|^{1/3}} \leq \frac{\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(y)}{\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(z)} \leq e^{C|W|^{1/3}} \leq C_d,$$

где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ и $C_d = C_d(\mathcal{D}) > 0$ — постоянные (нижний индекс d постоянной C_d обозначает «искажения» («distortions»)).

Очевидно, что $|W|$ можно заменить расстоянием между точками y и z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Логарифмируя и используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\begin{aligned}
 & |\ln \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(y) - \ln \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(z)| \leq \\
 & \leq \sum_{m=0}^{n-1} |\ln \mathcal{J}_{W_m} \mathcal{F}^{-1}(y_m) - \ln \mathcal{J}_{W_m} \mathcal{F}^{-1}(z_m)| \leq \\
 & \leq \sum_{m=0}^{n-1} |W_m| \max \left| \frac{d}{dx_m} \ln \mathcal{J}_{W_m} \mathcal{F}^{-1}(x_m) \right| \leq \\
 & \leq \text{const} \sum_{m=0}^{n-1} |W_m| / \cos \varphi_m \leq \\
 & \leq \text{const} \sum_{m=0}^{n-1} |W_m|^{1/3}.
 \end{aligned}$$

На последних двух шагах использовались соотношения (5.8) и (5.13). Заметим, чтобы использовать (5.8), необходимы равномерные оценки на производные W_n . Благодаря равномерной гиперболичности $\mathcal{F}$ имеем $\sum_{m=0}^{n-1} |W_n|^{1/3} \leq \text{const} |W|^{1/3}$. ■

Следствие 5.28. Для каждого $x \in W$ и каждого $1 \leq n \leq N$

$$C_d^{-1} \leq \frac{\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x)}{|W_n|/|W|} \leq C_d.$$

Следующая теорема является аналогом (5.9).

Теорема 5.29 (ограничения на искажения). Для каждого неустойчивого H -многообразия $W \subset M$

$$\left| \frac{d}{dx} \ln \rho_W(x) \right| \leq \frac{C}{|W|^{2/3}},$$

где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $\bar{x} \in W$. Тогда, благодаря (5.4) и правилу дифференцирования сложной функции,

$$\ln \rho_W(x) = \ln \rho_W(\bar{x}) + \sum_{n=0}^{\infty} (\ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(\bar{x}_n))$$

(экспоненциальная сходимость этого ряда была установлена в § 5.2). Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \ln \rho_W(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dx_n}{dx} \frac{d}{dx_n} \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x) \frac{Q_n(x_n)}{\cos \varphi_n}
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

(при условии, что этот ряд сходится равномерно по x , что будет ясно из последующего анализа). Здесь Q_n — это $C^{\ell-3}$ -гладкая равномерно ограниченная функция x_n с равномерно ограниченными производными; ср. с (5.8). Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{d}{dx} \ln \rho_W(x) \right| &\leq \text{const} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x)}{\cos \varphi_n} \leq \\
 &\leq \text{const} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|W_n|/|W|}{|W_n|^{2/3}} \leq \\
 &\leq \text{const} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^{-n/3}}{|W|^{2/3}},
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

где использовались соотношение (5.13), следствие 5.28 и равномерная гиперболичность $\mathcal{F}$; ср. с (4.19). Теорема 5.29 доказана. ■

Следствие 5.30. Для каждого $x, y \in W$

$$C_d^{-1} \leq e^{-C|W|^{1/3}} \leq \frac{\rho_W(x)}{\rho_W(y)} \leq e^{C|W|^{1/3}} \leq C_d,$$

где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — постоянная.

Теорему 5.29 можно обобщить на производные более высокого порядка.

Теорема 5.31 (ограничения на искажения высокого порядка). Для каждого $\nu = 1, \dots, \ell - 2$ существует постоянная $C_\nu = C_\nu(\mathcal{D}) > 0$ такая, что

$$\left| \frac{d^\nu}{dx^\nu} \ln \rho_W(x) \right| \leq \frac{C_\nu}{|W|^{2\nu/3}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\nu = 1$ см. предыдущую теорему. Для $\nu \geq 2$ необходимо продифференцировать (5.17). Сначала заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_n} \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) &= \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) \frac{d}{dx_n} \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) = \\ &= \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) \frac{Q_n(x_n)}{\cos \varphi_n}; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x) &= \frac{d}{dx} \prod_{m=0}^{n-1} \mathcal{J}_{W_m} \mathcal{F}^{-1}(x_m) = \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x)}{\mathcal{J}_{W_m} \mathcal{F}^{-1}(x_m)} \frac{dx_m}{dx} \frac{d}{dx_m} \mathcal{J}_{W_m} \mathcal{F}^{-1}(x_m) = \\ &= \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x) \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-m}(x) \frac{Q_m(x_m)}{\cos \varphi_m}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{Q_n(x_n)}{\cos \varphi_n} &= \frac{dx_n}{dx} \frac{d}{dx_n} \frac{Q_n(x_n)}{\cos \varphi_n} = \\ &= \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x) \left[\frac{Q'_n(x_n)}{\cos \varphi_n} + \frac{Q_n(x_n) \sin \varphi_n}{\cos^2 \varphi_n} \frac{d\varphi_n}{dx_n} \right], \end{aligned}$$

где

$$\frac{d\varphi_n}{dx_n} = \frac{d\varphi_n}{\sqrt{dr_n^2 + d\varphi_n^2}} = \frac{\mathcal{V}_n}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}}$$

— это $C^{\ell-2}$ -гладкая равномерно ограниченная функция с равномерно ограниченными производными на неустойчивых многообразиях; см. обозначения (5.6) и (5.7). Следовательно,

$$\frac{d}{dx} \frac{Q_n(x_n)}{\cos \varphi_n} = \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x) \frac{Q_n^{(1)}(x_n)}{\cos^2 \varphi_n},$$

где $Q_n^{(1)}$ — это $C^{\ell-4}$ -гладкая равномерно ограниченная функция x_n с равномерно ограниченными производными на неустойчивых многообразиях. Заметим, что гладкость функций, участвующих в анализе, уменьшается

по мере того, как вычисляются оценки для производных $\ln \rho_W(x)$. Таким образом, ограничения на производные высокого порядка требуют большей гладкости бильярдного стола $\mathcal{D}$.

Комбинируя оценки, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \ln \rho_W(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x) \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-m}(x) \frac{Q_n(x_n) Q_m(x_m)}{\cos \varphi_n \cos \varphi_m} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} [\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x)]^2 \frac{Q_n^{(1)}(x_n)}{\cos^2 \varphi_n}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Повторяя цепочку оценок из (5.18), получим

$$\left| \frac{d^2}{dx^2} \ln \rho_W(x) \right| \leq \text{const} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^{-n/3}}{|W|^{2/3}} \right)^2 \leq \frac{\text{const}}{|W|^{4/3}},$$

что доказывает теорему для $\nu = 2$. Доказательство для $\nu \geq 3$ получается непосредственно по аналогии с приведенными доказательствами; оставим его читателю в качестве упражнения. ■

УПРАЖНЕНИЕ 5.32. Доказать теорему 5.31 для $\nu = 3$. Вам потребуется выразить третью производную аналогично (5.19). Указание: самый важный член соответствующей формулы будет иметь вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x)]^3 \frac{Q_n^{(2)}(x_n)}{\cos^3 \varphi_n},$$

где $Q_n^{(2)}$ — это $C^{\ell-5}$ -гладкая равномерно ограниченная функция переменной x_n с равномерно ограниченными производными на неустойчивом многообразии.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.33. Теорема 5.29 была впервые доказана в [BSC91, приложение 1] (хотя и в более слабой форме). Теорема 5.31 была доказана в [CD06, приложение В], но только для $\nu = 1$ и $\nu = 2$. Распирение для случая $\nu > 2$ было опубликовано в [Ch06a].

Приведенные оценки могут быть расширены на неустойчивые кривые при условиях, описанных непосредственно перед леммой 5.27. А именно, пусть W — неустойчивая кривая такая, что $W_n = \mathcal{F}^{-n}(W)$ — это слабо однородная неустойчивая кривая для всех $0 \leq n \leq N-1$. Предположим, что кривые W_n являются $C^{\ell-1}$ -гладкими и все их $\ell-1$ производных равномерно ограничены (в соответствии с предложением 4.29).

Предложение 5.34. Для любого $\nu = 1, \dots, \ell - 2$ существует постоянная $C_\nu = C_\nu(\mathcal{D}) > 0$ такая, что

$$\left| \frac{d^\nu}{dx^\nu} \ln \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x) \right| \leq \frac{C_\nu}{|W|^{2\nu/3}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основано на лемме 5.27. Оно лишь немного отличается от доказательств теорем 5.29 и 5.31, главным образом тем, что производные представляются конечными, а не бесконечными рядами. Читателю предоставляется возможность проверить это. ■

В эргодической теории часто приходится итерировать меры. Классическая теорема Крылова–Боголюбова [КН95, теорема 4.1.1] утверждает, что любое непрерывное преобразование $F: X \rightarrow X$ компактного метрического пространства X имеет по меньшей мере одну инвариантную меру μ . Чтобы доказать это, выберем произвольную вероятностную меру μ_0 на X и докажем, что любая предельная точка средних Чезаро

$$\mu_n^a = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} F^i \mu_0 \quad (5.20)$$

есть F -инвариантная мера.

Хотя теорема Крылова–Боголюбова не применяется к билиардам (отображение $\mathcal{F}$ не является непрерывным), итерации некоторых мер под действием $\mathcal{F}$ играют важную роль при изучении эргодических свойств отображения столкновения $\mathcal{F}$.

Пусть μ_0 — вероятностная мера, сконцентрированная на неустойчивой кривой W , с плотностью $\rho_W^{(0)}$ относительно меры Лебега на W . Тогда для каждого $n \geq 1$ мера $\mu_n = \mathcal{F}^n \mu_0$ имеет на множестве $\mathcal{F}^n(W)$ плотность вида

$$\rho^{(n)}(x) = \mathcal{J}_{\mathcal{F}^n W} \mathcal{F}^{-n}(x) \rho_W^{(0)}(\mathcal{F}^{-n}(x)).$$

Якобиан $\mathcal{J}_{\mathcal{F}^n W} \mathcal{F}^{-n}(x)$ можно контролировать леммой 5.27 и предложением 5.34, но это потребует разбиения W и его образов на слабо однородные неустойчивые кривые, которые назовем *однородными компонентами*, или H -компонентами.

Определение 5.35. Для заданной неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}$ и $n \geq 0$ определим H -компоненты $\mathcal{F}^n(W)$ как максимальные подкривые $W' \subset \mathcal{F}^n(W)$ такие, что $\mathcal{F}^{-i}(W')$ — это слабо однородная неустойчивая кривая для каждого $0 \leq i \leq n$.

Заметим, что H -компоненты $\mathcal{F}^n(W)$ можно также определить как гладкие части $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^n(W) \subset \mathcal{M}_{\mathbb{H}}$, где $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}: \mathcal{M}_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ — это отображение на «новом пространстве столкновений», введенном в § 5.4.

Предположим, что кривая W является $C^{\ell-1}$ -гладкой и все ее $\ell-1$ производных равномерно ограничены в соответствии с предложением 4.29. Тогда тоже самое будет выполняться для каждой H -компоненты $\mathcal{F}^n(W)$, $n \geq 1$. Применяя предложение 5.34, получим следующее предложение.

Предложение 5.36. *Если начальная плотность $\rho_W^{(0)}$ на W является $C^{\ell-2}$ -гладкой, то $\rho^{(n)}$ будет $C^{\ell-2}$ -гладкой на каждой H -компоненте W' отображения $\mathcal{F}^n(W)$. Более того, для каждого $\nu = 1, \dots, \ell-2$ существует такая постоянная $C_\nu = C_\nu(\mathcal{D}) > 0$, что*

$$\left| \frac{d^\nu}{dx^\nu} \ln \rho^{(n)}(x) \right| \leq \frac{C_\nu}{|W'|^{2\nu/3}}$$

в каждой точке $x \in W'$ и для всех j и $n \geq n_W$, где n_W зависит от максимальной величины производных начальной плотности $\rho_W^{(0)}$ (если они достаточно малые, то $n_W = 0$; то есть оценка выше выполняется для всех $n \geq 0$).

5.7. Голономное отображение

Рассмотрим вновь неустойчивую кривую W и гладкую вероятностную меру μ_0 , сконцентрированную на W . Позже, в главе 7, станет понятно, что мера $\mu_n = \mathcal{F}^n \mu_0$ слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к той же самой $\mathcal{F}$ -инвариантной мере μ , которая определена в § 2.12 (определение 2.36). То есть предельная мера не будет зависеть от W и μ_0 . Доказательство этого факта опирается на следующее построение, позволяющее управлять эволюцией экспоненциально возрастающего числа H -компонент $\mathcal{F}^n(W)$.

Пусть $W^1, W^2 \subset \mathcal{F}^n(W)$ — две H -компоненты $\mathcal{F}^n(W)$, достаточно близкие друг к другу. Некоторые точки $x \in W^1$ могут быть соединены с другими точками $\bar{x} \in W^2$ с помощью частей устойчивых многообразий. Образы точек x и $\bar{x}$ будут сближаться друг с другом экспоненциально быстро в будущем, так что их асимптотическое поведение будет почти идентичным.

Это позволяет отождествить образы всех точек на всех H -компонентах $\mathcal{F}^n(W)$, лежащих на том же самом устойчивом многообразии, и, соответственно, объединить все меры (порожденные μ_n), которые они несут.

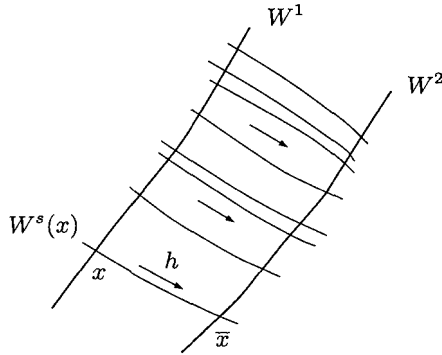


Рис. 5.5. Голономное отображение

Определение 5.37 («классическое» голономное отображение). Пусть $W^1, W^2 \subset \mathcal{M}$ — две неустойчивые кривые. Обозначим

$$W_*^i = \{x \in W^i : W^s(x) \cap W^{3-i} \neq \emptyset\}$$

для $i = 1, 2$. Отображение $h: W_*^1 \rightarrow W_*^2$, переводящее каждую точку $x \in W_*^1$ в $\bar{x} = W^s(x) \cap W^2$, называется *голономным отображением*; см. рис. 5.5.

Это отображение часто описывается как *скользящее вдоль устойчивых многообразий*. В ранних публикациях, особенно в работах русской школы, использовался термин *канонический изоморфизм*. Заметим, что отображение h — есть сохраняющий порядок гомеоморфизм между двумя подмножествами кривых W^1 и W^2 (действительно, напомним, что устойчивые многообразия не могут пересекать друг друга).

Дополнительные множества $W^i \setminus W_*^i$ состоят из интервалов вокруг кривых разрыва $S \subset S_\infty$, которые пересекают W^i там, где длина устойчивых многообразий не достаточна, чтобы достигнуть другой кривой W^{3-i} .

УПРАЖНЕНИЕ 5.38. Напомним, что произвольно короткие устойчивые многообразия будут плотными в $\mathcal{M}$; ср. с § 4.13. Доказать, что множества $W_*^i \subset W^i$ нигде не являются плотными в W^i (их замыкания образуют канторовы множества). Однако далее будет видно, что множества W_*^i , несмотря на то что нигде не являются плотными, обычно имеют положительную меру Лебега на W^i .

Будущие траектории точек $x \in W_*^1$ и $\bar{x} = h(x)$ экспоненциально сходятся друг к другу (действительно, $\text{dist}(\mathcal{F}^m(x), \mathcal{F}^m(\bar{x})) \leq C\Lambda^{-m}$ благодаря

равномерной гиперболичности $\mathcal{F}$). Таким образом, будущие образы множеств W_*^1 и W_*^2 можно отождествить хотя бы в топологическом смысле. Далее, в главе 7, рассмотрим развитие этих идей.

Однако для того, чтобы отождествить (объединить) меры, которые они несут, как предлагалось ранее, необходимо преобразовать меру Лебега $\mathbf{m}_1$ на W_*^1 с помощью $\mathbf{h}$ в меру Лебега $\mathbf{m}_2$ на W_*^2 (то есть голономное отображение $\mathbf{h}$ не «искажает» меру Лебега). Безусловно, для нелинейных отображений некоторые искажения возможны, так что мера $\mathbf{m}_1^* = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{m}_2)$ на W_*^1 отличается от $\mathbf{m}_1$. Однако далее будет показано, что искажения малы — то есть якобиан голономного отображения $\mathbf{h}$

$$J\mathbf{h}(x) = \frac{d\mathbf{m}_1^*}{d\mathbf{m}_1}(x)$$

ограничен и при некоторых условиях близок к единице. Сначала выведем общую формулу для якобиана $J\mathbf{h}$.

Теорема 5.39 ([AS67, Sin70]). *Почти в каждой (по мере $\mathbf{m}_1$) точке $x \in W_*^1$ якобиан голономного отображения удовлетворяет соотношению*

$$J\mathbf{h}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{J}_{W^1} \mathcal{F}^n(x)}{\mathcal{J}_{W^2} \mathcal{F}^n(\mathbf{h}(x))}. \quad (5.21)$$

Этот предел конечен и положителен почти в каждой (по мере $\mathbf{m}_1$) точке $x \in W_^1$; то есть голономное отображение $\mathbf{h}$ абсолютно непрерывно.*

Эта теорема представляет собой другой стандартный факт в эргодической теории (подобно теореме 5.2 ранее), значение которого достаточно прозрачно, но полное доказательство которого достаточно длинное, и по этой причине опустим его. Сделаем лишь краткий набросок доказательства, подтверждающий (но не доказывающий) теорему выше.

Пусть $x \in W_*^1$. Можно предположить, что x — точка лебеговой плотности множества W_*^1 на кривой W^1 , чтобы гарантировать достаточное число других точек W_*^1 в произвольно малой окрестности $x \in W^1$. Точнее говоря, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого отрезка $V^1 \subset W^1$, такого, что $x \in V^1$ и $\mathbf{m}_1(V_1) = |V^1| < \delta$, имеем

$$\mathbf{m}_1(V^1 \cap W_*^1) > (1 - \varepsilon)\mathbf{m}_1(V^1).$$

Выберем большое n и рассмотрим связную компоненту $\mathcal{Q}_n(x)$ множества $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_n$, содержащую точку x (см. § 4.11). Выберем две точки

$y^1, y^2 \in W_*^1 \cap Q_n(x)$ так, чтобы точка x лежала между y^1 и y^2 , и обозначим $\bar{y}^i = h(y^i)$ для $i = 1, 2$. Интуитивно ясно, что

$$Jh(x) \approx \frac{\text{dist}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\text{dist}(y_1, y_2)},$$

и эта аппроксимация становится еще точнее с ростом n (так как y_i становятся ближе к x).

Обозначим через V^1 отрезок кривой W^1 между точками y_1 и y_2 , а через V^2 — отрезок W^2 между соответствующими точками $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$. Очевидно, $V^1, V^2 \subset Q_n(x)$, так что отображение $\mathcal{F}^n$ гладкое как на V^1 , так и на V^2 . Их образы $V_n^i = \mathcal{F}^n(V^i)$, $i = 1, 2$, — это две почти параллельные неустойчивые кривые, которые проходят очень близко друг к другу; см. рис. 5.6. В действительности, благодаря равномерной гиперболичности (4.19), расстояние между V_n^1 и $V_n^2 \leq \text{const } \Lambda^{-n}$.

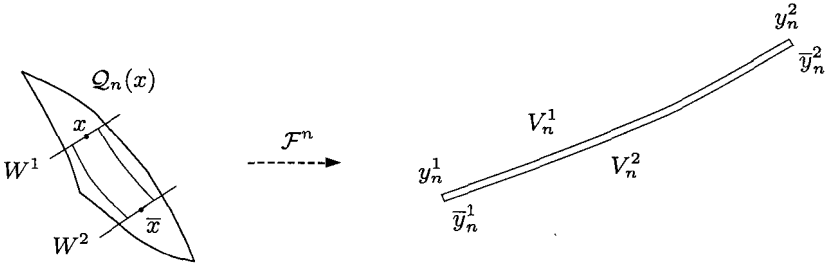


Рис. 5.6. «Доказательство» теоремы 5.39

Таким образом, $|V_n^1| \approx |V_n^2|$, и эта аппроксимация улучшается с ростом n . Достаточное число точек $y \in W_*^1$ вокруг x позволяет выбрать точки y_1 и y_2 так, что отрезки V_n^1 и V_n^2 будут коротки настолько, насколько это потребуется для минимизации их искажений под действием отображения $\mathcal{F}^{-n}$. Тогда, используя ограничения на искажения, получим

$$\frac{\text{dist}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\text{dist}(y_1, y_2)} \approx \frac{J_{V_n^2} \mathcal{F}^{-n}(\bar{x}_n)}{J_{V_n^1} \mathcal{F}^{-n}(x_n)} = \frac{J_{W^1} \mathcal{F}^n(x)}{J_{W^2} \mathcal{F}^n(\bar{x})},$$

где $x_n = \mathcal{F}^n(x)$ и $\bar{x}_n = \mathcal{F}^n(\bar{x})$. Эта аппроксимация становится точнее с ростом n до тех пор, пока осуществляется правильный выбор y_1 и y_2 . Переход к пределу $n \rightarrow \infty$ завершает «доказательство».

ЗАМЕЧАНИЕ 5.40. Абсолютная непрерывность для голономных отображений, а также формула (5.21) были впервые установлены Аносовым и Синаем в 1967 году [AS67, уравнение (5.3)] для гладких равномерно гиперболических систем, а позднее были расширены на большие классы гиперболических отображений. Полные доказательства этих фактов читатель может найти в [AS67] и [BP01, теорема 4.4.1].

5.8. Абсолютная непрерывность

Теорема 5.39 гарантирует абсолютную непрерывность голономного отображения, но не дает никаких определенных оценок для якобиана. Действительно, если использовать устойчивые многообразия, чтобы соединить точки двух заданных неустойчивых кривых, то получаются только очень грубые оценки, так как возможен лишь малый контроль за искажениями устойчивых многообразий под действием билиардного отображения столкновения $\mathcal{F}$; см. § 5.3. Некоторые «грубые» оценки для якобиана $\mathcal{J}h$ доказываются в [Sin70, раздел 5] и [Ga74, раздел 4].

Однако если вместо устойчивых многообразий использовать устойчивые Н-многообразия, то можно получить более точные оценки для якобиана голономного отображения. Так как такие оценки существенны для последующего исследования, переопределим голономное отображение следующим образом.

Определение 5.41 (модифицированное голономное отображение). Пусть $W^1, W^2 \subset \mathcal{M}$ — две неустойчивые кривые. Обозначим

$$W_*^i = \{x \in W^i: W_{\mathbb{H}}^s(x) \cap W^{3-i} \neq \emptyset\}$$

для $i = 1, 2$, где $W_{\mathbb{H}}^s(x)$ — это устойчивое Н-многообразие, проходящее через x . Отображение $h: W_*^1 \rightarrow W_*^2$, переводящее каждую точку $x \in W_*^1$ в $\bar{x} = W_{\mathbb{H}}^s(x) \cap W^2$, называется (модифицированным) голономным отображением.

Предположим, что W^1 и W^2 — $C^{\ell-1}$ -гладкие кривые и по меньшей мере их первые и вторые производные равномерно ограничены (тогда их будущие образы также имеют равномерно ограниченные производные благодаря предложению 4.29).

Пусть $x \in W_*^1$ и $\bar{x} = h(x) \in W_*^2$. Полагаем $\delta = \text{dist}(x, \bar{x})$ и обозначим через γ угол между касательными векторами к кривым W^1 и W^2 в точках x и $\bar{x}$ соответственно.

Теорема 5.42. *Якобиан голономного отображения h равномерно ограничен*

$$C^{-1} \leq Jh(x) \leq C$$

для всех $x \in W_*^1$; здесь $C = C(\mathcal{D}) > 1$ — постоянная. Кроме того,

$$A^{-\gamma-\delta^{1/3}} \leq Jh(x) \leq A^{\gamma+\delta^{1/3}}, \quad (5.22)$$

где $A = A(\mathcal{D}) > 1$ — постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $W_n^i = \mathcal{F}^n(W^i)$ для $i = 1, 2$ и $n \geq 1$. Также обозначим $x_n = \mathcal{F}^n(x)$ и $\bar{x}_n = \mathcal{F}^n(\bar{x})$, и пусть $\delta_n = \text{dist}(x_n, \bar{x}_n)$. Благодаря равномерной гиперболичности $\mathcal{F}$ (ср. с (4.19)) $\delta_n \leq \hat{C}\delta\Lambda^{-n}$, где $\hat{C} = 1/\hat{c}$.

Логарифмируя (5.21) и используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\ln Jh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\ln \mathcal{J}_{W_n^1} \mathcal{F}(x_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n^2} \mathcal{F}(\bar{x}_n) \right). \quad (5.23)$$

Благодаря (4.18), (3.40) и (3.39) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{W_n^1} \mathcal{F}(x_n) &= (1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+) \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_{n+1}} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{V}_{n+1}^2}}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}} = \\ &= \frac{\cos \varphi_n + \tau_n (\mathcal{K}_n + \mathcal{V}_n)}{\cos \varphi_{n+1}} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{V}_{n+1}^2}}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}}, \end{aligned}$$

где, как обычно, $\tau_n = \tau(x_n)$ и $\mathcal{B}_n, \mathcal{K}_n$ и т. д. берутся в точке x_n . Следовательно,

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{J}_{W_n^1} \mathcal{F}(x_n) &= -\ln \cos \varphi_{n+1} + \frac{1}{2} \ln (1 + \mathcal{V}_{n+1}^2) - \frac{1}{2} \ln (1 + \mathcal{V}_n^2) + \\ &+ \ln [\cos \varphi_n + \tau_n (\mathcal{K}_n + \mathcal{V}_n)]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Используя аналогичное обозначение в точке $\bar{x}_n$, получим

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{J}_{W_n^2} \mathcal{F}(\bar{x}_n) &= -\ln \cos \bar{\varphi}_{n+1} + \frac{1}{2} \ln (1 + \bar{\mathcal{V}}_{n+1}^2) - \frac{1}{2} \ln (1 + \bar{\mathcal{V}}_n^2) + \\ &+ \ln [\cos \bar{\varphi}_n + \bar{\tau}_n (\bar{\mathcal{K}}_n + \bar{\mathcal{V}}_n)]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Сравнивая первые члены данных выражений и учитывая (5.13), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} |\ln \cos \varphi_{n+1} - \ln \cos \bar{\varphi}_{n+1}| &\leq \frac{\text{const } |\varphi_{n+1} - \bar{\varphi}_{n+1}|}{\cos \varphi_{n+1}} \leq \\ &\leq \frac{\text{const } \delta_{n+1}}{\delta_{n+1}^{2/3}} = \text{const } \delta_{n+1}^{1/3}. \end{aligned}$$

Все другие члены в (5.24) и (5.25) равномерно ограничены и дифференцируемы; таким образом, несложно прийти к следующему неравенству:

$$|\ln \mathcal{J}_{W_n^1} \mathcal{F}(x_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n^2} \mathcal{F}(\bar{x}_n)| \leq C(\delta_{n+1}^{1/3} + \gamma_n + \gamma_{n+1} + \delta_n), \quad (5.26)$$

где $C > 0$ — постоянная и величина $\gamma_n = |\Delta \mathcal{V}_n| = |\mathcal{V}_n - \bar{\mathcal{V}}_n|$ обозначает угол между касательными векторами к кривым W_n^1 и W_n^2 в точках x_n и $\bar{x}_n$ соответственно (заметим, что $\gamma_0 = \gamma$).

Благодаря упражнению 4.50 (точнее, благодаря его аналогу для «обратного течения времени»; см. объяснение в § 4.3) справедливо неравенство $\delta_n \leq C\delta_{n+1}^{1/2}$; таким образом, член δ_n в (5.26) может быть опущен. Остается оценить γ_n для всех $n \geq 0$. Для краткости обозначим $\Delta \mathcal{B}_n^- = \mathcal{B}_n^- - \bar{\mathcal{B}}_n^-$, $\Delta \tau_n = \tau_n - \bar{\tau}_n$ и т.д. Сначала оценим $\Delta \mathcal{B}_{n+1}^-$, используя (3.31):

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{B}_{n+1}^- &= \frac{1}{\tau_n + 1/\mathcal{B}_n^+} - \frac{1}{\bar{\tau}_n + 1/\bar{\mathcal{B}}_n^+} = \\ &= -\frac{1}{\tau_n + 1/\mathcal{B}_n^+} \frac{1}{\bar{\tau}_n + 1/\bar{\mathcal{B}}_n^+} \left(\Delta \tau_n + \frac{1}{\mathcal{B}_n^+} - \frac{1}{\bar{\mathcal{B}}_n^+} \right) = \\ &= -\frac{\Delta \tau_n}{(\tau_n + 1/\mathcal{B}_n^+)(\bar{\tau}_n + 1/\bar{\mathcal{B}}_n^+)} + \frac{\Delta \mathcal{R}_n + \Delta \mathcal{B}_n^-}{(1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+)(1 + \bar{\tau}_n \bar{\mathcal{B}}_n^+)} \quad (5.27) \end{aligned}$$

(напомним, что $\mathcal{B}_n^+ = \mathcal{R}_n + \mathcal{B}_n^-$). Первый член в (5.27) ограничен

$$\text{const } \Delta \tau_n \leq \text{const } (\delta_n + \delta_{n+1}) \leq \text{const } \delta_n. \quad (5.28)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathcal{R}_n}{(1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+)(1 + \bar{\tau}_n \bar{\mathcal{B}}_n^+)} &\leq \\ &\leq \frac{2\mathcal{K}_n \cos \bar{\varphi}_n - 2\bar{\mathcal{K}}_n \cos \varphi_n}{(\cos \varphi_n + \tau_n(\mathcal{K}_n + \mathcal{V}_n))(\cos \bar{\varphi}_n + \bar{\tau}_n(\bar{\mathcal{K}}_n + \bar{\mathcal{V}}_n))}. \end{aligned}$$

Так как знаменатель отделен от нуля, дробь не превышает $\text{const } \delta_n$; таким образом, (5.27) сводится к

$$\Delta \mathcal{B}_{n+1}^- = \tilde{Q}_n^{(1)} + \frac{\Delta \mathcal{B}_n^-}{(1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+)(1 + \bar{\tau}_n \bar{\mathcal{B}}_n^+)},$$

где $|\tilde{Q}_n^{(1)}| \leq \text{const } \delta_n$. Далее, учитывая (3.39), получим

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{V}_{n+1} &= \Delta \mathcal{K}_{n+1} + \mathcal{B}_{n+1}^- \cos \varphi_{n+1} - \bar{\mathcal{B}}_{n+1}^- \cos \bar{\varphi}_{n+1} = \\ &= \tilde{Q}_{n+1}^{(2)} + \cos \varphi_{n+1} \Delta \mathcal{B}_{n+1}^-, \end{aligned}$$

где $|\tilde{Q}_{n+1}^{(2)}| \leq \text{const } \delta_{n+1}$. Комбинируя две последние оценки, имеем

$$\Delta \mathcal{V}_{n+1} = \tilde{Q}_n^{(3)} + \frac{\cos \varphi_{n+1}}{\cos \varphi_n} \frac{\Delta \mathcal{V}_n}{(1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+)(1 + \bar{\tau}_n \bar{\mathcal{B}}_n^+)},$$

где $|\tilde{Q}_n^{(3)}| \leq \text{const } \delta_n$. Рассмотрим дробь

$$u_n := \frac{\cos \varphi_{n+1}}{\cos \varphi_n (1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+)(1 + \bar{\tau}_n \bar{\mathcal{B}}_n^+)}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.43. Проверить, что для всех $0 \leq k \leq n$

$$u_n u_{n-1} \dots u_k \leq C / \Lambda^{n-k},$$

где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — это постоянная. Подсказки:

$$\mathcal{B}_n^+ \cos \varphi_n = 2\mathcal{K}_n + \mathcal{B}_n^- \cos \varphi_n \geq 2\mathcal{K}_{\min} > 0$$

и $1 + \bar{\tau}_n \bar{\mathcal{B}}_n^+ \geq \Lambda$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.44. Используя результат предыдущего упражнения, доказать, что

$$\begin{aligned} \gamma_n = |\Delta \mathcal{V}_n| &\leq \text{const} \left(\sum_{k=0}^n \delta_k / \Lambda^{n-k} + \gamma / \Lambda^n \right) \leq \\ &\leq \text{const} (\delta n / \Lambda^n + \gamma / \Lambda^n) \end{aligned} \quad (5.29)$$

(напомним, что $\delta_k \leq \widehat{C} \delta / \Lambda^k$ благодаря равномерной гиперболичности).

Комбинируя (5.29) и (5.26), получим

$$\left| \ln \mathcal{J}_{W_n^1} \mathcal{F}(x_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n^2} \mathcal{F}(\bar{x}_n) \right| \leq C \left(\frac{\delta^{1/3}}{\Lambda^{n/3}} + \frac{\delta n}{\Lambda^n} + \frac{\gamma}{\Lambda^n} \right), \quad (5.30)$$

где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — постоянная. Суммирование по n дает

$$|\ln Jh(x)| \leq \text{const} (\gamma + \delta^{1/3}),$$

и этим завершается доказательство теоремы. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 5.45. Данная теорема и ее доказательство распространяются на билиарды категории В без изменений. Хотя время между столкновениями τ_n и $\bar{\tau}_n$ больше не ограничено сверху, самая важная оценка (5.28), очевидно, останется справедливой.

Главная оценка (5.22) включает в себя два параметра — δ и γ . Однако в большинстве приложений кривые W^1 и W^2 не пересекаются, и, следовательно, в параметре γ нет необходимости, как будет видно дальше. Пусть

$$W_\diamond^1 = \{x \in W_*^1 : r_{W^1}(x) > D\delta^{1/2}, r_{W^2}(\bar{x}) > D\delta^{1/2}\},$$

где $D > 0$ — достаточно большая постоянная. Это множество точек W_*^1 , которые удалены на расстояние $D\delta^{1/2}$ от концевых точек обеих кривых.

УПРАЖНЕНИЕ 5.46. Показать, что если $W^1 \cap W^2 \neq \emptyset$, то для каждого $x \in W_\diamond^1$ имеем $\gamma \leq C\delta^{1/2}$, где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — это постоянная. Указание: используя равномерные ограничения на первую и вторую производные кривых W^1 и W^2 , доказать, что если бы данное неравенство не выполнялось, то W^1 и W^2 пересекали бы друг друга (см. рис. 5.7), таким образом, приходим к противоречию.

Итак, для всех точек $x \in W_\diamond^1$ имеем $\gamma \ll \delta^{1/3}$; следовательно, оценка (5.22) принимает более простой вид: $A^{-\delta^{1/3}} \leq Jh(x) \leq A^{\delta^{1/3}}$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.47. Доказать, что якобиан $Jh(x)$ — это непрерывная функция на W_*^1 . Указание: заметим, что ряд (5.23) сходится равномерно по x благодаря (5.30) и каждый член зависит от x непрерывно.

Якобиан $Jh(x)$ не обязан быть непрерывным по Гельдеру (в отличие от его аналогов в системах Аносова и аксиомы А), но у него есть подобное свойство, иногда называемое «динамически определенная непрерывность по Гельдеру» [Yo98, с. 597], которая будет описана ниже.

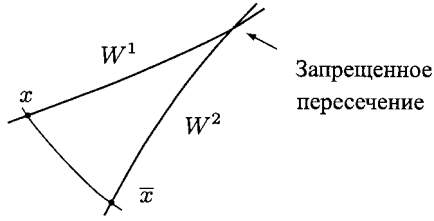


Рис. 5.7. Упражнение 5.46

Пусть $\mathcal{Q}_n^{\mathbb{H}}(x)$ обозначает открытую связную компоненту множества $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_n^{\mathbb{H}}$, содержащую точку x (см. § 5.4). Для двух точек $x, y \in \mathcal{M}$ обозначим через

$$s_+(x, y) = \min\{n \geq 0 : y \notin \mathcal{Q}_n^{\mathbb{H}}(x)\} \quad (5.31)$$

«время разделения» (образы $\mathcal{F}^n(x)$ и $\mathcal{F}^n(y)$ разделяются в момент $n = s_+(x, y)$, так как они лежат в разных связных компонентах нового пространства столкновений $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$). Очевидно, эта функция будет симметричной: $s_+(x, y) = s_+(y, x)$. Если $y \in \mathcal{Q}_n^{\mathbb{H}}(x)$ для всех $n \geq 0$, то $y \in W_{\mathbb{H}}^s(x)$; в этом случае полагаем $s_+(x, y) = \infty$. Заметим, что если x и y лежат на одной неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}$, то

$$\text{dist}(x, y) \leq C\Lambda^{-s_+(x, y)} \quad (5.32)$$

для некоторой постоянной $C = C(\mathcal{D}) > 0$.

Предложение 5.48. *Существуют постоянные $C > 0$ и $\theta \in (0, 1)$ такие, что*

$$|\ln Jh(x) - \ln Jh(y)| \leq C\theta^{s_+(x, y)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\bar{x} = h(x)$ и $\bar{y} = h(y)$. Заметим, что $s_+(\bar{x}, \bar{y}) = s_+(x, y)$; это следует из предложения 4.47. Используя обозначение (5.23) и неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned} \Delta &:= |\ln Jh(x) - \ln Jh(y)| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\ln \mathcal{J}_{W_n^1} \mathcal{F}(x_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n^2} \mathcal{F}(\bar{x}_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n^1} \mathcal{F}(y_n) + \ln \mathcal{J}_{W_n^2} \mathcal{F}(\bar{y}_n)|. \end{aligned}$$

Пусть $m = s_+(x, y)/2$. Тогда применим оценку (5.30) ко всем $n > m$ и лемму 5.27 (для ограничений на искажения) ко всем $n \leq m$. Выбор параметра $\theta = \Lambda^{-1/6}$ завершает доказательство нашего утверждения. ■

5.9. Две леммы о росте

Отображение $\mathcal{F}$ равномерно гиперболическое; то есть $\mathcal{F}^n$ растягивает неустойчивые кривые $W \subset \mathcal{M}$ с коэффициентом $\geq \bar{c}\Lambda^n$ согласно (4.19). В то же самое время образы $\mathcal{F}^n(W)$ разбиваются особенностями на части, некоторые из которых могут быть длинными, а некоторые — короткими. Во время этого процесса могут появиться произвольно короткие части, и общее число частей растет экспоненциально с ростом n (оно даже может быть бесконечным, если рассматриваются билиарды категории В; см. § 4.10).

Гиперболичность $\mathcal{F}$ гарантирует экспоненциальный рост неустойчивых кривых только в *локальном смысле*, то есть в терминах равномерного растяжения их касательных векторов. Она *не* гарантирует, что типичные части $\mathcal{F}^n(W)$ будут расти (становиться длиннее) с ростом n . В действительности есть вероятность, что они могут стать короче с ростом n , так что роста в *глобальном смысле* не будет; см. следующий параграф.

Представим себе следующий сценарий. Очень короткая неустойчивая кривая длины $\delta > 0$ растягивается под действием $\mathcal{F}$ с коэффициентом 1.8, но кривая разрыва разделяет ее на две равные части. Тогда образ $\mathcal{F}(W)$ объединил бы две неустойчивые кривые, каждая из которых длиной 0.9δ . Если бы то же самое происходило с каждой частью на каждой итерации отображения (см. рис. 5.8), то $\mathcal{F}^n(W)$ состояло бы из 2^n неустойчивых кривых, каждая длиной $(0.9)^n\delta$. Тогда неустойчивые кривые, будучи растянутыми локально, стали бы длиннее «глобально».

Такое поведение неустойчивых кривых было бы катастрофичным; оно бы сразу уничтожило равномерную гиперболичность отображения $\mathcal{F}$.

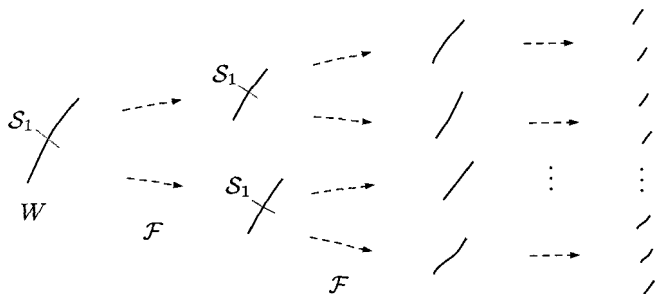


Рис. 5.8. Парадокс: неустойчивые кривые становятся короче под действием отображения $\mathcal{F}$

Эта задача общая для всех гиперболических отображений с разрывами, но в билиардах она ухудшается необходимостью дальнейшего деления неустойчивых кривых на H -компоненты, которые были определены в § 5.6 для того, чтобы гарантировать соответствующие ограничения на искажения, плотности вероятностей и якобиан голономного отображения.

H -компоненты множества $\mathcal{F}^n(W)$ будут, в общем случае, короче, чем его гладкие компоненты. Например, каждая неустойчивая кривая, заканчивающаяся на S_0 , должна быть разбита на бесконечное число мельчайших H -компонент. Несмотря на то что ситуация с неустойчивыми кривыми выглядит достаточно плохо (рис. 5.8), положение дел, по-видимому, станет еще хуже, если разделить кривые на еще более мелкие H -компоненты.

Замечательным является то, что, несмотря на различия, *типичные* H -компоненты $\mathcal{F}^n(W)$ для *каждой* малой неустойчивой кривой W растут монотонно и экспоненциально по n , пока не достигнут размера порядка единицы; см. ниже. Это фундаментальный факт в теории хаотических билиардов. Его можно смело назвать победой гиперболичности над особенностями (и неоднородностями): растяжение всегда преобладает над фрагментацией! Если бы это было не так, теория хаотических билиардов была бы совсем другой.

Вернемся к точным определениям. Пусть W — слабо однородная неустойчивая кривая. Обозначим через m_W меру Лебега¹ на W . Для каждого $x \in W$ и $n \geq 0$ обозначим через $W_n(x)$ H -компоненту $\mathcal{F}^n(W)$, содержащую точку $\mathcal{F}^n(x)$, а через

$$r_n(x) = r_{W_n(x)}(\mathcal{F}^n x) \quad (5.33)$$

— расстояние от точки $\mathcal{F}^n(x)$ до ближайшей концевой точки $W_n(x)$. Очевидно, $r_n(x)$ — это функция на W , которая характеризует размер H -компоненты $\mathcal{F}^n(W)$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.49. Проверить, что

$$m_W(r_0(x) < \varepsilon) = \min\{2\varepsilon, m_W(W)\},$$

где $m_W(W) = |W|$ — это длина W .

УПРАЖНЕНИЕ 5.50. Предположим, что отображение $\mathcal{F}^n$ растягивает W равномерно (как линейное отображение) с коэффициентом $\Lambda_n > 1$ и $\mathcal{F}^n(W)$ образует одну H -компоненту. Показать, что

$$m_W(r_n(x) < \varepsilon) = \min\{2\varepsilon/\Lambda_n, m_W(W)\}.$$

¹Обозначим через m различные одномерные меры Лебега.

УПРАЖНЕНИЕ 5.51. Рассмотрим почти идеальную ситуацию, когда отображение $\mathcal{F}^n$ растягивает W равномерно (как линейное отображение) с коэффициентом Λ^n (где $\Lambda > 1$), при этом множество $\mathcal{F}^n(W)$ остается одной H -компонентой до тех пор, пока $|\mathcal{F}^n(W)| < 1$, иначе $\mathcal{F}^n(W)$ делится на H -компоненты длиной от 0.5 до 1 (заметим, что первое разбиение происходит, когда $n \approx \lfloor \ln |W| / \ln \Lambda \rfloor$; см. рис. 5.9. Доказать, что

$$\mathbf{m}_W(r_n(x) < \varepsilon) \leq \mathbf{m}_W(r_0 < \varepsilon/\Lambda^n) + 4\varepsilon \mathbf{m}_W(W) \leq 2\varepsilon/\Lambda^n + 4\varepsilon \mathbf{m}_W(W).$$

Таким образом, если $|W|$ очень мало, то мера $\mathbf{m}_W(r_n(x) < \varepsilon)$ убывает экспоненциально по n , пока $\mathcal{F}^n(W)$ не достигнет размера > 1 , и после этого (то есть для всех $n \geq \lfloor \ln |W| / \ln \Lambda \rfloor$) эта мера будет иметь порядок ε :

$$\mathbf{m}_W(r_n(x) < \varepsilon) \leq 5\varepsilon \mathbf{m}_W(W).$$

Очевидно, эти оценки достаточно точны для всех малых $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим достаточно короткую неустойчивую кривую $W \subset \mathcal{M}$.

Теорема 5.52 (первая лемма о росте). *Существуют постоянные $\hat{\Lambda} > 1$, $\vartheta_1 \in (0, 1)$ и $c_1, c_2 > 0$ такие, что для всех $n \geq 0$ и $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{m}_W(r_n(x) < \varepsilon) \leq c_1(\vartheta_1 \hat{\Lambda})^n \mathbf{m}_W(r_0(x) < \varepsilon/\hat{\Lambda}^n) + c_2 \varepsilon \mathbf{m}_W(W).$$

С учетом упражнения 5.49 первый член в правой части равен $c_1 \vartheta_1^n \varepsilon$ для всех $\varepsilon < \hat{\Lambda}^n |W|/2$; следовательно, он убывает экспоненциально по n .

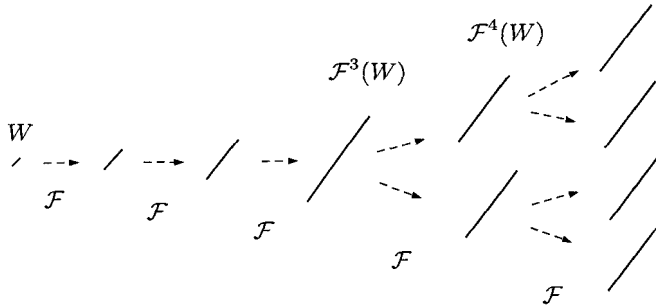


Рис. 5.9. Почти идеальное растяжение неустойчивых кривых под действием $\mathcal{F}$ (упражнения 5.51)

Теорема 5.53 (вторая лемма о росте). *Существуют постоянные $\kappa > 0$ и $c_3 > 0$ такие, что для всех $n \geq \kappa |\ln |W||$ и $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{m}_W(r_n(x) < \varepsilon) \leq c_3 \varepsilon \mathbf{m}_W(W).$$

Читатель должен заметить поразительное сходство между оценками этих двух теорем, сформулированных для билиардов, и оценками, полученными в упражнении 5.51 для почти идеальной ситуации, когда компоненты $\mathcal{F}^n(W)$ разбиваются только на достаточно длинные части. Следовательно, появление произвольно коротких Н-компонент в реальной билиардной динамике не мешает *типичным* Н-компонентам вести себя таким же образом, как было описано в упражнении 5.51.

Очевидно, есть два режима в развитии Н-компонент $\mathcal{F}^n(W)$, если начальная кривая $W \subset \mathcal{M}$ короткая:

- (i) во время первых $\sim |\ln |W||$ итераций $\mathcal{F}$ типичные Н-компоненты $\mathcal{F}^n(W)$ возрастают монотонно и экспоненциально быстро по n , пока не достигнут размера порядка единицы (первая лемма о росте);
- (ii) после этого типичные Н-компоненты $\mathcal{F}^n(W)$ остаются большими все время (вторая лемма о росте).

Этим завершается анализ глобального растяжения неустойчивых кривых.

5.10. Доказательство двух лемм о росте

В этом параграфе докажем теоремы 5.52 и 5.53 (первую и вторую леммы о росте).

Заметим, что можно заменить меру Лебега $\mathbf{m}_W$ на W любой равномерно эквивалентной мерой $\mathbf{m}_W^*$, то есть такой мерой, что

$$0 < C^{-1} \leq d\mathbf{m}_W / d\mathbf{m}_W^* \leq C < \infty, \quad (5.34)$$

где $C = C(\mathcal{D}) > 1$ — постоянная, и доказать леммы о росте для новой меры $\mathbf{m}_W^*$ (постоянную C можно включить в множители $c_1 \operatorname{div} c_3$ в леммах о росте).

Мера Лебега $\mathbf{m}_W$ (порожденная евклидовой метрикой на $\mathcal{M}$) немногo неудобна, так как неустойчивые кривые не всегда растягиваются монотонно (упражнение 4.23). В эргодической теории равномерно гиперболических отображений на римановых многообразиях заданную риманову

метрику всегда можно заменить на равномерно эквивалентную, в которой неустойчивые касательные векторы растягиваются монотонно; см. оригинальное доказательство в [HP70] и недавно вышедшую книгу [BrS02, раздел 5.2]. Эта метрика называется *адаптированной метрикой*, или *метрикой Ляпунова*.

В рассеивающих билиардах адаптированную метрику можно определить разными путями. Один из них (возможно, самый простой) —

$$\|dx\|_* = \frac{\mathcal{K} + |\mathcal{V}|}{\sqrt{1 + \mathcal{V}^2}} \|dx\|,$$

где, как обычно, $dx = (dr, d\varphi)$ обозначает касательный вектор, $\mathcal{K}$ обозначает кривизну $\partial\mathcal{D}$ в данной точке и $\mathcal{V} = d\varphi/dr$ (в случае $dr = 0$ определим $\|dx\|_* = \|dx\|$ по непрерывности).

УПРАЖНЕНИЕ 5.54. Проверить, что метрики $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|$ равномерно эквивалентные.

УПРАЖНЕНИЕ 5.55. Проверить, что растяжение неустойчивых векторов $dx_0 \in C_x^u$ в метрике $\|\cdot\|_*$ удовлетворяет условию

$$\frac{\|dx_1\|_*}{\|dx_0\|_*} \geq \Lambda_* > 1, \quad (5.35)$$

где $dx_1 = D_x \mathcal{F}(dx_0)$ и $\Lambda_* > 1$ — постоянная. Указание: в обозначениях (4.18) и (4.15)

$$\frac{\|dx_1\|_*}{\|dx_0\|_*} = (1 + \tau_0 \mathcal{B}_0^+) \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_1} \frac{\mathcal{K}_1 + \mathcal{V}_1}{\mathcal{K}_0 + \mathcal{V}_0}.$$

Далее, используя (3.31), (3.33) и (3.39), получим

$$1 + \tau_0 \mathcal{B}_0^+ = \frac{\mathcal{B}_0^+}{\mathcal{B}_1^-} = \frac{\frac{2\mathcal{K}_0}{\cos \varphi_0} + \mathcal{B}_0^-}{\mathcal{B}_1^-} = \frac{\mathcal{K}_0 + \mathcal{V}_0}{\mathcal{B}_1^- \cos \varphi_0}.$$

Имеем

$$\frac{\|dx_1\|_*}{\|dx_0\|_*} = \frac{\mathcal{K}_1 + \mathcal{V}_1}{\mathcal{B}_1^- \cos \varphi_1} = 1 + \frac{2\mathcal{K}_1}{\mathcal{B}_1^- \cos \varphi_1}. \quad (5.36)$$

Остается доказать, что последняя дробь отделена от нуля.

Определим $\mathbf{m}_W^*$ как меру Лебега на W , порожденную метрикой $\|\cdot\|_*$. Переопределим (5.3) соответствующим образом:

$$\mathcal{J}_W^* \mathcal{F}^n(x) = \frac{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|_*}{\|dx\|_*}, \quad (5.37)$$

где dx обозначает ненулевой касательный вектор к кривой W в x .

Лемма 5.56. Для заданной неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}$ обозначим через W_i все H -компоненты $\mathcal{F}(W)$, и пусть

$$\lambda(W_i) = \max_{y \in W_i} \mathcal{J}_{W_i}^* \mathcal{F}^{-1}(y).$$

Тогда

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \sup_{W: |W|_* < \delta} \sum_i \lambda(W_i) < 1, \quad (5.38)$$

где $|W|_* = \mathbf{m}_W^*(W)$ обозначает длину W в $\|\cdot\|_*$ -метрике.

Заметим, что неравенство (5.38) делает невозможным гибельный сценарий, показанный на рис. 5.8, поскольку $\lambda(W_i) = 1.8^{-1}$ для $i = 1, 2$; следовательно, $\sum_i \lambda(W_i) = 2/1.8 > 1$.

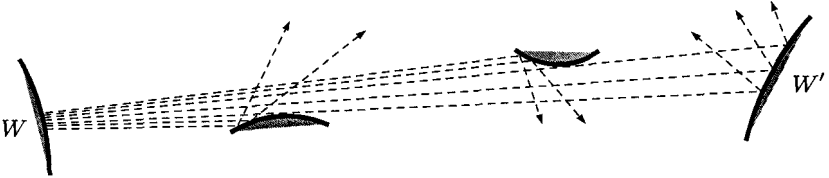


Рис. 5.10. Доказательство леммы 5.56

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W — малая неустойчивая кривая. Она дает начало семейству билиардных траекторий (направленных линий на столе $\mathcal{D}$), начинающихся в точках $x \in W$. Заметим, что $x \in W \cap \mathcal{S}_1$ тогда и только тогда, когда направленная прямая, выходящая из x , является касательной к рассеивателю; то есть орбита x участвует в скользящем (касательном) столкновении (см. рис. 5.10).

При скользящем столкновении W разрезается на две части: одна попадает на $\partial\mathcal{D}$ и отражается (почти по касательной, так как W мала), а другая часть уходит от столкновения (проходит мимо). Отражающаяся часть далее делится на счетное число H -компонент прямыми $\mathbb{S}_k$, ограничивающими полосы однородности $\mathbb{H}_k$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.57. Обозначим через W'_k H -компоненту $\mathcal{F}(W)$, попадающую в полосу однородности $\mathbb{H}_k$. Доказать, что

$$\sum_k \lambda(W'_k) < \text{const } |W|_*^{1/4}.$$

Подсказки: заметим, что длина части $\mathcal{F}(W)$, попавшей на $\partial\mathcal{D}$, меньше или равна $\leq \text{const } |W|_*^{1/2}$ (ср. с упражнением 4.50); следовательно, эта часть пересекает $\mathbb{H}_k$ только для числа k , удовлетворяющего $|k| \geq \text{const } |W|_*^{-1/4}$. Тогда напомним, что $\lambda(W'_k) \asymp k^{-2}$ (упражнение 5.18).

Часть W , проходящая без столкновения, может быть позже вновь разрезана скользящим столкновением с $\partial\mathcal{D}$ (см. рис. 5.10), таким образом создавая другое счетное множество отражений H -компонент. Это может произойти самое большее $\tau_{\max}/\tau_{\min}$ раз, где $\tau_{\min}$ и $\tau_{\max}$ — минимальный и максимальный свободные пробеги (упражнение 4.6).

В конечном счете получим $N \leq \tau_{\max}/\tau_{\min} = \text{const}$ счетных множеств H -компонент, появившихся из почти скользящих столкновений, и не более чем одну неустойчивую кривую $W' \subset \mathcal{F}(W)$, которая не попадает ни в одно из скользящих столкновений и попадает в одну из других частей $\partial\mathcal{D}$; см. рис. 5.10.

Предположим сначала, что $W' \cap \mathbb{S} = \emptyset$. Тогда W' — это единственная H -компонента. Она гарантированно сжимается под действием $\mathcal{F}^{-1}$ только с небольшим коэффициентом Λ_*^{-1} ; см. (5.35). Таким образом, приходим к

$$\sum_i \lambda(W_i) \leq \Lambda_*^{-1} + \text{const } |W|_*^{1/4}. \quad (5.39)$$

Этого достаточно, чтобы доказать (5.38), так как $\Lambda_* > 1$.

Может оказаться, что W' пересекает несколько линий $\mathbb{S}_k$, $|k| \geq k_0$, и распадается на две или больше H -компонент W'_j . Этот случай требует дополнительной работы.

УПРАЖНЕНИЕ 5.58. Показать, что в последнем случае $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \sup_{W: |W|_* < \delta} \sum_j \lambda(W'_j) < C/k_0^2$, где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — это постоянная. Указание: если W' пересекает только одну линию $\mathbb{S}_k$, то использовать оценку из упражнения 5.18. Если W' пересекает несколько линий $\mathbb{S}_k \subset \mathbb{S}$, то анализ проходит аналогично упражнению 5.57.

Сделаем давно обещанный выбор k_0 , введенный в определении 5.8. Зафиксируем такое k_0 , что $C/k_0^2 < \Lambda_*^{-1}$; тогда наша оценка в упражнении 5.58 показывает, что (5.39) выполняется во всех случаях. Отсюда следует лемма 5.56. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 5.59. Лемму 5.56 можно расширить на билиарды категории В, но ее доказательство требует определенных модификаций, так как кривая W , возможно, пересекает бесконечное число n -ячеек $D_{l,n}^+$ (для некоторого l и всех достаточно больших n , скажем всех $n \geq n_W$); n -ячейки были определены в § 4.10. Если это происходит, образ $\mathcal{F}(W)$ будет состоять из *бесконечного* числа счетных множеств H -компонент, появляющихся из почти скользящих столкновений. Обозначим через $W_{k,n}$ для $n \geq n_W$ и $|k| \geq k_0$ H -компоненту $\mathcal{F}(W)$, возникающую на $D_{l,n}^+$ и попадающую в полосу однородности $\mathbb{H}_k$. Тогда $\lambda(W_{k,n}) \leq C n^{-1} k^{-2}$, где $C > 0$ — это постоянная; см. упражнение 5.26. Обратим внимание, что $\mathcal{F}(D_{l,n}^+) = D_{l',n}^-$ — это «отрицательная» n -ячейка и ее размер равен $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ (см. упражнение 4.53); следовательно, она может пересекать только однородные полосы $\mathbb{H}_k$ с $|k| \geq c n^{1/4}$, где $c > 0$ — это постоянная. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_W}^{\infty} \sum_{|k|=c n^{1/4}}^{\infty} \lambda(W_{k,n}) &\leq \sum_{n=n_W}^{\infty} \sum_{|k|=c n^{1/4}}^{\infty} C n^{-1} k^{-2} \leq \\ &\leq \sum_{n=n_W}^{\infty} 2 C c^{-1} n^{-5/4} \leq \\ &\leq 10 C c^{-1} n_W^{-1/4}. \end{aligned}$$

Так как $n_W \rightarrow \infty$ при $|W| \rightarrow 0$, получим лемму 5.56 для билиардов типа В.

Продолжим доказывать леммы о росте. Благодаря (5.38) существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\vartheta_1 := e^{C\delta_0^{1/3}} \max \left\{ \Lambda_*^{-1}, \sup_{W: |W|_* < \delta_0} \sum_i \lambda(W_i) \right\} < 1, \quad (5.40)$$

где $C > 0$ — постоянная из леммы 5.27. Также введем обозначение

$$\vartheta_0 := e^{-C\delta_0^{1/3}} \vartheta_1 = \max \left\{ \Lambda_*^{-1}, \sup_{W: |W|_* < \delta_0} \sum_i \lambda(W_i) \right\}. \quad (5.41)$$

Заметим, что $\vartheta_0 < \vartheta_1$. Кроме того, предположим, что $\vartheta_0 \Lambda_* \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.52. Используем индукцию по n . Сначала полагаем $n = 1$ и докажем немного более сильную оценку

$$\mathbf{m}_W^*(r_1(x) < \varepsilon) \leq \vartheta_0 \Lambda_* \mathbf{m}_W^*(r_0(x) < \varepsilon / \Lambda_*) + \zeta_0 \varepsilon \mathbf{m}_W^*(W) \quad (5.42)$$

для некоторой постоянной $\zeta_0 > 0$, определенной ниже. Заметим, что из этой оценки следует оценка теоремы 5.52, где $n = 1$ и $c_1 = 1$, $c_2 = \zeta_0$.

Предположим, что $|W|_* < \delta_0$. Пусть W_i обозначает все H -компоненты $\mathcal{F}(W)$. Для каждого i множество $W_i \cap \mathcal{F}(\{r_1(x) < \varepsilon\})$ — это объединение двух подынтервалов компоненты W_i , каждый длиной ε , соприкасающихся своими концевыми точками (эти интервалы могут пересекаться, если $2\varepsilon > |W_i|_*$). Тогда множество $\mathcal{F}^{-1}(W_i) \cap \{r_1(x) < \varepsilon\}$ — это подмножество объединений двух подынтервалов в $\mathcal{F}^{-1}(W_i)$ длиной $\lambda(W_i)\varepsilon$; следовательно,

$$\mathbf{m}_W^*(r_1(x) < \varepsilon) \leq \sum_i 2\varepsilon\lambda(W_i) \leq 2\vartheta_0\varepsilon.$$

Отсюда следует (см. следующее упражнение)

$$\mathbf{m}_W^*(r_1(x) < \varepsilon) \leq \vartheta_0\Lambda_* \mathbf{m}_W^*(r_0(x) < \varepsilon/\Lambda_*). \quad (5.43)$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.60. Вывести оценку (5.43). Указание: использовать результат упражнения 5.49, в котором учитывается случай $\varepsilon < \Lambda_*|W|/2$. В иных случаях заметить, что сделанный выбор ϑ_1 гарантирует, что $\vartheta_0\Lambda_* \geq 1$.

Эта оценка оказывается даже лучше, чем (5.42), но здесь надо помнить о предположении $|W|_* < \delta_0$. Таким образом, эта оценка не может быть использована в нашей индуктивной схеме, так как некоторые H -компоненты $\mathcal{F}(W)$ могут быть длиннее, чем δ_0 . Чтобы продолжить индукцию, разделим H -компоненты $\mathcal{F}(W)$ на части, которые короче, чем δ_0 . Это только увеличит множество $\{r_1(x) < \varepsilon\}$. Следовательно, если доказать желаемую оценку на мере большего множества, этого было бы более чем достаточно. Именно это увеличение множества $\{r_1(x) < \varepsilon\}$ дает второй член в (5.42).

Точнее, разделим каждую H -компоненту W_i образа $\mathcal{F}(W)$ длиной $|W_i|_* > \delta_0$ на $k_i + 1$ равных отрезков, где $k_i = \lfloor |W_i|_*/\delta_0 \rfloor$, так что каждый отрезок будет короче, чем δ_0 . Если $|W_i|_* < \delta_0$, то полагаем $k_i = 0$ и оставляем W_i без изменений. Назовем полученные отрезки *укороченными H -компонентами $\mathcal{F}(W)$* .

На каждой исходной (неукороченной) H -компоненте W_i существует ровно k_i точек, которые делят его на укороченные H -компоненты. Объединение прообразов ε -окрестностей этих разделяющих точек имеет меру, ограниченную сверху

$$\begin{aligned} &\leq 2\varepsilon \sum_i k_i \lambda(W_i) \leq 2\delta_0^{-1}\varepsilon \sum_i |W_i|_* \lambda(W_i) \leq \\ &\leq 2e^{C\delta_0^{1/3}} \delta_0^{-1}\varepsilon \sum_i |\mathcal{F}^{-1}(W_i)|_* = 2e^{C\delta_0^{1/3}} \delta_0^{-1}\varepsilon |W|_*, \end{aligned}$$

где коэффициент $e^{C\delta_0^{1/3}}$ отвечает за возможные искажения W_i под действием отображения $\mathcal{F}^{-1}$; см. лемму 5.27. Заметим, что константа C здесь может отличаться от константы C в лемме 5.27; это должно объяснить возможную неоднородность плотностей; см. (5.34). Эта оценка завершает доказательство (5.42) с $\zeta_0 = 2e^{C\delta_0^{1/3}}\delta_0^{-1}$.

Далее докажем индукцией по $n \geq 1$, что

$$\mathbf{m}_W^*(r_n(x) < \varepsilon) \leq (\vartheta_1 \Lambda_*)^n \mathbf{m}_W^*(r_0(x) < \varepsilon/\Lambda_*^n) + \zeta_1(1 + \vartheta_1 + \dots + \vartheta_1^{n-1})\varepsilon \mathbf{m}_W^*(W), \quad (5.44)$$

где $\zeta_1 = e^{C\delta_0^{1/3}}\zeta_0$. Случай $n = 1$ следует из (5.42), так как $\vartheta_0 < \vartheta_1$ и $\zeta_0 < \zeta_1$. Предполагая, что (5.44) доказано для некоторого $n \geq 1$, применяем (5.42) к каждой укороченной Н-компоненте $W' \subset \mathcal{F}^n(W)$ и получим

$$\mathbf{m}_{W'}^*(r_1(y) < \varepsilon) \leq \vartheta_0 \Lambda_* \mathbf{m}_{W'}^*(r_0(y) < \varepsilon/\Lambda_*) + \zeta_0 \varepsilon |W'|_*.$$

Следовательно, на ее прообразе $W'' = \mathcal{F}^{-n}(W')$ получим

$$\mathbf{m}_{W''}^*(r_{n+1}(y) < \varepsilon) \leq \vartheta_1 \Lambda_* \mathbf{m}_{W''}^*(r_n(y) < \varepsilon/\Lambda_*) + \zeta_1 \varepsilon |W''|_*$$

(чтобы учесть возможные искажения W' под действием отображения $\mathcal{F}^{-n}$, заменим ϑ_0 на ϑ_1 и ζ_0 на ζ_1 в соответствии с леммой 5.27). Суммируя по всем $W'' \subset W$ и затем используя предположение индукции, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_W^*(r_{n+1}(x) < \varepsilon) &\leq (\vartheta_1 \Lambda_*) \mathbf{m}_W^*(r_n(x) < \varepsilon/\Lambda_*) + \zeta_1 \varepsilon |W|_* \leq \\ &\leq (\vartheta_1 \Lambda_*)^{n+1} \mathbf{m}_W^*(r_0(x) < \varepsilon/\Lambda_*^{n+1}) + \\ &+ \zeta_1(1 + \vartheta_1 + \dots + \vartheta_1^n) \varepsilon \mathbf{m}_W^*(W), \end{aligned}$$

что доказывает (5.44) для всех $n \geq 1$ по индукции. Отсюда следует теорема 5.52 для «адаптированной» меры $\mathbf{m}_W^*$ с $c_1 = 1$ и $c_2 = \zeta_1/(1 - \vartheta_1)$. Наконец, поскольку постоянная C из (5.34) может быть учтена в значениях c_1 и c_2 , получим утверждение теоремы 5.52 для меры Лебега $\mathbf{m}_W$. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.53. Вторая лемма о росте следует из первой на основе общих рассуждений (никаких сведений, характерных для билиардной динамики, не используется). Полагаем $\kappa = 1/\min\{|\ln \vartheta_1|, |\ln \hat{\Lambda}|\}$. Легко проверить, что для всех $n \geq \kappa |\ln |W||$ справедливы неравенства $\hat{\Lambda}^n > |W|^{-1}$ и $\vartheta_1^n < |W|$. Заметим также, что $\mathbf{m}_W(r_0 < \varepsilon/\hat{\Lambda}^n) < 2\varepsilon/\hat{\Lambda}^n$. Следовательно, с учетом теоремы 5.52,

$$\mathbf{m}_W(r_n(x) < \varepsilon) \leq 2c_1 \vartheta_1^n \varepsilon + c_2 \varepsilon \mathbf{m}_W(W) \leq (2c_1 + c_2) \varepsilon \mathbf{m}_W(W). \quad \blacksquare$$

5.11. Третья лемма о росте

Напомним, что растяжение любой малой неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}$ проходит через две этапа (режима); см. заключительную часть § 5.9. Во время первого этапа типичные Н-компоненты $\mathcal{F}^n(W)$ продолжают расти, тогда как во время второго периода типичные Н-компоненты остаются достаточно большими (длиной $\mathcal{O}(1)$) в течение всего времени. Точнее говоря, согласно второй лемме о росте, большую часть времени орбиты типичных точек $x \in W$ будут оставаться в достаточно длинных Н-компонентах $\mathcal{F}^n(W)$ и достаточно далеко от своих концевых точек; то есть $r_n(x) = \mathcal{O}(1)$ почти для всех значений n .

Однако образы некоторых «невезучих» точек $x \in W$ могут задерживаться в коротких Н-компонентах (или в малых окрестностях концевых точек длинных Н-компонент, что в равной степени плохо) в течение долгого промежутка времени. То есть для некоторых $x \in W$ возможен случай, когда $r_n(x) < \varepsilon$ на интервале $n_1 \leq n < n_2$, где $\varepsilon > 0$ мало. В этом параграфе оценим меру таких «неудачных» точек.

Сначала проведем эвристическое доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ таким малым, что

$$\mathbf{m}_W(r_n(x) < \varepsilon) / \mathbf{m}_W(W) \leq \theta < 1 \quad \forall n \geq \varkappa |\ln |W||$$

(это возможно благодаря теореме 5.53). Представим достаточно идеальную картину, когда на каждой итерации $\mathcal{F}$ все точки $x \in \mathcal{F}^n(W)$ «перегруппировываются случайным образом», так что «события» $\{r_n(x) < \varepsilon\}$ независимы в строго вероятностном смысле. Тогда их пересечение имело бы вероятность

$$\mathbf{m}_W \left(\max_{n_1 \leq n < n_2} r_n(x) < \varepsilon \right) / \mathbf{m}_W(W) \leq \theta^{n_2 - n_1}. \quad (5.45)$$

В действительности билиардная динамика детерминистическая, так что такие события не могут быть в полном смысле независимы, но аналог оценки (5.45) выполняется!

Теорема 5.61 (третья лемма о росте). *Существуют постоянные $\varepsilon_0 > 0$ и $\vartheta_2 \in (0, 1)$ такие, что для любого $n_2 > n_1 > \varkappa |\ln |W||$*

$$\mathbf{m}_W \left(\max_{n_1 \leq n < n_2} r_n(x) < \varepsilon_0 \right) \leq \vartheta_2^{n_2 - n_1} \mathbf{m}_W(W).$$

Другими словами, вероятность того, что орбита $x \in W$ остается слишком близко к концевым точкам H -компонент в течение $k = n_2 - n_1$ последовательных итераций, экспоненциально мала по k .

Эта теорема будет доказана в конце параграфа, но сначала выведем следствие. Для заданных $n_2 > n_1 > \kappa |\ln |W||$, для каждой точки $x \in W$ полагаем

$$\bar{n}(x) = \min_{n \geq n_1} \{n : |W_n(x)| \geq 2\varepsilon_0\},$$

где $W_n(x)$ обозначает H -компоненту $\mathcal{F}^n(W)$, которая содержит точку $\mathcal{F}^n(x)$. Другими словами, $\bar{n}(x)$ — это первое время, после начальных n_1 итераций $\mathcal{F}$, когда образ точки x принадлежит H -компоненте длины $\geq 2\varepsilon_0$ (если этого никогда не происходит, полагаем $\bar{n}(x) = \infty$). Обозначим $W_{n_1, n_2} = \{x \in W : \bar{n}(x) < n_2\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.62. Показать, что если $\bar{n}(x) = n$, то $\bar{n}(y) = n$ для всех $y \in \mathcal{F}^{-1}(W_n(x))$. Сделать вывод, что множество $\{\mathcal{F}^{\bar{n}(x)}(x) : x \in W_{n_1, n_2}\}$ — это объединение слабо однородных неустойчивых кривых длины $\geq 2\varepsilon_0$.

Пусть применяется следующее «правило останова» в эволюции H -компонент $\mathcal{F}^n(W)$. В момент $n = n_1$ все H -компоненты $\mathcal{F}^n(W)$, длина которых $\geq 2\varepsilon_0$, задерживаются («замораживаются»), а отображение $\mathcal{F}$ действует только на другие (более короткие) H -компоненты. Образы последних состоят из H -компонент, и на каждой итерации $\mathcal{F}$ будем останавливать («замораживать») каждую H -компоненту, длина которой достигает $2\varepsilon_0$ или превышает ее. В момент $n = n_2 - 1$ только те H -компоненты, длина которых $< 2\varepsilon_0$ и прообразы которых в моменты $n_1 \leq n < n_2$ принадлежат H -компонентам с длиной меньше, чем $2\varepsilon_0$, останутся «активными». Очевидно, объединение этих «живых» H -компонент даст $\mathcal{F}^{n_2-1}(W \setminus W_{n_1, n_2})$.

Из теоремы 5.61 вытекает следующее следствие.

Следствие 5.63.

$$m_W(W \setminus W_{n_1, n_2}) \leq \vartheta_2^{n_2 - n_1} m_W(W).$$

Таким образом, $k = n_2 - n_1$ последовательных итераций $\mathcal{F}$, с учетом описанного правила останова, преобразует кривую W , с точностью до множества экспоненциально (по k) малой меры, в «замерзшие» H -компоненты длины $\geq 2\varepsilon_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.61. Эта теорема была впервые доказана в [BSC91, приложение 3] и вновь доказана в [Y98, с. 639] уже с помощью аргументов, свойственных билиардам. Однако теорему 5.61 можно вывести из второй леммы о росте в очень общей форме, не используя специфику билиардной динамики. Так и поступим сейчас.

Сначала зафиксируем некоторое θ , удовлетворяющее

$$e^{-1/\varkappa} < \theta < 1. \quad (5.46)$$

Затем выберем $\varepsilon_0 > 0$ и $b > 0$ такое малое, что

$$|\ln \varepsilon_0| \geq \frac{|\ln \theta| + |\ln b|}{1 - \varkappa |\ln \theta|} \quad (5.47)$$

и

$$\vartheta_2 := \theta \left(1 + bc_3 e^{C(2\varepsilon_0)^{1/3}} \right) < 1, \quad (5.48)$$

где $C > 0$ — постоянная в лемме 5.27 об ограничениях на искажения (причина для такого выбора станет понятна ниже).

Далее построим три объекта:

(а) убывающую последовательность подмножеств

$$W = \widetilde{W}_0 \supset \widetilde{W}_1 \supset \widetilde{W}_2 \supset \dots \supset \widetilde{W}_{n_2 - n_1};$$

(б) «характеристическую» функцию $\mathbf{n}(x)$ на W , которая принимает значение $\mathbf{n}(x) = i$ во всех точках $x \in \widetilde{W}_i \setminus \widetilde{W}_{i+1}$;

(с) последовательность дополнительных функций $\mathbf{k}_1(x)$ на $\widetilde{W}_1$, $\mathbf{k}_2(x)$ на $\widetilde{W}_2$ и т.д., значения которых являются натуральными числами; см. ниже.

Для краткости будем также использовать обозначение $\mathbf{t}_i(x) = n_1 + \mathbf{k}_1(x) + \dots + \mathbf{k}_{i-1}(x)$ для всех $x \in \widetilde{W}_{i-1}$ и $i \geq 2$ (и $\mathbf{t}_1(x) \equiv n_1$ на всем W). Функции $\mathbf{k}_i$ равны длинам некоторых временных интервалов, а $\mathbf{t}_i$ — моменты времени, когда множества $\widetilde{W}_i$ определены. Величины $\mathbf{k}_i$ удовлетворяют ограничению

$$\mathbf{k}_1(x) + \dots + \mathbf{k}_{n(x)}(x) = n_2 - n_1$$

во всех точках $x \in W$, где $\max_{n_1 \leq n < n_2} r_n(x) < \varepsilon_0$.

Сначала определим $\widetilde{W}_0 = W$ и

$$\widetilde{W}_1 = \{x \in \widetilde{W}_0 : r_{n_1}(x) < \varepsilon_0\}.$$

Полагаем $\mathbf{n}(x) = 0$ на $\widetilde{W}_0 \setminus \widetilde{W}_1$. На множестве $\widetilde{W}_1$ функция $\mathbf{n}(x)$ принимает положительные значения; см. ниже.

Множество $\mathcal{F}^{n_1}(\widetilde{W}_1)$ — это объединение неустойчивых кривых, которые обозначим через $\widehat{W}_{1,j}$, $j \geq 1$. Заметим, что каждая кривая $\widehat{W}_{1,j}$ является или H -компонентой $\mathcal{F}^{n_1}(W)$ длины $\leq 2\varepsilon_0$, или интервалом длины ε_0 , смежным с одной из двух концевых точек более длинной H -компоненты $\mathcal{F}^{n_1}(W)$.

На каждой кривой $\widetilde{W}_{1,j} := \mathcal{F}^{-n_1}(\widehat{W}_{1,j}) \subset \widetilde{W}_1$ определим функцию

$$k_1(x) = \left[\varkappa \left| \ln |\widehat{W}_{1,j}| \right| \right] + 1. \quad (5.49)$$

В случае если $n_1 + k_1(x) \geq n_2$, изменяем значение $k_1(x) = n_2 - n_1$. Таким образом, функция $k_1(x)$ определена на $\widetilde{W}_1$. Для краткости полагаем $t_1(x) \equiv n_1$ и $t_2(x) = t_1 + k_1(x)$.

Далее определим по индукции для $i \geq 2$

$$\widetilde{W}_i = \{x \in \widetilde{W}_{i-1} : t_i(x) < n_2 \text{ \& } r_{t_i(x)}(x) < \varepsilon_0\}.$$

Множество $\{\mathcal{F}^{t_i(x)}(x) : x \in \widetilde{W}_i\}$ — это объединение неустойчивых кривых, которые обозначим через $\widehat{W}_{i,j}$, $j \geq 1$. Эти кривые принадлежат образам W , полученным на различных итерациях $\mathcal{F}$, так как функция $t_i(x)$ меняется. Однако каждая кривая $\widehat{W}_{i,j}$ является или H -компонентой (для некоторой итерации W) длины $\leq 2\varepsilon_0$, или подынтервалом интервала длины ε_0 , смежного с одной из двух концевых точек более длинной H -компоненты.

Теперь на каждой кривой $\widetilde{W}_{i,j} := \mathcal{F}^{-t_i}(\widehat{W}_{i,j}) \subset \widetilde{W}_i$ определим функцию

$$k_i(x) = \left[\varkappa \left| \ln |\widehat{W}_{i,j}| \right| \right] + 1. \quad (5.50)$$

В случае если $t_i(x) + k_i(x) \geq n_2$, переопределим $k_i(x) = n_2 - t_i(x)$. Таким образом, функция $k_i(x)$ определена на $\widetilde{W}_i$. Для краткости полагаем $t_{i+1}(x) = t_i(x) + k_i(x)$. Пусть $n(x) = i - 1$ во всех точках $x \in \widetilde{W}_{i-1} \setminus \widetilde{W}_i$.

Очевидно, после не более чем $n_2 - n_1$ шагов это индуктивное построение будет закончено.

УПРАЖНЕНИЕ 5.64. Проверить, что $k_1(x) + \dots + k_n(x) = n_2 - n_1$ во всех точках $x \in W$, где $\max_{n_1 \leq n < n_2} r_n(x) < \varepsilon_0$.

Теперь воспользуемся теоремой 5.53 и сделаем некоторые оценки меры. Во-первых,

$$m_W(\widetilde{W}_1)/m_W(W) \leq c_3\varepsilon_0.$$

Кроме того, для каждого $k_1 \geq 1$ рассмотрим интервалы $\widetilde{W}_{1,j} \subset \widetilde{W}_1$, на которых $k_1(x) = k_1$. Их образы $\mathcal{F}^{n_1}(\widetilde{W}_{1,j}) = \widehat{W}_{1,j}$ имеют длину $|\widehat{W}_{1,j}| \leq e^{-(k_1-1)/\varkappa}$ с учетом (5.49); следовательно, $r_{n_1}(x) < e^{-(k_1-1)/\varkappa}$ на $\widehat{W}_{1,j}$, и, таким образом,

$$m_W(k_1(x) = k_1)/m_W(W) \leq c_3 e^{-(k_1-1)/\varkappa}.$$

Комбинируя эти оценки, получим

$$m_W(k_1(x) = k_1)/m_W(W) \leq c_3 \min \left\{ \varepsilon_0, e^{-(k_1-1)/\varkappa} \right\}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.65. Показать, что при условии (5.47) справедливо неравенство

$$\min \left\{ \varepsilon_0, e^{-(k_1-1)/\varkappa} \right\} \leq b\theta^{k_1}$$

для всех $k_1 \geq 1$.

Таким образом, приходим к оценке

$$\frac{m_W(k_1(x) = k_1)}{m_W(W)} \leq bc_3\theta^{k_1}. \quad (5.51)$$

Далее для любого $i \geq 1$ рассмотрим произвольный интервал $\widehat{W}_{i,j}$. Напомним, что функции $t_i(x)$, $k_i(x)$ и $t_{i+1}(x) = t_i(x) + k_i(x)$ постоянны на $\widehat{W}_{i,j} = \mathcal{F}^{-t_i}(\widehat{W}_{i,j})$; обозначим их значения через t_i , k_i и t_{i+1} соответственно, опуская аргумент x .

Предположим, что $t_{i+1} < n_2$. Множество $\mathcal{F}^{k_i}(\widehat{W}_{i,j})$ имеет свои собственные Н-компоненты. Легко увидеть, что множество $\mathcal{F}^{t_{i+1}}(\widehat{W}_{i,j} \cap \widehat{W}_{i+1})$ лежит внутри объединения ε_0 -окрестностей концевых точек этих Н-компонент. Применяя теорему 5.53 к кривой $\widehat{W}_{i,j}$, получим

$$m_{\widehat{W}_{i,j}}(\widehat{W}_{i,j} \cap \mathcal{F}^{t_i}(\widehat{W}_{i+1})) \leq c_3 \varepsilon_0 m_{\widehat{W}_{i,j}}(\widehat{W}_{i,j})$$

(заметим, что теорема 5.53 может использоваться здесь благодаря сделанному выбору k_i в (5.50), и это объясняет определение k_i).

Кроме того, для каждого целого $k_{i+1} \geq 1$ рассмотрим интервалы $\widehat{W}_{i+1,l} \subset \widehat{W}_{i,j} \cap \widehat{W}_{i+1}$, на которых $k_{i+1}(x) = k_{i+1}$. Их образы $\mathcal{F}^{t_{i+1}}(\widehat{W}_{i+1,l}) = \widehat{W}_{i+1,l}$ имеют длины $|\widehat{W}_{i+1,l}| \leq e^{-(k_{i+1}-1)/\varkappa}$ с уче-

том (5.50); следовательно, $r_{t_{i+1}}(x) < e^{-(k_{i+1}-1)/\varkappa}$ на $\widetilde{W}_{i+1,l}$, и, таким образом,

$$\mathbf{m}_{\widehat{W}_{i,j}}(\widehat{W}_{i,j} \cap \mathcal{F}^{t_i}(\mathbf{k}_{i+1}(x) = k_{i+1})) \leq c_3 e^{-(k_{i+1}-1)/\varkappa} \mathbf{m}_{\widehat{W}_{i,j}}(\widehat{W}_{i,j}).$$

Комбинируя оценки выше с учетом упрощения 5.65, получим

$$\mathbf{m}_{\widehat{W}_{i,j}}(\widehat{W}_{i,j} \cap \mathcal{F}^{t_i}(\mathbf{k}_{i+1}(x) = k_{i+1})) \leq bc_3 \theta^{k_{i+1}} \mathbf{m}_{\widehat{W}_{i,j}}(\widehat{W}_{i,j}).$$

Возвращаясь к оценке для W под действием $\mathcal{F}^{-t_i}$, получим

$$\mathbf{m}_{\widetilde{W}_{i,j}}(\widetilde{W}_{i,j} \cap (\mathbf{k}_{i+1}(x) = k_{i+1})) \leq \zeta \theta^{k_{i+1}} \mathbf{m}_{\widetilde{W}_{i,j}}(\widetilde{W}_{i,j}),$$

где для краткости $\zeta = bc_3 e^{C(2\varepsilon_0)^{1/3}}$. Дополнительный экспоненциальный коэффициент $e^{C(2\varepsilon_0)^{1/3}}$ включен здесь, чтобы учесть возможные искажения в соответствии с леммой 5.27.

Теперь заметим, что функции $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_i$ постоянны на каждой кривой $\widetilde{W}_{i,j}$. Пусть $k_1, \dots, k_i$ — произвольная последовательность натуральных чисел, и обозначим через $\widetilde{W}_{k_1, \dots, k_i}$ объединение всех интервалов $\widetilde{W}_{i,j}$, на которых $\mathbf{k}_1(x) = k_1, \dots, \mathbf{k}_i(x) = k_i$. Складывая предыдущие оценки по всем интервалам $\widetilde{W}_{i,j} \subset \widetilde{W}_{k_1, \dots, k_i}$, получим

$$\frac{\mathbf{m}_W(\widetilde{W}_{k_1, \dots, k_i} \cap \{\mathbf{k}_{i+1}(x) = k_{i+1}\})}{\mathbf{m}_W(\widetilde{W}_{k_1, \dots, k_i})} \leq \zeta \theta^{k_{i+1}}. \quad (5.52)$$

Очевидно, множество в числителе не что иное, как $\widetilde{W}_{k_1, \dots, k_{i+1}}$. Как будет показано ниже, оценки вероятностного типа (5.51) и (5.52) очень важны в нашем анализе.

Далее, пусть $m \geq 1$ и $S = \{k_1, \dots, k_m\}$ — последовательность натуральных чисел таких, что

$$k_1 + \dots + k_m = n_2 - n_1. \quad (5.53)$$

Обозначим

$$\widetilde{W}_S = \widetilde{W}_{k_1, \dots, k_m} = \{x \in W : \mathbf{n}(x) = m, \mathbf{k}_1(x) = k_1, \dots, \mathbf{k}_m(x) = k_m\}.$$

Умножая оценки (5.51) и (5.52) для всех $i = 1, \dots, m-1$, получим

$$\mathbf{m}_W(\widetilde{W}_S) \leq \zeta^m \theta^{n_2 - n_1} \mathbf{m}_W(W) \quad (5.54)$$

(заметим, что $bc_3 < \zeta$).

Складывая (5.54) по всем возможным m и последовательностям $S = \{k_1, \dots, k_m\}$, удовлетворяющим (5.53), и используя упражнение 5.64, получим

$$\begin{aligned} m_W(\widetilde{W}) &\leq \sum_{m=1}^{n_2-n_1} \binom{n_2-n_1-1}{m-1} \zeta^m \theta^{n_2-n_1} m_W(W) = \\ &= \zeta(1+\zeta)^{n_2-n_1-1} \theta^{n_2-n_1} m_W(W), \end{aligned}$$

где выражение $\binom{n_2-n_1-1}{m-1}$ обозначает биномиальные коэффициенты, получающиеся при подсчете числа соответствующих последовательностей $\{S\}$. Применение (5.48) завершает доказательство теоремы 5.61. ■

5.12. Размер Н-многообразий (локальная оценка)

В § 5.5 была получена линейная «оценка хвоста» (5.16) для размера неустойчивых Н-многообразий $W_{\mathbb{H}}^u(x) \subset \mathcal{M}$, которая имеет вид

$$\mu\{x: r_{\mathbb{H}}^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon.$$

Здесь $r_{\mathbb{H}}^u(x)$ обозначает расстояние в евклидовой метрике, измеренное вдоль $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ от x до ближайшей концевой точки $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ (в некоторой степени $r_{\mathbb{H}}^u(x)$ характеризует размер $W_{\mathbb{H}}^u(x)$). Это глобальная оценка для неустойчивых Н-многообразий во всем пространстве столкновений $\mathcal{M}$. В этом параграфе выведем аналогичную локальную оценку для Н-многообразий, пересекающих данную устойчивую кривую W , в терминах меры Лебега на W .

Пусть $W \subset \mathcal{M}$ — устойчивая кривая и m_W обозначает меру Лебега на ней.

Теорема 5.66. *Для любой устойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}$ Н-многообразие $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ существует (то есть $r_{\mathbb{H}}^u(x) > 0$) для почти всех $x \in W$ по мере m_W . Более того,*

$$m_W\{x \in W: r_{\mathbb{H}}^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon \quad (5.55)$$

для некоторой постоянной $C = C(\mathcal{D}) > 0$ и всех $\varepsilon > 0$.

Эта теорема имеет свой аналог для обратного хода времени (принцип обратимости времени объяснялся в § 4.3).

Теорема 5.67. *Для любой неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}$ устойчивое Н-многообразие $W_{\mathbb{H}}^s(x)$ существует (то есть $r_{\mathbb{H}}^s(x) > 0$) для почти всех $x \in W$ по мере $\mathbf{m}_W$. Более того,*

$$\mathbf{m}_W\{x \in W : r_{\mathbb{H}}^s(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon, \quad (5.56)$$

где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — постоянная.

Здесь $W_{\mathbb{H}}^s(x)$ обозначает максимальное устойчивое Н-многообразие, проходящее через $x \in \mathcal{M}$, а $r_{\mathbb{H}}^s(x)$ — расстояние, измеренное вдоль $W_{\mathbb{H}}^s(x)$ от x до ближайшей концевой точки $W_{\mathbb{H}}^s(x)$. Достаточно доказать или теорему 5.66, или теорему 5.67; докажем последнюю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выведем теорему из первой леммы о росте. Сначала необходимо сформулировать аналог упражнения 5.19 для обратного хода времени, который требует введения новых обозначений. Пусть $E_s(x)$ — кусочно-постоянная функция на $\mathcal{M}$, имеющая вид $E_s(x) = (|k| + 1)^2$ для всех $x \in \mathcal{F}(\mathbb{H}_k)$. Заметим, что $E_s(x) = E_u(\mathcal{F}^{-2}x)$.

Упражнение 5.18 тоже имеет свой аналог для обратного хода времени, согласно которому

$$\tilde{c}E_s(x) \leq \frac{\|D_x \mathcal{F}^{-1}(dx)\|}{\|dx\|} \leq \tilde{c}^{-1}E_s(x) \quad (5.57)$$

для всех устойчивых векторов $dx \in T_x \mathcal{M}$ и всех $x \in \mathcal{M}$, где $\tilde{c} = \tilde{c}(\mathcal{D}) > 0$ — постоянная².

Для каждой точки $x \in \mathcal{M}$ обозначим через $d^s(x, \mathcal{S}_{-1}^{\mathbb{H}})$ длину кратчайшей устойчивой кривой, которая соединяет x с множеством $\mathcal{S}_{-1}^{\mathbb{H}}$. Тогда «обратимость времени» упражнения 5.19 можно записать в виде

$$r_{\mathbb{H}}^s(x) \geq \min_{n \geq 1} \tilde{c} \widehat{c} E_s(\mathcal{F}^n x) \Lambda^{n-1} d^s(\mathcal{F}^n x, \mathcal{S}_{-1}^{\mathbb{H}}). \quad (5.58)$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.68. Доказать формулы (5.57) и (5.58).

Далее напомним, что для заданной неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}$ функция $r_n(x)$ обозначает расстояние от точки $\mathcal{F}^n(x)$ до ближайшей концевой точки Н-компоненты $\mathcal{F}^n(W)$, содержащей точку $\mathcal{F}^n(x)$.

²Для билиардов категории В (согласно нашему анализу в конце § 5.5) функция E_s должна быть переопределена в n -ячейках $D_{l,n}^-$, которые были описаны в § 4.10. А именно, для каждого $x \in \mathcal{F}(\mathbb{H}_k) \cap D_{l,n}^-$ необходимо ввести функцию $E_s(x) = n(|k| + 1)^2$. Тогда «обратимость времени» из упражнения 5.26 дает оценку (5.57) для столов категории В.

УПРАЖНЕНИЕ 5.69. Доказать, что существует большая постоянная $\tilde{C} = \tilde{C}(\mathcal{D}) > 0$ такая, что

$$\tilde{C} \tilde{c} \hat{c} E_s(\mathcal{F}^n x) d^s(\mathcal{F}^n x, S_{-1}^{\mathbb{H}}) \geq r_{n-1}(x)$$

для всех $n \geq 1$. Указание: используя второе неравенство в (5.57), показать, что длина кратчайшей устойчивой кривой, которая соединяет $\mathcal{F}^{n-1}(x)$ с множеством S_0 , не превышает $\tilde{c}^{-1} E_s(\mathcal{F}^n x) d^s(\mathcal{F}^n x, S_{-1}^{\mathbb{H}})$. Благодаря (4.14) длина самой длинной устойчивой кривой, которая соединяет $\mathcal{F}^{n-1}(x)$ с множеством S_0 , не превышает $C E_s(\mathcal{F}^n x) d^s(\mathcal{F}^n x, S_{-1}^{\mathbb{H}})$ для некоторой постоянной $C = C(\mathcal{D}) > 0$. С учетом обратимости времени, то же самое справедливо для длины самой длинной неустойчивой кривой, которая соединяет $\mathcal{F}^{n-1}(x)$ с множеством S_0 .

В результате приходим к оценке

$$r_{\mathbb{H}}^s(x) \geq \min_{n \geq 0} \tilde{C}^{-1} \Lambda^n r_n(x).$$

Следовательно,

$$\mathbf{m}_W\{x \in W : r_{\mathbb{H}}^s(x) < \varepsilon\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{m}_W\{r_n(x) < \tilde{C} \Lambda^{-n} \varepsilon\}.$$

С учетом первой леммы о росте (теорема 5.52 и следующее за ней замечание) имеем

$$\mathbf{m}_W\{r_n(x) < \tilde{C} \Lambda^{-n} \varepsilon\} \leq \tilde{C} c_1 \vartheta_1^n \Lambda^{-n} \varepsilon + \tilde{C} c_2 \Lambda^{-n} \varepsilon \mathbf{m}_W(W).$$

Суммирование по $n \geq 0$ доказывает (5.56). ■

5.13. Фундаментальная теорема

Завершим эту главу так называемой «фундаментальной теоремой теории рассеивающих билиардов». Обобщим (4.53), вводя

$$S_{\infty}^{\mathbb{H}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n^{\mathbb{H}} \quad \text{и} \quad S_{-\infty}^{\mathbb{H}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_{-n}^{\mathbb{H}}. \quad (5.59)$$

Напомним, что множества $S_{\pm n}^{\mathbb{H}}$ являются особенностями для отображений $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{\pm n}$; множества $S_{\pm n}^{\mathbb{H}}$ включают в себя «действительные особенности» $S_{\pm n}$ и образы (прообразы) границ полос однородности:

$$S_{\pm n}^{\mathbb{H}} = S_{\pm n} \cup \left(\bigcup_{m=0}^n \mathcal{F}^{\mp m}(\mathbb{S}) \right). \quad (5.60)$$

Следующий факт называется *фундаментальной теоремой теории рассеивающих билиардов* Синая [Sin70, BS73]:

Теорема 5.70. Пусть $x \in \mathcal{M} \setminus S_{\infty}^{\mathbb{H}}$. Тогда для любого $q > 0$ и $A > 0$ существует открытая окрестность $\mathcal{U}_x^u \subset \mathcal{M}$ точки x такая, что для любой неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{U}_x^u$

$$\mathbf{m}_W(y \in W : r_{\mathbb{H}}^s(y) > A|W|) \geq (1 - q) \mathbf{m}_W(W).$$

Аналогично, пусть $x \in \mathcal{M} \setminus S_{-\infty}^{\mathbb{H}}$. Тогда для любого $q > 0$ и $A > 0$ существует открытая окрестность $\mathcal{U}_x^s \subset \mathcal{M}$ точки x такая, что для любой устойчивой кривой $W \subset \mathcal{U}_x^s$

$$\mathbf{m}_W(y \in W : r_{\mathbb{H}}^u(y) > A|W|) \geq (1 - q) \mathbf{m}_W(W).$$

Заметим, что вторая часть — это аналог первой, записанный для обратного хода времени.

Важность этой теоремы становится очевидной, если выбрать большое $A \gg 1$ и малое $q \approx 0$. Тогда, соответственно, подавляющее большинство точек $y \in W$ лежало бы на устойчивых (неустойчивых) $\mathbb{H}$ -многообразиях, которые намного длиннее, чем сама кривая W . Заметим, что эти $\mathbb{H}$ -многообразия продолжают далеко за пределы W , в обе стороны W ; см. рис. 5.11 (слева).

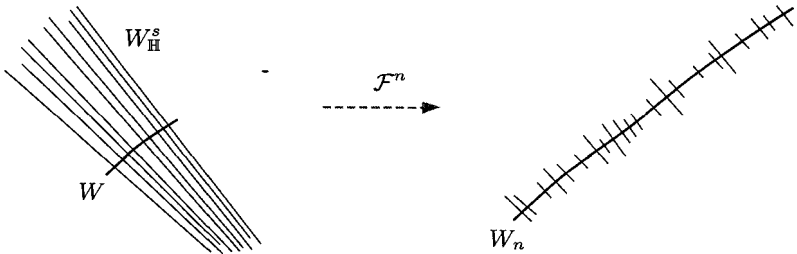


Рис. 5.11. Фундаментальная теорема 5.70

Заметим, что в оригинальных работах Синая [Sin70, BS73] эта теорема была приведена в немного более слабой форме: она включала неустойчивые и устойчивые многообразия, а не $\mathbb{H}$ -многообразия (первые, в общем случае, намного длиннее; см. § 5.5). Понятие $\mathbb{H}$ -многообразий было в действительности введено гораздо позднее в [BSC91].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.70. Достаточно доказать первую часть. Главная идея заключается в том, чтобы применить теорему 5.67 к кри-

вой $W_n = \mathcal{F}^n(W)$ для достаточно большого n , что гарантирует, что много коротких устойчивых H -многообразий пересекают W_n . Тогда внесем их обратно под $\mathcal{F}^{-n}$ и получим много длинных устойчивых H -многообразий, пересекающих W ; см. рис. 5.11.

Для заданного $q > 0$ полагаем $p = C^{-1}C_d^{-1}q$, где $C > 0$ — постоянная в теореме 5.67 и $C_d > 0$ — постоянная в лемме 5.27 об ограничениях на искажения. Далее, для заданного $A > 0$ выберем $n \gg 1$ настолько большим, что $A \leq p\hat{c}^2\Lambda^{2n}$, где $\hat{c}$ и Λ появляются в (4.19) (причина для такого выбора станет понятна ниже).

Обозначим через $Q_n^H(x)$ открытую связную компоненту множества $\mathcal{M} \setminus S_n^H$, содержащую точку x . Тогда для любой неустойчивой кривой $W \subset Q_n^H(x)$ ее образ $W_n = \mathcal{F}^n(W)$ будет состоять из одной H -компоненты. Пусть $\mathcal{U}_x^u$ — малая открытая окрестность x такая, что

$$\text{dist}(\mathcal{U}_x^u, \partial Q_n^H(x)) > A \text{diam} \mathcal{U}_x^u.$$

Для произвольной неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{U}_x^u$ применим теорему 5.67 к кривой $W_n = \mathcal{F}^n(W)$ и получим

$$\mathbf{m}_{W_n} \{z \in W_n : r_{\mathbb{H}}^s(z) < p|W_n|\} \leq Cp|W_n|. \quad (5.61)$$

Пусть $z \in W_n$ — точка, где $r_{\mathbb{H}}^s(z) \geq p|W_n|$. Тогда, благодаря равномерной гиперболичности $\mathcal{F}$ (см. с (4.19)), имеем

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{H}}^s(\mathcal{F}^{-n}z) &\geq \min\{\text{dist}(W, \partial Q_n^H(x)), p\hat{c}\Lambda^n|W_n|\} \geq \\ &\geq \min\{A|W|, p\hat{c}^2\Lambda^{2n}|W|\} = \\ &= A|W| \quad (\text{благодаря нашему выбору } n). \end{aligned}$$

Так как все кривые $\mathcal{F}^i(W)$, $0 \leq i \leq n$, слабо однородные, из леммы 5.27 об ограничениях на искажения, оценки (5.61) и соответствующего выбора p следует, что

$$\mathbf{m}_W \{y \in W : r_{\mathbb{H}}^s(y) < A|W|\} \leq C_d Cp|W| = q|W|.$$

Теорема 5.70 доказана. ■

ГЛАВА 6

Эргодические свойства

В данной главе докажем, что рассеивающие билиарды категорий А и В, будучи динамическими системами, являются эргодическими, перемешивающими и имеют свойство Бернулли.

6.1. История

Эргодичность и перемешивание для рассеивающих билиардов категорий А и В были впервые установлены Синаем [Sin70] в 1970 году. Он использовал достаточно прямое доказательство, основанное на «фундаментальной теореме» (теорема 5.70) и методе Хопфа (см. ниже). Свойство Бернулли было получено в 1974 году Дж. Галлавоитти (G. Gallavotti) и Д. Орнштейном [GO74].

Позже выяснилось, что доказательство Синая [Sin70] хорошо работает для равномерно гиперболических билиардов, то есть таких, что неустойчивые векторы растягиваются равномерно в смысле (4.19), но не для неравномерно гиперболических билиардов. Для последних (в особенности для газов из жестких шаров) «фундаментальная теорема» в формулировке, приведенной в § 5.13, не выполняется.

Чтобы установить эргодичность систем жестких шаров, в последующих работах Синая и Чернова [Sin79, SC87, Ch93], а также в работах [KSS90, LW95] было предложено более тщательно продуманное построение «регулярных накрытий» («regular covering»). Именно это построение вместе с методом Хопфа было использовано в доказательстве эргодичности для различных систем жестких шаров [KSS91, KSS92, BLPS92, Sim99, Sim03, Sim04]. Регулярные накрытия были также использованы в некоторых доказательствах эргодичности для других неравномерно гиперболических билиардов [Bu90, Sz92, Mar93b, DM01, DMM03].

Однако в данной книге будет использоваться первоначальное доказательство Синая; его метод прост и элегантен, и он будет применяться

для всех основных типов хаотических билиардов, охваченных этой книгой. Подробнее о более сложном методе регулярных накрытий любознательный читатель может найти в работах [KSS90, LW95, Va92].

6.2. Метод Хопфа: эвристический подход

Почти все доказательства эргодичности для гиперболических систем основаны на методе Хопфа [Ho39, Ho40], который будет введен в этом параграфе неформально, оставим все формальности для следующих двух параграфов.

Предположим, что $F: M \rightarrow M$ — гладкое гиперболическое отображение, сохраняющее вероятностную меру μ . Пусть в каждой точке $x \in M$ существует устойчивое многообразие $W^s(x)$ и неустойчивое многообразие $W^u(x)$.

Утверждение. *Почти всякое устойчивое или неустойчивое многообразие принадлежит (mod 0) одной эргодической компоненте отображения F .*

Формальные определения эргодических компонент, условных мер, генераторов и других понятий, используемых ниже, читатель может найти в приложении С.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ЭВРИСТИЧЕСКОЕ). Пусть $A \subset M$ — эргодическая компонента отображения F . Тогда $F: A \rightarrow A$ сохраняет условную меру μ_A , которая является эргодической. Трассектория почти каждой (по мере μ_A) точки $x \in A$ распределяется в A в соответствии с мерой μ_A . Точнее говоря, если $\{B_k\}$ — счетный генератор σ -алгебры измеримых подмножеств A , то существует подмножество $A_1 \subset A$ полной меры, $\mu_A(A \setminus A_1) = 0$, такое, что для любого $x \in A_1$ и любого k имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \#\{n: 0 < n < N, F^n(x) \in B_k\}/N = \mu_A(B_k).$$

Если устойчивое многообразие W^s пересекает две несовпадающие эргодические компоненты $A, B \subset M$, то траектории типичных точек $x \in W^s \cap A$ и $y \in W^s \cap B$ распределяются по-разному (согласно двум различным мерам μ_A и μ_B). С другой стороны, будущие полутраектории точек x и y сходятся друг к другу; следовательно, они должны иметь одинаковые распределения. Это противоречие доказывает утверждение для устойчивых многообразий. Доказательство для неустойчивых многообразий проводится аналогично, за исключением того, что в нем используются полутраектории $x, y \in W^u$ в прошлом. ■

Пусть $W_1, W_2, \dots, W_n$ — конечная последовательность устойчивых и неустойчивых многообразий, таких, что $W_i \cap W_{i+1} \neq \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, n-1$. Это возможно, если устойчивые и неустойчивые многообразия в этой последовательности чередуются. Если эти многообразия *типичные* и если они пересекают друг друга в *типичных точках*, то, согласно утверждению, их объединение $\cup W_i$ принадлежит (mod 0) одной эргодической компоненте отображения F . Такая последовательность устойчивых и неустойчивых многообразий называется *цепочкой Хопфа*, или *zigzagom*, или *us-путем* («us» означает «неустойчивый–устойчивый» («unstable–stable»)). Она используется при построении эргодических компонент для гиперболических отображений.

Пусть $A \subset M$ — такое множество, что любые две типичные точки $x, y \in A$ можно соединить цепочкой Хопфа; см. рис. 6.1. В этом случае A принадлежит (mod 0) одной эргодической компоненте отображения F . Если это выполняется для $A = M$, тогда отображение F эргодическое.

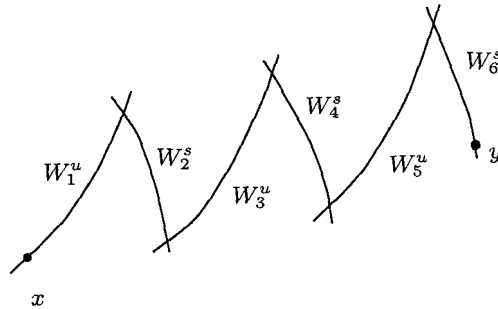


Рис. 6.1. Цепочка Хопфа, соединяющая x и y

В этом заключается сущность метода Хопфа: чтобы доказать эргодичность для гиперболического отображения F , достаточно показать, что любые две типичные точки $x, y \in M$ можно соединить цепочкой Хопфа типичных устойчивых и неустойчивых многообразий, пересекающих друг друга в типичных точках. Для неэргодических отображений метод Хопфа можно использовать для определения их эргодических компонент.

Для читателя, знакомого с эргодической теорией, это доказательство может оказаться достаточным, и тогда можно перейти к § 6.5, где строятся цепочки Хопфа для рассеивающих билиардов. Для менее опытного читателя в следующих двух разделах приводится формальное изложение метода Хопфа.

6.3. Метод Хопфа: предварительная подготовка

Опишем общие условия, при которых можно построить цепочки Хопфа (несложно заметить, что все они были введены для рассеивающих бильярдов в главах 4 и 5). Подчеркнем, что здесь будут строиться только цепочки Хопфа. Из этого построения ни в коем случае не следует эргодичность, которая будет доказана только с помощью фундаментальной теоремы.

(Н1) Гладкость с особенностями. Предположим, что M — это компактное риманово многообразие (возможно, с границей и углами). Пусть F — C^r -гладкое ($r \geq 2$) обратимое отображение на M , определенное везде, за исключением особенностей (формальное описание было приведено в § 3.1). Предположим, что F сохраняет вероятностную меру μ на M , которая эквивалентна мере Лебега (то есть она почти везде имеет положительную плотность). Из теоремы Оселедца 3.1 следует, что показатели Ляпунова существуют на множестве полной μ -меры.

(Н2) Гиперболичность. Предположим, что отображение F гиперболическое; то есть существует множество $H \subset M$ полной меры, $\mu(H) = 1$, такое, что каждая точка $x \in H$ является гиперболической (не имеет нулевых показателей Ляпунова). Вспомните также определения из § 3.1. Тогда получим $T_x M = E_x^u \oplus E_x^s$, где величины E_x^u и E_x^s обозначают неустойчивое и устойчивое подпространства соответственно. Также предположим, что размерности пространств $d^u = \dim E_x^u$ и $d^s = \dim E_x^s$ постоянны на H и пространства E_x^u и E_x^s зависят непрерывно от точки $x \in H$.

(Н3) Неустойчивые и устойчивые многообразия. Предположим, что почти в любой точке $x \in H$ по мере μ существуют (локальное) устойчивое многообразие $W^s(x)$ и (локальное) неустойчивое многообразие $W^u(x)$. Точнее говоря, для достаточно малого открытого множества $\mathcal{U} \subset M$ и для почти всякой (по мере μ) точки $x \in \mathcal{U}$ существует неустойчивое многообразие $x \in W^u(x) \subset \mathcal{U}$ такое, что

$$T_x W^u(x) = E^u(x), \quad \text{diam } F^{-n}(W^u(x)) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

и устойчивое многообразие $x \in W^s(x) \subset \mathcal{U}$ такое, что

$$T_x W^s(x) = E^s(x), \quad \text{diam } F^n(W^s(x)) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

(сходимость здесь не обязательно экспоненциальная). Оба многообразия C^r -гладкие и имеют конечный размер. Если $\mathcal{U}$ достаточно малое, то E_x^u

и E_x^s будут равномерно трансверсальны друг другу в $\mathcal{U}$, и тогда для любого $x, y \in \mathcal{U}$ пересечение $W^u(x) \cap W^s(y)$ состоит не более чем из одной точки.

Заметим: здесь предполагается существование устойчивых и неустойчивых многообразий почти в каждой точке. Каток и Стрельцин [KS86] (следуя работам Песина [Pes76, Pes77a]) доказали это существование при очень мягких предположениях об особенностях отображения F .

(H4) Достаточное число неустойчивых и устойчивых многообразий. Предположим также, что для каждого неустойчивого многообразия $W^u(x)$ существует устойчивое многообразие $W^s(y)$, проходящее почти через каждую точку $y \in W^u(x)$ относительно внутренних мер Лебега на $W^u(x)$, и наоборот.

(H5) Измеримость. Пусть $\mathcal{U} \subset M$ — достаточно малое открытое множество (например, шар). Тогда разбиение $\mathcal{U}$ на локальные неустойчивые многообразия $W^u(x) \cap \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{U}$, измеримо (соответствующие определения приведены в приложении А), а условные меры, порожденные μ на неустойчивых многообразиях, эквивалентны внутренним мерам Лебега на них. То же самое справедливо для разбиения $\mathcal{U}$ на устойчивые многообразия.

(H6) Абсолютная непрерывность. Пусть $V^1, V^2 \subset M$ — два малых близких d^u -мерных подмногообразия, равномерно трансверсальных к устойчивым подпространствам E_x^s . Обозначим

$$V_*^i = \{x \in V^i : W^s(x) \cap V^{3-i} \neq \emptyset\}$$

при $i = 1, 2$ (пересечение выше или пусто, или состоит из одной точки). Предположим, что голономное отображение, определенное как

$$h: V_*^1 \rightarrow V_*^2, \quad x \mapsto W^s(x) \cap V^2,$$

абсолютно непрерывно; то есть оно имеет конечный положительный якобиан относительно внутренних мер Лебега на V^1 и V^2 . Аналогично, голономное отображение, определенное при скольжении вдоль неустойчивого многообразия, абсолютно непрерывно.

Далее из общих предположений (H1)–(H6) выведем простые факты. Вновь подчеркнем, что предположения (H1)–(H6) ни в коем случае не гарантируют эргодичность отображения F ; они только позволяют построить цепочки Хопфа и определить его эргодические компоненты.

Пусть $V \subset \mathcal{U}$ — d^u -мерное подмногообразие, равномерно трансверсальное к устойчивым подпространствам E_x^s . Обозначим через m_V внутреннюю меру Лебега на V . Устойчивое многообразие $W^s(x)$ не обязано

существовать почти для каждой точки $x \in V$ по мере m_V (например, V может быть многообразием с особенностями для отображения F^n , $n > 0$). Обозначим

$$V_* = \{x \in V : W^s(x) \text{ существует}\}.$$

Лемма 6.1. *Для любого измеримого подмножества $B \subset V_*$ имеем*

$$m_V(B) > 0 \iff \mu(\cup_{x \in B} W^s(x)) > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Малую открытую окрестность V можно расслосить несколькими гладкими d^u -мерными многообразиями (причем все они будут трансверсальными к устойчивым подпространствам), так что многообразие V будет одним из них. Тогда из абсолютной непрерывности (Н6) и теоремы Фубини (ср. также с (A.2)) следует желаемый результат. ■

Отображения, удовлетворяющие (Н1)–(Н6), являются более общими, чем отображения столкновений для рассеивающих бильярдных столов: размерности устойчивых и неустойчивых подпространств могут быть произвольными, а гиперболичность может быть неравномерной.

6.4. Метод Хопфа: главное построение

В этом параграфе вернемся к эргодическим свойствам отображения F . Напомним несколько стандартных фактов из эргодической теории; ср. с приложением С.

Факты. Отображение F , сохраняющее меру μ , является эргодическим тогда и только тогда, когда любая F -инвариантная (mod 0) измеримая функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ (то есть такая, что $f(Fx) = f(x)$ почти для всех x по мере μ) постоянна (mod 0); то есть $\mu\{f(x) = c\} = 1$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Если отображение F не является эргодическим, то пространство M можно разбить на эргодические компоненты F (некоторые из которых могут иметь положительную меру или все они могут иметь меру нуль).

Кроме того, множество $A \subset M$ положительной меры принадлежит (mod 0) одной эргодической компоненте F тогда и только тогда, когда каждая F -инвариантная функция f постоянна (mod 0) на A ; то есть $\mu(A \setminus \{f(x) = c\}) = 0$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Обозначим через

$$\bar{f}_+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(F^i x), \quad \bar{f}_-(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(F^{-i} x)$$

ее *средние по времени* (прямое и обратное). Согласно эргодической теореме Биркгофа, эти пределы существуют и совпадают почти всюду; то есть множество

$$M_f = \{x \in M : \bar{f}_+(x) = \bar{f}_-(x)\}$$

имеет полную меру, $\mu(M_f) = 1$. Определим функцию $\bar{f}(x) := \bar{f}_+(x) = \bar{f}_-(x)$ на M_f .

Предложение 6.2. *Предположим, что функция $\bar{f}(x)$ постоянна (mod 0) для каждой непрерывной функции f . Тогда отображение F будет эргодическим. (Обратное утверждение также справедливо.)*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если отображение F не является эргодическим, тогда существует нетривиальное F -инвариантное множество B , то есть такое множество, что $F(B) = B$ и $0 < \mu(B) < 1$. Пусть g — индикаторная функция B . Функцию g можно аппроксимировать в $L^1(M, \mu)$ -норме с помощью непрерывных функций. Для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция f такая, что $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Благодаря инвариантности меры μ и функции g имеем $\|f \circ F^n - g\|_1 = \|f - g\|_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\bar{f}_+ - g\|_1 &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(F^i x) - g) \right\|_1 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=0}^{n-1} (f(F^i x) - g) \right\|_1 \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \|f(F^i x) - g\|_1 = \\ &= \|f - g\|_1 < \varepsilon, \end{aligned}$$

где использовалась теорема Лебега о мажорируемой сходимости и неравенство треугольника. Так как величина $\bar{f}_+$ постоянна (mod 0), приходим к противоречию, таким образом, отображение F — эргодическое. ■

Предложение 6.3. *Пусть $A \subset M$ — подмножество положительной меры. Предположим, что функция $\bar{f}(x)$ постоянна (mod 0) на A для всякой непрерывной функции f . Тогда A принадлежит (mod 0) одной эргодической компоненте F .*

УПРАЖНЕНИЕ 6.4. Доказать предложение 6.3 (следуя рассуждениям из предыдущего доказательства).

Данные предложения позволяют ограничиться в нашем обсуждении непрерывными функциями $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Лемма 6.5. *Для любого устойчивого или неустойчивого многообразия W функция $\bar{f}(x)$ постоянна на множестве $W \cap M_f$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно рассмотреть устойчивое многообразие $W = W^s$. Так как функция f непрерывна, она также будет равномерно непрерывной на компактном множестве M . Тогда для всех $x, y \in W^s$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(F^n x) - f(F^n y)| = 0.$$

Отсюда следует, что $\bar{f}(x) = \bar{f}_+(x) = \bar{f}_+(y) = \bar{f}(y)$ для любых $x, y \in W^s \cap M_f$. ■

Будем говорить, что устойчивое или неустойчивое многообразие $W \subset M$ является M_f -полным, если $m_W(W \setminus M_f) = 0$ (напомним, что m_W обозначает внутреннюю меру Лебега на W).

Лемма 6.6. *Объединение всех неустойчивых и устойчивых многообразий, которые не являются M_f -полными, имеет нулевую меру μ .*

УПРАЖНЕНИЕ 6.7. Доказать лемму 6.6. Указание: использовать измеримость (H5), а также эквивалентность μ и меры Лебега.

Последняя лемма иногда формулируется неточно: «почти любое неустойчивое или устойчивое многообразие является M_f -полным».

Пусть $G_f \subset M_f$ обозначает множество точек таких, что для всех $x \in G_f$ многообразия $W^u(x)$ и $W^s(x)$ существуют и являются M_f -полными. Очевидно, $\mu(G_f) = 1$. Будем говорить, что устойчивое или неустойчивое многообразие $W \subset M$ является G_f -полным, если $m_W(W \setminus G_f) = 0$.

Лемма 6.8. *Если устойчивое или неустойчивое многообразие M_f -полное, то оно также G_f -полное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим неустойчивое многообразие W^u . В первых, почти через каждую точку $y \in W^u$ (относительно внутренней меры Лебега m_{W^u}), как следует из предположения (H3), проходит устойчивое многообразие $W^s(y)$. Устойчивые многообразия, которые не являются M_f -полными, образуют множество меры нуль (лемма 6.6), так что они соответствуют множеству точек $y \in W^u$ нулевой меры m_{W^u} (лемма 6.1). ■

Следствие 6.9. *Пусть $x \in G_f$. Тогда оба многообразия $W^u(x)$ и $W^s(x)$ существуют и являются G_f -полными.*

Данное следствие предполагает следующее построение некоторой возрастающей последовательности подмножеств (*подмножеств Хопфа*):

$$H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \dots \subset M.$$

Выберем точку $x_0 \in G_f$. Определим множество

$$H_1(x_0) = W^u(x_0) \cap G_f$$

и

$$H_2(x_0) = \cup_{y \in H_1(x_0)} W^s(y) \cap G_f.$$

Далее по индукции для заданного множества $H_{2n}(x_0)$ определим

$$H_{2n+1}(x_0) = \cup_{x \in H_{2n}(x_0)} W^u(x) \cap G_f$$

и

$$H_{2n+2}(x_0) = \cup_{y \in H_{2n+1}(x_0)} W^s(y) \cap G_f.$$

Таким образом, здесь строится неустойчивое многообразие через точку x_0 , затем устойчивое многообразие через каждую точку $y \in G_f$ на нем, затем неустойчивое многообразие через каждую точку $x \in G_f$ на предыдущих устойчивых многообразиях и т. д. Введем обозначения

$$H_\infty(x_0) = \cup_{n \geq 1} H_n(x_0).$$

В качестве альтернативного подхода можно начать с построения устойчивого многообразия через точку x_0 , построить неустойчивые многообразия через каждую точку $y \in G_f$ на нем и т. д., так что в действительности существует две последовательности множеств Хопфа. Они имеют следующие схожие свойства:

- (а) каждое устойчивое и неустойчивое многообразие при данном построении является G_f -полным (согласно следствию 6.9);
- (б) $\mu(H_2) > 0$ (из леммы 6.1); следовательно, $\mu(H_n) > 0$ для всех $n \geq 2$;
- (с) функция $\bar{f}$ постоянна на любом H_n , следовательно, на H_∞ (согласно лемме 6.5).

Появилась процедура для проверки того, что данное множество $A \subset M$ положительной меры принадлежит (mod 0) одной эргодической компоненте.

Пусть f — произвольная непрерывная функция. Выберем точку $x_0 \in A \cap G_f$ (то есть произвольную точку в A , за исключением нулевого множества $A \setminus G_f$). Проверим, что соответствующее множество $H_\infty(x_0)$ покрывает $(\bmod 0)$ множества A , то есть $\mu(A \setminus H_\infty(x_0)) = 0$. Тогда функция f постоянна $(\bmod 0)$ на A . Следовательно, A принадлежит $(\bmod 0)$ одной эргодической компоненте (согласно предложению 6.3).

Ключевое условие, что $H_\infty(x_0)$ покрывает $A \pmod{0}$, можно описать следующим образом. Почти для каждой пары точек $x, y \in A \cap G_f$ существует последовательность чередующихся неустойчивых и устойчивых многообразий $W_1, W_2, \dots, W_n$ таких, что $x \in W_1$, $y \in W_n$, и для любого $i = 1, \dots, n-1$ многообразия W_i и W_{i+1} пересекаются ровно в одной точке $z_i = W_i \cap W_{i+1} \in G_f$. Таким образом, получим цепочку Хопфа, упомянутую в § 6.2 и показанную на рис. 6.1.

Чтобы доказать эргодичность отображения F , можно использовать следующую стратегию.

- (1) Найти множество $M_1 \subset M$ такое, что для каждой точки $x \in M_1$ существует окрестность $\mathcal{U}(x)$, которая принадлежит $(\bmod 0)$ одной эргодической компоненте F .
- (2) Показать, что множество M_1 имеет полную меру и линейно связное.

Первый шаг известен как «локальная» эргодичность, а второй — как «глобальная» эргодичность. Будем использовать эту стратегию в следующих двух параграфах.

6.5. Локальная эргодичность

Применим метод Хопфа к рассеивающим билиардам. Наше изложение соответствует общему ходу рассуждений оригинальной работы Сина [Sin70].

Напомним, что $S_\infty^{\mathbb{H}}$ и $S_\infty^{\mathbb{H}-}$ — это множества (счетные объединения гладких кривых), на которых соответственно положительные и отрицательные итерации «нового отображения столкновений» $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ разрывны; см. (5.59), (5.60) и соответствующие определения в §§ 5.13 и 5.4.

Теорема 6.10 (локальная эргодичность — I). *Для любой точки $x \in M \setminus (S_\infty^{\mathbb{H}} \cup S_\infty^{\mathbb{H}-})$ существует открытая окрестность $\mathcal{U}_x \subset M$, которая принадлежит $(\bmod 0)$ одной эргодической компоненте билиардного отображения $\mathcal{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем большое $A \gg 1$ и малое $q > 0$ и рассмотрим открытые множества $\mathcal{U}_x^u$ и $\mathcal{U}_x^s$, построенные в теореме 5.70.

УПРАЖНЕНИЕ 6.11. Показать, что существуют произвольно малые открытые окрестности $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_x^u \cap \mathcal{U}_x^s$ точки x «прямоугольной формы», каждая из которых ограничена двумя неустойчивыми Н-многообразиями и двумя устойчивыми Н-многообразиями. Указание: пусть $W^u \ni x$ и $W^s \ni x$ — произвольно малые неустойчивая и устойчивая кривые, содержащиеся в $\mathcal{U}_x^u \cap \mathcal{U}_x^s$. Согласно теореме 5.70, существует большое число длинных устойчивых Н-многообразий через W^u и длинных неустойчивых Н-многообразий через W^s .

УПРАЖНЕНИЕ 6.12. Показать, что если величина $q > 0$ достаточно мала, то форму области $\mathcal{U}_x$ в предыдущем упражнении можно произвольно приблизить к ромбу, как показано на рис. 6.2. Указание: напомним, что устойчивые линии E_y^s и неустойчивые линии E_y^u (которые являются касательными к устойчивым и неустойчивым Н-многообразиям $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ и $W_{\mathbb{H}}^s(x)$ соответственно) являются непрерывными функциями в своих областях (ср. § 4.7); следовательно, обе эти функции непрерывны в x . Таким образом, все устойчивые Н-многообразия в $\mathcal{U}_x$ почти параллельны друг к другу, и такими же будут все неустойчивые Н-многообразия в $\mathcal{U}_x$.

Зафиксируем область $\mathcal{U}_x$, описанную в упражнениях 6.11 и 6.12. Докажем, что $\mathcal{U}_x$ принадлежит (mod 0) одной эргодической компоненте отображения $\mathcal{F}$, соединя типичные точки $x_0, y_0 \in \mathcal{U}_x$ с цепочками Хопфа.

Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $x_0 \in \mathcal{U}_x \cap G_f$ (в терминах предыдущего параграфа). Покажем, что

$$\mathcal{U}_x \cap G_f \subset H_{\infty}(x_0);$$

данного утверждения более чем достаточно, чтобы доказать теорему с помощью предложения 6.3.

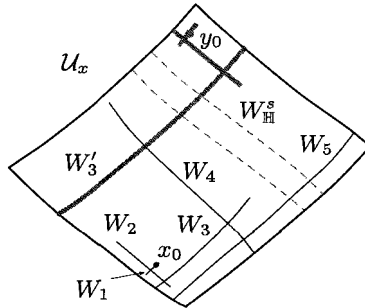


Рис. 6.2. Доказательство теоремы 6.10

Пусть $x_0 \in \mathcal{U}_x \cap G_f$. Начнем построение Хопфа в точке x_0 и определим $W_1 := W_{\mathbb{H}}^u(x_0) \cap \mathcal{U}_x$. Так как неустойчивое Н-многообразие W_1 является G_f -полным, из теоремы 5.70 следует, что существует устойчивое Н-многообразие $W_{\mathbb{H}}^s(x_1)$ для некоторой точки $x_1 \in W_1 \cap G_f$, которое продолжается в обе стороны W_1 на расстояние $> A|W_1|$. Полагаем $W_2 := W_{\mathbb{H}}^s(x_1) \cap \mathcal{U}_x$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.13. Показать, что или $|W_2| \geq A|W_1|$, или $\partial W_2 \subset \partial \mathcal{U}_x$ (в последнем случае обе концевые точки W_2 лежат на обоих неустойчивых Н-многообразиях, ограничивающих $\mathcal{U}_x$).

Согласно следствию 6.9, многообразие W_2 также G_f -полное. По теореме 5.70 существует неустойчивое Н-многообразие $W_{\mathbb{H}}^u(x_2)$ для некоторой точки $x_2 \in W_2 \cap G_f$, которое продолжается в обе стороны W_2 на расстояние $> A|W_2|$. Полагаем $W_3 := W_{\mathbb{H}}^u(x_2) \cap \mathcal{U}_x$. Вновь или $|W_3| \geq A|W_2|$, или многообразие W_3 заканчивается на $\partial \mathcal{U}_x$ (точнее, на обоих устойчивых Н-многообразиях, ограничивающих $\mathcal{U}_x$).

Очевидно, такое чередующееся построение устойчивых и неустойчивых Н-многообразий можно продолжить, пока не будет достигнуто неустойчивое Н-многообразие W_n , которое заканчивается на $\partial \mathcal{U}_x$; см. черные линии на рис. 6.2 (где $n = 5$). Заметим, что W_n является G_f -полным и $W_n \cap G_f \subset H_{\infty}(x_0)$.

Начиная с любой другой точки $y_0 \in \mathcal{U}_x \cap G_f$, построим аналогичную последовательность чередующихся неустойчивых и устойчивых многообразий вплоть до неустойчивого Н-многообразия W'_m , которое заканчивается на $\partial \mathcal{U}_x$; см. толстые серые линии на рис. 6.2 (где $m = 3$). Заметим, что многообразие W'_m является G_f -полным и $W'_m \cap G_f \subset H_{\infty}(y_0)$.

Как следствие теоремы 5.70, существует много устойчивых Н-многообразий $W_{\mathbb{H}}^s \subset \mathcal{U}_x$, пересекающих как W_n , так и W'_m ; см. пунктирные линии на рис. 6.2. В действительности объединение таких устойчивых Н-многообразий имеет положительную меру. Из леммы 6.1 следует, что почти все из них пересекают W_n и W'_m в точках, которые принадлежат множеству G_f .

Это доказывает $y_0 \in H_{\infty}(x_0)$ и наоборот. ■

Теорема 6.14 (локальная эргодичность — II). *Предположим, что точка $x \in \mathcal{M}$ лежит точно на одной гладкой кривой разрыва $S \subset S_{\infty}^{\mathbb{H}} \cup S_{\infty}^{\mathbb{H}}$. Тогда существует открытая окрестность $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{M}$, которая принадлежит (mod 0) одной эргодической компоненте $\mathcal{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует ровно одно значение $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $S \subset \mathcal{F}^{-n}(S_0 \cup S)$, согласно определению (5.59)–(5.60) (вспомните соответствующие определения в §§ 5.13, 5.3, 5.4, 2.10 и 2.11). Случай $S \subset \mathcal{F}^{-n}(S)$ достаточно легок. Действительно, наш выбор полос од-

нородности был отчасти произвольный, так что их граничные точки должны иметь такие же свойства (относительно локальной эргодичности), как и внутренние точки. Поэтому будем предполагать, что $x \in S \subset \mathcal{F}^{-n}(S_0)$.

Случай $n = 0$ (где $x \in S_0 = \partial\mathcal{M}$) следует из проведенного анализа случая $n \neq 0$. Без потери общности предположим, что $n > 0$. Так как отображение $\mathcal{F}^{n-1}$ гладкое в x и любая эргодическая компонента $\mathcal{F}$ -инвариантная, достаточно доказать теорему для точки $\mathcal{F}^{n-1}(x)$. Таким образом, можно предположить, что $n = 1$; то есть отображение $\mathcal{F}$ разрывно в x .

Кривая S делит любую открытую окрестность V точки x на две части V_1 и V_2 , на которых $\mathcal{F}$ действует, как описано в конце §4.9; см. рис. 6.3. Точнее говоря, первый образ $V'_1 = \mathcal{F}(V_1)$ — это открытая окрестность точки $x' = \mathcal{F}(x) \in S_0$, смежной с ребром S_0 , а второй образ $V''_1 = \mathcal{F}^2(V_1)$ — это полуокрестность точки $x'' = \mathcal{F}^2(x)$, смежной с кривой разрыва $S' = \mathcal{F}^2(S) \subset S_{-1}$. С другой стороны, первый образ $V'_2 = \mathcal{F}(V_2)$ — это полуокрестность точки x'' , смежной с другой стороной кривой разрыва S' . Непосредственным образом можно проверить, что $V' = V'_1 \cup V'_2$ — это открытая окрестность точки x'' ; см. рис. 6.3.

Вторая часть теоремы 5.70 применяется для достаточно малых окрестностей точки x . В то же время первая часть теоремы 5.70 применяется к достаточно малым окрестностям точки x' . Возвращаясь к точке x , получим следующую теорему.

Теорема 6.15. *Для любых $q > 0$ и $A > 0$ существует открытая окрестность V точки x такая, что для любой неустойчивой кривой $W \subset V$ существует подмножество $W' \subset W$ такое, что $\mathbf{m}_W(W') \geq (1 - q) \mathbf{m}_W(W)$ и устойчивое H -многообразие $W_{\mathbb{H}}^s(y)$, проходящее через*

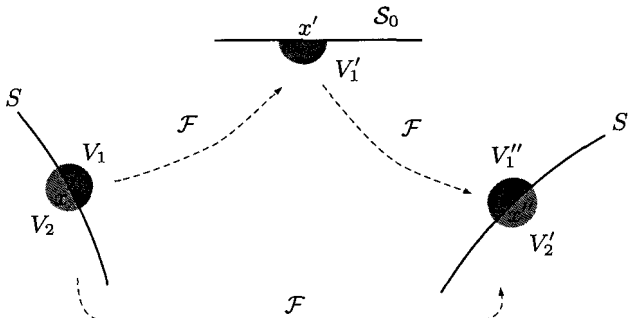


Рис. 6.3. Действие $\mathcal{F}$ в окрестности $x \in S$

каждую точку $y \in W'$, продолжается на расстояние $> A|W|$ в обе стороны от y , за исключением случаев, когда оно обрывается на кривой разрыва S .

Величины q и A здесь отличаются от аналогичных констант из теоремы 5.70. Возможный обрыв на кривой S — это новый элемент по сравнению с теоремой 5.70. Заметим, что каждое устойчивое H -многообразие $W_{\mathbb{H}}^s(y)$ может закончиться на кривой S только в одной из ее конечных точек (но не на обеих).

Далее выберем большое $A > 1$ и малое $q > 0$ и построим окрестность $\mathcal{U}_x$. В окрестности x все неустойчивые многообразия почти параллельны, но для устойчивых многообразий это не так. В действительности устойчивые многообразия $W^s \subset V_1$ почти касательны к S (они заканчиваются на S по касательной) (см. § 4.9 и 4.11), но устойчивые многообразия $W^s \subset V_2$ трансверсальны к S .

УПРАЖНЕНИЕ 6.16. Показать, что устойчивые многообразия $W^s \subset V_2$ почти параллельны друг к другу. Указание: воспользуйтесь результатами § 4.7 и покажите, что функция $B^{s+}(y)$, $y \in V_2$, имеет непрерывное продолжение на точку x .

Как и в предыдущей теореме, построим окрестность $\mathcal{U}_x$, ограниченную двумя неустойчивыми и двумя устойчивыми H -многообразиями. Часть $\mathcal{U}_x \cap V_1$ может быть произвольно близка к ромбу, при условии, что величина $q > 0$ достаточно мала. Но часть $\mathcal{U}_x \cap V_2$ будет близка только к трапеции с почти параллельными неустойчивыми сторонами и с трансверсальными устойчивыми сторонами; см. рис. 6.4.

УПРАЖНЕНИЕ 6.17. Показать, что часть $\mathcal{U}_x \cap V_2$ можно сделать произвольно близкой к трапеции с почти параллельными неустойчивыми сторонами. Эту часть можно также построить так, что ее меньшая неустойчивая сторона почти равна наименьшей устойчивой стороне, так что стороны этой трапеции сравнимы (ни одна из них не будет слишком короткой).

Далее для произвольной точки $x_0 \in \mathcal{U}_x \cap G_f$ построим последовательность устойчивых и неустойчивых H -многообразий $x \in W_1, W_2, \dots, W_n$, как в предыдущей теореме, но с учетом следующих двух модификаций.

Во-первых, необходимо оставаться вдалеке от кривой разрыва S . Это можно осуществить следующим образом. Для каждой кривой W_i найдем ее конечную точку e_i , которая более удалена от кривой S по сравнению с другой конечной точкой. Затем выберем следующую кривую W_{i+1} такую, что она пересекает W_i в точке x_i достаточно близко к e_i (можно выбрать x_i так, что $\text{dist}(x_i, e_i) < 2q|W_i|$).

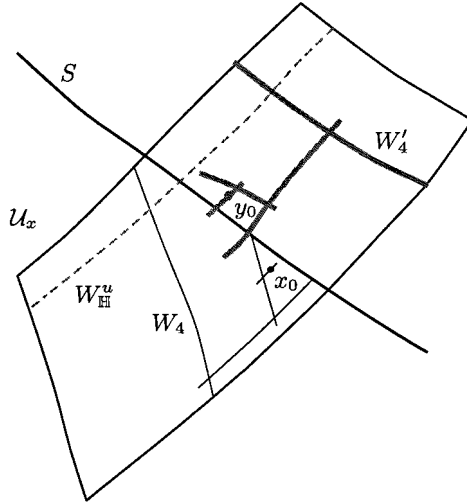


Рис. 6.4. Доказательство теоремы 6.14

Во-вторых, более удобным будет остановиться на построении устойчивого многообразия W_n , обе концевые точки которого лежат на двух неустойчивых сторонах $\mathcal{U}_x$; см. черные линии на рис. 6.4 (где $n = 4$). Как и в предыдущей теореме, многообразие W_n будет G_f -полным и $W_n \cap G_f \subset H_\infty(x_0)$.

Аналогично, для любой другой точки $y_0 \in \mathcal{U}_x \cap G_f$ построим последовательность чередующихся неустойчивого и устойчивого многообразий, заканчивающихся устойчивым Н-многообразием W'_m , которое заканчивается на двух неустойчивых сторонах $\mathcal{U}_x$; см. толстые серые линии на рис. 6.4 (где $m = 4$). Заметим, что W'_m является G_f -полным и $W'_m \cap G_f \subset H_\infty(y_0)$.

Устойчивые Н-многообразия W_n и W'_m могут лежать на одной стороне S (тогда они будут почти параллельны друг к другу) или на противоположных сторонах, как показано на рис. 6.4.

В любом случае согласно теореме 5.70 существует множество неустойчивых Н-многообразий $W_{III}^u \subset \mathcal{U}_x$, пересекающих как W_n , так и W'_m ; см. штриховые линии на рис. 6.4. Объединение таких неустойчивых Н-многообразий имеет положительную меру. Из леммы 6.1 следует, что почти все из них пересекают W_n и W'_m в точках, которые принадлежат множеству G_f .

Это доказывает, что $y_0 \in H_\infty(x_0)$ и наоборот. ■

6.6. Глобальная эргодичность

«Локальные эргодические теоремы» 6.10 и 6.14 применимы к любой точке $x \in M$, за исключением точек, которые принадлежат более чем одной гладкой кривой множества особенностей $S_\infty^{\mathbb{H}} \cup S_{-\infty}^{\mathbb{H}}$. Обозначим это множество через $M^\#$. Следующая лемма выполняется для всех рассеивающих бильярдов.

Лемма 6.18. *Множество $M^\#$ счетное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что любые две несовпадающие кривые $S, S' \subset S_\infty^{\mathbb{H}} \cup S_{-\infty}^{\mathbb{H}}$ пересекают друг друга не более чем в одной точке. Пусть $S \subset \mathcal{F}_{\mathbb{H}}^n(S_0 \cup \mathbb{S})$ и $S' \subset \mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{n'}(S_0 \cup \mathbb{S})$. Если $n > 0$ и $n' < 0$, то кривая S неустойчивая, а кривая S' устойчивая, таким образом, наше утверждение очевидно.

Предположим, что $n' \geq n \geq 0$. Тогда $\mathcal{F}^{-n}(S) \subset S_0 \cup \mathbb{S}$ — это горизонтальная кривая (определяемая уравнением $\varphi = \text{const}$). В то же самое время кривая $\mathcal{F}^{-n}(S')$ или неустойчива (если $n' > n$), или также будет горизонтальной (если $n' = n$). В обоих случаях они пересекаются не более чем в одной точке, как и утверждалось. Оставшийся случай $n, n' < 0$ рассматривается аналогично. ■

Далее нам потребуется общее утверждение, которое легко следует из предложения 6.3:

Утверждение. Если множества A и B , имеющие положительную меру, принадлежат $(\text{mod } 0)$ одной эргодической компоненте и $\mu(A \cap B) > 0$, то объединение $A \cup B$ принадлежит $(\text{mod } 0)$ одной эргодической компоненте.

Напомним, что пространство столкновений M состоит из связных компонент M_i ; см. § 2.9.

Предложение 6.19. *Каждая связная компонента M_i пространства столкновений M лежит $(\text{mod } 0)$ в одной эргодической компоненте отображения $\mathcal{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество $M^\#$ счетное, его дополнение $M_i \setminus M^\#$ будет линейно связным. Предположим, что точки $x, y \in M_i \setminus M^\#$ соединяются компактной непрерывной кривой $C \subset M_i \setminus M^\#$. Каждая точка $z \in C$ удовлетворяет «локальной эргодической теореме» 6.10 или 6.14; таким образом, открытая окрестность U_z принадлежит $(\text{mod } 0)$ одной эргодической компоненте. Благодаря компактности кривую C можно

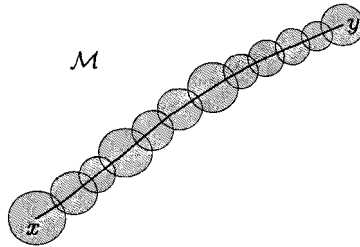


Рис. 6.5. Доказательство предложения 6.19

покрыть конечным числом таких открытых (и перекрывающихся) окрестностей; см. рис. 6.5. Нужный результат следует из изложенного выше утверждения. ■

Теорема 6.20. *Отображение столкновений $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ эргодическое.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущего предложения следует, что каждая эргодическая компонента $\mathcal{F}$ — это объединение нескольких $\mathcal{M}_i$. Каждая компонента $\mathcal{M}_i$ состоит из всех столкновений на одном рассеивателе. Очевидно, что из любого рассеивателя билиардные траектории приходят к близлежащим рассеивателям (и множество таких траекторий имеет положительную меру), далее — к соседям этих рассеивателей и т.д. Таким образом, если билиардный стол $\mathcal{D}$ связный, полное пространство столкновений $\mathcal{M}$ принадлежит одной эргодической компоненте. ■

6.7. Свойства перемешивания

Свойства перемешивания для отображения столкновений $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ выводятся относительно легко на основе общих результатов работ Песина [Pes77a, Pes92], которые будут описаны ниже.

Пусть $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ — гиперболическое отображение, сохраняющее вероятностную меру μ .

Определение 6.21. Будем говорить, что F удовлетворяет *разложению на эргодические компоненты* (или *спектральному разложению*), если существует конечное или счетное разбиение

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \dots$$

такое, что

(а) каждое M_i является F -инвариантным, $\mu(M_0) = 0$ и $\mu(M_i) > 0$ для $i \geq 1$;

(б) сужение $F: M_i \rightarrow M_i$ эргодическое для каждого $i \geq 1$.

Кроме того, для каждого $i \geq 1$ существует конечное разбиение

$$M_i = M_i^1 \cup \dots \cup M_i^{k_i}$$

такое, что

(с) $F(M_i^j) = M_i^{j+1}$ и $F(M_i^{k_i}) = M_i^1$ (циклическая перестановка);

(д) отображение $F^{k_i}: M_i^j \rightarrow M_i^j$ является перемешивающим, К-перемешивающим и имеет свойство Бернулли.

Песин [Pes92] установил эргодическое разложение для общих классов гиперболических отображений и их инвариантных мер, которые включают все рассеивающие билиарды категорий А и В.

Эргодичность для отображения столкновений уже была доказана; следовательно, его эргодическое разложение имеет одну эргодическую компоненту M_1 . Далее покажем, что $k_1 = 1$ в пункте (с); то есть цикл тривиален.

Действительно, если $k_1 \geq 2$, то отображение $\mathcal{F}^{k_1}$ не будет эргодическим (его эргодические компоненты будут подмножествами $M_1^1, \dots, M_1^{k_1}$). Но это невозможно благодаря следующей теореме.

Теорема 6.22. *Отображение $\mathcal{F}^n: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ является эргодическим для любого $n \geq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\mathcal{F}^n$ удовлетворяет предположениям (Н1)–(Н6) § 6.3; следовательно, здесь можно использовать метод Хопфа. Отображение $\mathcal{F}$ и отображения $\mathcal{F}^n$ имеют одни и те же устойчивые и неустойчивые многообразия и одни и те же множества особенностей $S_\infty^{\mathbb{H}} \cup S_{-\infty}^{\mathbb{H}}$. Тогда фундаментальная теорема верна для $\mathcal{F}^n$. Все эти факты можно проверить непосредственно; оставим эту проверку читателю.

Таким образом, локальные эргодические теоремы 6.10 и 6.14, лемма 6.18 и предложение 6.19 переносятся на отображение $\mathcal{F}^n$ без изменений. Следовательно, каждая связная компонента $M_i \subset \mathcal{M}$ (построенная на кривой $\Gamma_i \subset \Gamma$) принадлежит (mod 0) одной эргодической компоненте $\mathcal{F}^n$ для каждого $n \geq 2$. Остается проверить следующее.

Лемма 6.23. *Пусть граница $\Gamma = \partial\mathcal{D}$ билиардного стола состоит из r гладких компонент, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r$ (это замкнутые кривые для столов категорий А и В). Тогда невозможно поделить множество $\{1, \dots, r\}$ на группы $G_1, \dots, G_k$, $k \geq 2$, так что билиардные траектории, начинающиеся на кривой Γ_i , $i \in G_p$, $1 \leq p \leq k$, обязательно достигнут кривую Γ_j , $j \in G_{p+1}$ (с учетом отождествления $G_{k+1} = G_1$).*

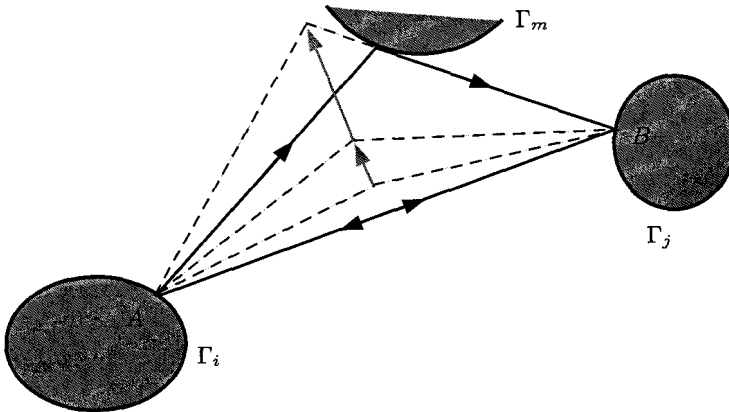


Рис. 6.6. Доказательство леммы 6.23

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную бильярдную траекторию, выходящую из некоторой точки $A \in \Gamma_i$ и приходящую в некоторую другую точку $B \in \Gamma_j$; см. рис. 6.6. Изменяя ход времени на обратный, получим траекторию, идущую из B в A . Это показывает, что если $\Gamma_i \in G_p$, то $\Gamma_j \in G_{p+1}$ и $\Gamma_i \in G_{p+2}$; следовательно, $G_p = G_{p+2}$, что возможно, только если $k = 1$ или $k = 2$. Предположим, $k = 2$. Без потери общности будем полагать, что $\Gamma_i \in G_1$ и $\Gamma_j \in G_2$. Рассмотрим равнобедренный треугольник с основанием AB , и пусть его высота увеличивается; см. рис. 6.6. Первый момент, когда этот треугольник касается другой кривой $\Gamma_m \subset \Gamma$, определяет бильярдные траектории, выходящие из Γ_i в Γ_m ; следовательно, $\Gamma_m \in G_2$, причем некоторые другие бильярдные траектории идут из Γ_m в Γ_j , следовательно, $\Gamma_j \in G_1$. Отсюда следует, что $G_1 = G_2$, таким образом, $k = 1$. ■

Это доказывает теорему 6.22. ■

Следствие 6.24. Для рассеивающих бильярдных категорий A и B отображение $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ является перемешивающим, K -перемешивающим и имеет свойство Бернулли.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.25. Эргодичность была также установлена для рассеивающих бильярдных категорий C , D , F и E ; см. [Re95].

ЗАМЕЧАНИЕ 6.26. Свойство Бернулли выполняется для K -смешанных гиперболических отображений (и потоков) при очень общих условиях [CH96, OW98].

6.8. Эргодичность и инвариантные многообразия для билиардных потоков

Обсудим эргодические свойства билиардного потока $\Phi^t: \Omega \rightarrow \Omega$, который сохраняет меру μ_Ω ; см. обозначения в § 2.12. Более тщательное исследование эргодических свойств более общих гиперболических потоков читатель может найти в [KB94].

Напомним, что Φ^t — это специальный поток, преобразование на базе которого есть $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, а функция потолка — $\tau(x)$; см. § 2.9.

УПРАЖНЕНИЕ 6.27. Показать, что специальный поток будет эргодическим тогда и только тогда, когда его преобразование на базе будет эргодическим. Указание: если поток Φ^t не является эргодическим, то существует Φ^t -инвариантное подмножество $B \subset \Omega$ с мерой $0 < \mu_\Omega(B) < 1$. В этом случае множество $A := B \cap \mathcal{M}$ было бы инвариантным под действием отображения $\mathcal{F}$, и, используя (2.30), можно проверить, что $0 < \mu(A) < 1$.

Поскольку эргодичность для $\mathcal{F}$ установлена, то справедлив следующий результат.

Предложение 6.28. *Для билиардов категорий A и B поток $\Phi^t: \Omega \rightarrow \Omega$ будет эргодическим.*

Было бы удобно вывести свойства перемешивания для специального потока из свойств преобразования на базе, но это невозможно. Каким бы ни было преобразование на базе, не гарантируется, что поток будет перемешивающим.

УПРАЖНЕНИЕ 6.29. Показать, что если функция потолка специального потока постоянная, то поток не может быть перемешивающим. Расширить это заключение на специальные потоки, функция потолка которых принимает два значения p и q такие, что p/q рациональное.

Чтобы вывести свойства перемешивания для потока, необходимо построить и использовать его устойчивые и неустойчивые многообразия.

Билиардный поток Φ^t является гиперболическим; то есть почти каждая точка $X \in \Omega$ (по мере μ_Ω) имеет один положительный и один отрицательный показатель Ляпунова (третий показатель обязательно равен нулю). Это следует из гиперболичности отображения $\mathcal{F}$, доказанного в § 4.4, и общих результатов § 3.3. Соответствующие характеристические подпространства E_X^u и E_X^s будут одномерными, и мы имеем $E_X^u, E_X^s \subset T_X^\perp \Omega$ (то есть они «ортогональны» вектору скорости); см. § 4.7.

Покажем, что почти для каждой точки $X \in \Omega$ (по мере μ_Ω) существует одномерное локальное устойчивое многообразие $\mathcal{W}^s(X) \subset \Omega$ и одномерное локальное неустойчивое многообразие $\mathcal{W}^u(X) \subset \Omega$, оба проходящие через X , которые удовлетворяют соотношениям¹

$$|\Phi^t(\mathcal{W}^s(X))| \rightarrow 0, \quad |\Phi^{-t}(\mathcal{W}^u(X))| \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$. Многообразия $\mathcal{W}^u(X)$ и $\mathcal{W}^s(X)$ являются касательными к подпространствам E_X^u и E_X^s соответственно.

Предложение 6.30. *Почти для каждой (по мере μ_Ω) точки $X \in \Omega$ существует устойчивое многообразие $\mathcal{W}^s(X)$ и неустойчивое многообразие $\mathcal{W}^u(X)$. Устойчивое многообразие $\mathcal{W}^s(X)$ — это фокусирующий фронт волны, а неустойчивое многообразие $\mathcal{W}^u(X)$ — это рассеивающий фронт волны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = (q, v) \in \Omega$ — фазовая точка такая, что $q \in \text{int } \mathcal{D}$ и $v \in S^1$; см. обозначения § 2.5. Обозначим через $x = \mathbf{P}^-(X) \in \mathcal{M}$ естественную проекцию X , определенную в § 3.3, а через $\mathcal{W}^u(x) \subset \mathcal{M}$ — (локальное) неустойчивое многообразие для отображения $\mathcal{F}$ (одно существует почти для каждой (по мере μ) точки x). Выходящие траектории точек $y \in \mathcal{W}^u(x)$ образуют однопараметрическое семейство направленных линий в области $\mathcal{D}$ (см. рис. 6.7); одна из этих линий проходит через точку q и содержит вектор v . Пусть σ — ортогональное сечение этого семейства (ср. § 3.7), проходящее через точку q . Обозначим через $\mathcal{W}^u(X) \subset \Omega$ кривую σ , оснащенную единичными нормальными векторами, направленными вдоль рассматриваемых направленных линий. Тогда $\mathcal{W}^u(X)$ — это рассеивающийся фронт волны; см. §§ 4.3, 4.5.

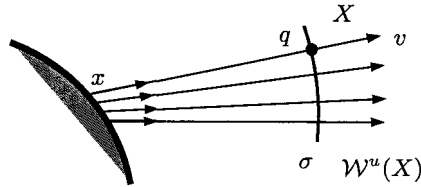


Рис. 6.7. Доказательство предложения 6.30

¹Здесь $|\Phi^t(W)|$ обозначает общую длину одномерного многообразия $\Phi^t(W)$. Так как $\Phi^t(W^s)$ может состоять из нескольких несвязных компонент, нельзя утверждать, что его диаметр сходится к нулю.

Так как $\mathcal{F}^{-n}W^u(x)$ — это неустойчивая кривая для каждого $n \geq 1$, отсюда следует, что $\Phi^{-t}W^u(X)$ — это рассеивающийся фронт волны при всех $t > 0$. Кроме того, длина $\mathcal{F}^{-n}W^u(x)$ сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$; следовательно, и длина $\Phi^{-t}W^u(X)$ сходится при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, неустойчивое многообразие построено.

Устойчивое многообразие $W^s(X)$ строится аналогично, если рассмотреть обратный ход времени. ■

УПРАЖНЕНИЕ 6.31. Показать, что для рассеивающих билиардов категории А $|\Phi^{-t}(W^u(X))|$ сходится к нулю экспоненциально быстро по t . Указание: используйте экспоненциальную сходимость $|\mathcal{F}^{-n}(W^u(x))| \rightarrow 0$ и оценки $0 < \tau_{\min} \leq \tau(x) \leq \tau_{\max} < \infty$.

В билиардах категории В не существует верхней оценки на $\tau(x)$, так что сходимость $|\Phi^{-t}(W^u(X))| \rightarrow 0$ может быть произвольно медленной.

Для малого $\varepsilon > 0$ множества

$$W_\varepsilon^u(X) = \cup_{|t| < \varepsilon} \Phi^t W^u(X), \quad W_\varepsilon^s(X) = \cup_{|t| < \varepsilon} \Phi^t W^s(X)$$

являются двумерными поверхностями в Ω . Они называются (локальными) *слабо неустойчивыми* и *слабо устойчивыми* многообразиями соответственно. Они пересекаются в части траектории X

$$W_\varepsilon^u(X) \cap W_\varepsilon^s(X) = \cup_{|t| < \varepsilon} \Phi^t(X);$$

см. рис. 6.8. Заметим, что P^- -проекции $W_\varepsilon^u(X)$ и $W_\varepsilon^s(X)$ на M будут многообразиями $W^u(x)$ и $W^s(x)$ соответственно, где $x = P^-(X)$.

6.9. Свойства перемешивания потока и 4-петли

Воспользуемся устойчивыми и неустойчивыми многообразиями билиардного потока $\Phi^t: \Omega \rightarrow \Omega$ для исследования его свойств перемешивания.

Начнем с поучительного (контр-) примера. Пусть $F: M \rightarrow M$ — гиперболическое отображение на двумерное многообразие M , сохраняющее меру μ , такое, что почти для всех (по мере μ) точек $x \in M$ существует неустойчивое многообразие $W^u(x)$ и устойчивое многообразие $W^s(x)$. Рассмотрим специальный поток Φ^t , построенный над отображением $T: M \rightarrow M$ при *постоянной* функции потолка $L(x) = L_0 > 0$. Заметим, что он действует на 3D-многообразие $\Omega = M \times [0, L_0]$ и, как следует из упражнения 6.29, он не является перемешивающим.

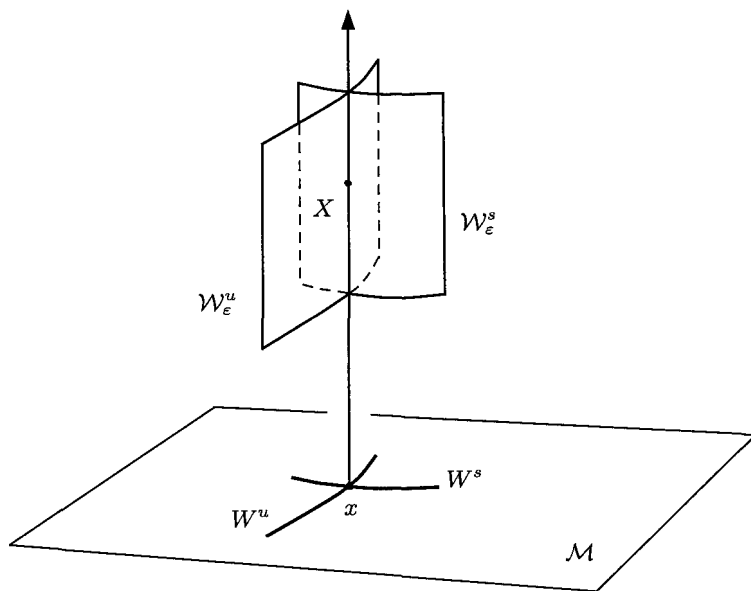


Рис. 6.8. Слабо устойчивые и неустойчивые многообразия

УПРАЖНЕНИЕ 6.32. Показать, что если $W^u(x)$ и $W^s(x)$ существуют, то для любой точки $X = (x, t) \in \Omega$ неустойчивое многообразие потока имеет вид $\mathcal{W}^u(X) = W^u(x) \times \{t\}$, а его устойчивое многообразие имеет вид $\mathcal{W}^s(X) = W^s(x) \times \{t\}$.

Следовательно, как многообразие $\mathcal{W}^u(X)$, так и $\mathcal{W}^s(X)$ принадлежат тому же самому «горизонтальному сечению» $M \times \{t\} \subset \Omega$. Кроме того, любая цепочка Хопфа², начинающаяся в X , будет лежать в том же «горизонтальном сечении». Заметим, что любое такое сечение $M \times \{t\}$ — это двумерная поверхность в Ω . В этом случае семейства устойчивых и неустойчивых многообразий называются (локально) *интегрируемыми*. Точнее, локальная интегрируемость в X означает, что все достаточно короткие цепочки Хопфа, начинающиеся в X , лежат в одной гиперповерхности Ω .

²Как и в § 6.2, цепочкой Хопфа называется любая конечная последовательность чередующихся устойчивых и неустойчивых многообразий $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_n$ таких, что $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_{i+1} \neq \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, n-1$.

Предположим, что Φ^t — специальный поток над гиперболическим отображением на базе $T: M \rightarrow M$ с произвольной (не обязательно постоянной) функцией потолка $\tau(x)$. Предположим для удобства, что функция $\tau(x)$ непрерывна. Локальная интегрируемость семейства неустойчивых и устойчивых многообразий Φ^t может быть доказана следующим образом.

Пусть $x_1, x_3 \in M$ — две близко лежащие точки такие, что

$$x_2 := W^u(x_1) \cap W^s(x_3) \neq \emptyset, \quad x_4 := W^s(x_1) \cap W^u(x_3) \neq \emptyset; \quad (6.1)$$

см. рис. 6.9. Пусть $X_1 = (x_1, t)$ и $X_3 = (x_3, t)$. Тогда слабо устойчивые и неустойчивые многообразия в точках X_1 и X_3 пересекают друг друга в частях траекторий точек x_1, x_2, x_3, x_4 ; см. рис. 6.9. Пусть $Y_1 = X_1$:

$$\begin{aligned} Y_2 &= W^u(Y_1) \cap W_\varepsilon^s(X_3), & Y_3 &= W^s(Y_2) \cap W_\varepsilon^u(X_3), \\ Y_4 &= W^u(Y_3) \cap W_\varepsilon^s(X_1), & Y_5 &= W^s(Y_4) \cap W_\varepsilon^u(X_1); \end{aligned}$$

см. рис. 6.9 (Здесь ε должно быть достаточно большим по сравнению с расстоянием между X_1 и X_3 . Кроме того, исходя из непрерывности $\tau(x)$ можно предположить, что все построение остается справедливым под действием функции потолка.)

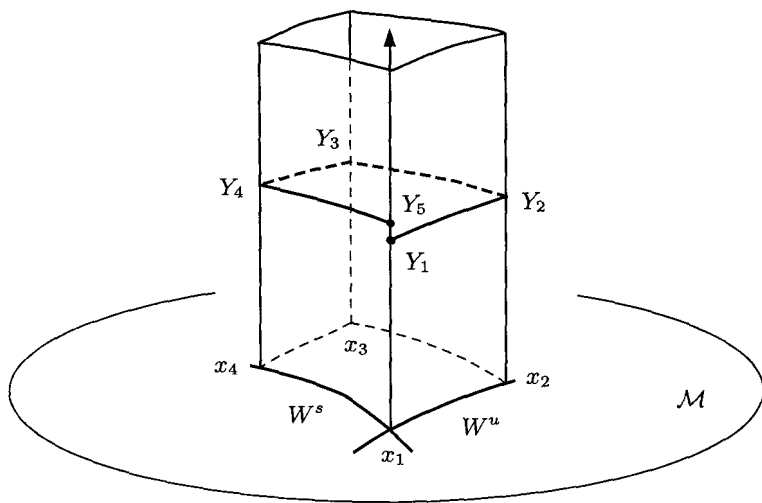


Рис. 6.9. Открытая 4-петля

Заметим, что все точки Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 принадлежат одной цепочке Хопфа, которая начинается в Y_1 и заканчивается в Y_5 . Кроме того, ее концевые точки Y_1 и Y_5 лежат на той же самой траектории потока. Данная цепочка Хопфа образует «петли» вокруг линии потока $\Phi^t(X_1)$.

Будем называть *4-петлей* цепочку Хопфа из четырех (достаточно коротких) чередующихся устойчивых и неустойчивых многообразий, которые начинаются и заканчиваются на той же траектории потока. Говорят, что 4-петля *открыта*, если ее концевые точки не совпадают, и *замкнутой* — в иных случаях (в последнем случае 4-петля — это замкнутая кривая в Ω).

Очевидно, что семейства устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболического потока Φ^t локально интегрируемы в X , если каждая 4-петля в окрестности X замкнута.

С другой стороны, если каждая 4-петля открытая и поток Φ^t эргодический, то она автоматически является перемешивающей, К-перемешивающей и имеет свойство Бернулли (в действительности достаточно предположить, что 4-петля является открытой для пар точек $x_1, x_3 \in M$, удовлетворяющих (6.1), чтобы образующееся множество имело положительную меру). Это достаточно стандартный факт в гладкой эргодической теории; он доказан, например, в [KM81, теоремы 4 и 5]. Для полноты изложения сделаем набросок доказательства в следующем параграфе.

6.10. Доказательство К-перемешивания с использованием 4-петель

Предположим, что каждая 4-петля открыта, и докажем К-перемешивание билиардного потока. Открытость 4-петель будет доказана в следующем параграфе. Наше доказательство в большой степени опирается на понятие измеримых разбиений, уже упомянутых в § 5.1, и полностью представлено в приложении А.

Пусть ξ^u обозначает разбиение Ω на гладкие компоненты неустойчивых многообразий.

УПРАЖНЕНИЕ 6.33. Проверим, что ξ^u — это измеримое разбиение. Для этого требуется построить счетный генератор; см. приложение А. Используйте генератор, построенный в § 5.1, для разбиения-«тезки» ξ^u пространства столкновений $\mathcal{M}$ и «поднятия» его до Ω .

Свойства разбиения ξ^u пространства столкновений $\mathcal{M}$, обсуждаемые в § 5.1, легко распространяются на разбиение ξ^u множества Ω .

Во-первых, разбиение $\xi_t^u = \{\Phi^t(C) : C \in \xi^u\}$ измеримо для каждого $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, семейство разбиений $\{\xi_t^u\}$, $t \in \mathbb{R}$, убывающее; то есть $\xi_{t_1}^u \succ \xi_{t_2}^u$ для любого $t_1 < t_2$. Очевидно, $\bigvee_{t=-\infty}^{\infty} \xi_t^u = \varepsilon$, что означает разбиение Ω на отдельные точки.

Пусть ξ^s — разбиение Ω на гладкие компоненты устойчивых многообразий. Оно имеет аналогичные свойства, в частности, $\xi_{t_1}^s \preccurlyeq \xi_{t_2}^s$ для любого $t_1 < t_2$ и $\bigvee_{t=-\infty}^{\infty} \xi_t^s = \varepsilon$. Из общей эргодической теории (см. приложение С) следует, что разбиения

$$\pi^u = \bigwedge_{t=-\infty}^{\infty} \xi_t^u \quad \text{и} \quad \pi^s = \bigwedge_{t=-\infty}^{\infty} \xi_t^s$$

более мелкие, чем разбиение Пинскера $\pi = \pi(\{\Phi^t\})$ потока Φ^t , то есть $\pi^u \succ \pi$ и $\pi^s \succ \pi$. Следовательно, $\pi^u \wedge \pi^s \succ \pi$.

В действительности можно доказать, что $\pi^u = \pi^s = \pi$ (см. [KM81, теорема 4]), но в нашем случае такой необходимости нет.

Пусть $\eta_t = \xi_t^u \wedge \xi_{-t}^s$ для каждого $t \in \mathbb{R}$ и $\eta_{\infty} = \bigwedge_{t=-\infty}^{\infty} \eta_t$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.34. Показать, что $\eta_{\infty} = \pi^u \wedge \pi^s$; следовательно, $\eta_{\infty} \succ \pi$. Кроме того, проверить, что разбиение η_{∞} инвариантно под действием потока Φ^t . Это означает, что соответствующая полная под- σ -алгебра $\mathfrak{G}(\eta_{\infty})$ будет Φ^t -инвариантной для каждого $t \in \mathbb{R}$. Указание: заметим, что $A \in \mathfrak{G}(\eta_{\infty})$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathfrak{G}(\xi_t^u)$ и $A \in \mathfrak{G}(\xi_t^s)$ для каждого $t \in \mathbb{R}$.

Из эргодической теории известно, что поток является К-перемешивающим тогда и только тогда, когда его разбиение Пинскера π тривиально, то есть $\pi = \nu$ (что обозначает разбиение, элементы которого имеют меру 0 или 1); см. приложение С. Таким образом, достаточно проверить, что разбиение η_{∞} тривиально.

Здесь достаточно интенсивно использовались понятия и обозначения из приложения А, особенно связанные с измеримыми разбиениями. Пусть $D \subset \Omega$ — множество полной меры и ξ_D^u и ξ_D^s обозначают сужения разбиений ξ^u и ξ^s на D . Из заключения в приложении А следует, что множество D можно выбрать таким, что $\xi_D^u \wedge \xi_D^s \succ \xi_D^u \wedge \xi_D^s$; см. определение $\xi_D^u \wedge \xi_D^s$ в приложении А. Зафиксируем такое множество D .

Для любой точки $x \in M$ рассмотрим ее отрезок траектории $\mathcal{L}_x = \{\Phi^t x : 0 < t < \tau(x)\}$. Очевидно, разбиение Ω на отрезки $\{\mathcal{L}_x : x \in M\}$ измеримо, а угловые меры на $\mathcal{L}_x$ равномерны. Пусть $E_1 = \{x \in M : m(\mathcal{L}_x \setminus D) = 0\}$, где m обозначает меру Лебега на $\mathcal{L}_x$. Очевидно, $\mu(E_1) = 1$.

Назовем точку $x_1 \in E_1$ *богатой*, если для любого $\delta > 0$ существует другая точка $x_3 \in E_1$ такая, что $0 < \text{dist}(x_1, x_3) < \delta$ и (6.1) выполняется для $x_2, x_4 \in E_1$. Обозначим через $E_2 \subset E_1$ множество богатых точек.

УПРАЖНЕНИЕ 6.35. Проверить, что $\mu(E_2) = 1$. В действительности это соотношение можно вывести из общих предположений (H1)–(H6).

Пусть $x_1 \in E_2$. Зафиксируем последовательность точек $x_3^{(i)} \in E_1, i \geq 1$, такую, что $0 < \text{dist}(x_1, x_3^{(i)}) < 1/i$ и (6.1) выполняется для $x_2^{(i)}, x_4^{(i)} \in E_1$.

Пусть $x_3 = x_3^{(i)} \in E_1$ — одна из указанных точек и $0 < t < \tau(x_1)$. Рассмотрим 4-петлю, начинающуюся в $Y_1 = (x_1, t)$ и заканчивающуюся в Y_5 , как показано на рис. 6.9. Наше главное предположение состоит в том, что все 4-петли открыты, то есть $Y_5 \neq Y_1$; следовательно, $Y_5 = \Phi^{\sigma_i}(Y_1)$ для некоторого малого $\sigma_i \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.36. Показать, что σ_i не зависит от выбора t и что $\sigma_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Заметим, что преобразование $Y_1 \mapsto Y_5 = \Phi^{\sigma_i}(Y_1)$ — это сдвиг вдоль отрезка линии $\mathcal{L}_{x_1}$; следовательно, преобразование сохраняет меру Лебега $\mathbf{m}$ на ней. Аналогично, преобразование $\mathcal{L}_{x_j} \rightarrow \mathcal{L}_{x_{j+1}}$, определяемое с помощью $Y_j \mapsto Y_{j+1}$ (при этом, безусловно, отождествляются точки $x_5 = x_1$), является аффинным; следовательно, оно сохраняет меру Лебега на этих отрезках. (Эти преобразования аналогичны голономному отображению.)

Напомним, что для каждого i и каждого $j = 2, 3, 4$ имеет место соотношение $\mathbf{m}(\mathcal{L}_{x_j^{(i)}} \setminus D) = 0$; следовательно, почти для каждой (по мере $\mathbf{m}$) точки $Y_1 \in \mathcal{L}_{x_1}$ все пять точек Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 принадлежат D .

Пусть $A \in \mathfrak{G}(\eta_\infty)$ — произвольный элемент полной под- σ -алгебры, порожденной разбиением η_∞ . Так как $\eta_\infty \preceq \xi^u \wedge \xi^s \preceq \xi_D^u \wedge \xi_D^s$, множество A является $(\xi_D^u \wedge \xi_D^s)$ -множеством (mod 0); то есть существует множество $A' = A \pmod{0}$, которое является объединением нескольких элементов разбиения $\xi_D^u \wedge \xi_D^s$. В частности, если $Y_1 \in A'$ и $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \in D$ (как выше), то все эти точки также лежат в A' . Таким образом, множество $A' \cap \mathcal{L}_{x_1}$ инвариантно (mod 0) относительно отображения Φ^{σ_i} для каждого $i \geq 1$ в следующем смысле:

$$\mathcal{L}_{x_1} \cap \Phi^{\sigma_i}(A' \cap \mathcal{L}_{x_1}) = A' \cap \Phi^{\sigma_i}(\mathcal{L}_{x_1}) \pmod{0}$$

(то есть симметричная разность этих двух множеств имеет $\mathbf{m}$ -меру нуль).

Поскольку $\sigma_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то, как следует из общего утверждения в параграфе о точках плотности Лебега в приложении А, или $\mathbf{m}(A' \cap \mathcal{L}_{x_1}) = 0$, или $\mathbf{m}(\mathcal{L}_{x_1} \setminus A') = 0$. Таким образом, каждое множество $A \in \mathfrak{G}(\eta_\infty)$ является (mod 0) объединением нескольких отрезков $\mathcal{L}_x$, $x \in \mathcal{M}$. Обозначим через B_A множество точек $x \in \mathcal{M}$, для которых отрезок $\mathcal{L}_x$ лежит (mod 0) в A (B_A рассматривается как «база» A).

Предположим, что разбиение η_∞ нетривиально. Тогда существует множество $A \in \mathfrak{G}(\eta_\infty)$ такое, что $0 < \mu_\Omega(A) < 1$ (следовательно, $0 < \mu(B_A) < 1$). Так как σ -алгебра $\mathfrak{G}(\eta_\infty)$ является Φ^t -инвариантной для каждого $t \in \mathbb{R}$ (упражнение 6.34), отсюда следует, что $\Phi^t(A) \in \mathfrak{G}(\eta_\infty)$; следовательно, $\Phi^t(A)$ — это также (mod 0) объединение нескольких отрезков $\mathcal{L}_x$, $x \in M$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.37. Показать, что множество A должно быть Φ^t -инвариантным (mod 0), то есть $A = \Phi^t(A)$ (mod 0) для каждого $t > 0$. Указание: достаточно доказать, что B_A является $\mathcal{F}$ -инвариантным (mod 0). Если это не так, то $\mu(B_A \setminus \mathcal{F}(B_A)) > 0$. Показать, что если величина $t > 0$ достаточно мала, то множество $A \cap \Phi^t(A)$ содержит только части отрезков $\mathcal{L}_x$ для $x \in B_A \setminus \mathcal{F}(B_A)$, что невозможно, так как $A \cap \Phi^t(A) \in \mathfrak{G}(\eta_\infty)$.

Из эргодичности потока Φ^t следует, что $\mu_\Omega(A) = 1$; следовательно, σ -алгебра $\mathfrak{G}(\eta_\infty)$ тривиальна. Таким образом, разбиение Пинскера π также тривиально и поток Φ^t будет К-перемешивающим.

6.11. Свойства перемешивания для потоков рассеивающих бильярдов

В данном параграфе проверим, что все 4-петли являются открытыми. При доказательстве используется тот факт, что неустойчивые и устойчивые многообразия являются фронтами волны, кривизны которых имеют противоположные знаки.

Следуя обозначениям §§ 3.11 и 4.7, обозначим через $\mathcal{B}^u(X) > 0$ и $\mathcal{B}^s(X) < 0$ кривизны фронтов волны $\mathcal{W}^u(X)$ и $\mathcal{W}^s(X)$ соответственно в точке X . Из результатов §§ 4.3, 4.7 несложно установить, что

$$0 < \mathcal{B}_{\min} \leq \mathcal{B}^u(X) < 1/t^-(X)$$

и, аналогично,

$$-1/t^+(X) < \mathcal{B}^s(X) \leq -\mathcal{B}_{\min} < 0.$$

Кроме того, функция $\mathcal{B}^s(X)$ непрерывна на множестве точек, будущие полутраектории которых избегают скользящих столкновений. Аналогично, функция $\mathcal{B}^u(X)$ непрерывна на множестве точек, прошлые полутраектории которых избегают скользящих столкновений.

Пусть $X_1 \in \Omega$ — точка, полная траектория которой избегает скользящих столкновений для всех моментов времени. Тогда в окрестности X_1 функции $\mathcal{B}^u$ и $\mathcal{B}^s$ приближенно постоянны. Следовательно, устойчивые

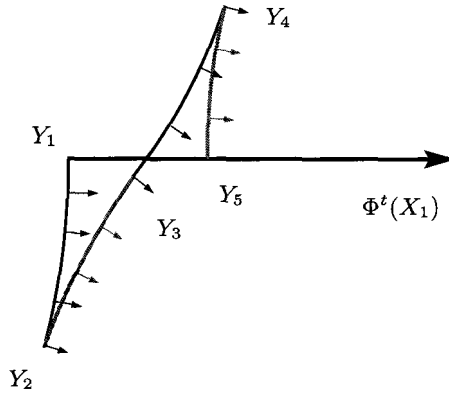


Рис. 6.10. Открытая 4-петля на бильярдном столе. Неустойчивые многообразия показаны черным, устойчивые многообразия — серым

и неустойчивые многообразия являются фронтами волны, кривые которых на бильярдном столе приближенно являются окружностями.

Изобразим 4-петлю, показанную на рис. 6.9 как последовательность четырех фронтов волны на бильярдном столе; см. рис. 6.10. Очевидно, что $Y_5 \neq Y_1$.

Следствие 6.38. Для рассеивающих бильярдных категорий A и B поток $\Phi^t: \Omega \rightarrow \Omega$ является перемешивающим, K -перемешивающим и имеет свойство Бернулли.

УПРАЖНЕНИЕ 6.39. Показать, что если длины фронтов волны на рис. 6.10 приближенно равны $\sim \delta$, то $|\sigma| = \text{dist}(Y_1, Y_5) \sim \delta^2$. Напомним, что σ определяется $Y_5 = \Phi^\sigma(Y_1)$. Указание: аппроксимировать фронты волны окружностями.

Интересно, что существует точная формула для σ для любой 4-петли в рассеивающем бильярде.

Лемма 6.40. Пусть $Y_1, \dots, Y_5$ — концевые точки 4-петли и $Y_5 = \Phi^\sigma(Y_1)$. Обозначим через K проекцию 4-петли на базу M (заметим, что K — это область, ограниченная двумя устойчивыми и двумя неустойчивыми многообразиями отображения $\mathcal{F}$). Тогда $|\sigma| = \mu(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наше доказательство повторяет доказательство [KM81, лемма 5.1].

УПРАЖНЕНИЕ 6.41. Пусть $D \subset M$ — произвольная область с кусочно-гладкой границей. Используя теорему Грина, показать, что

$$\mu(D) = - \int_{\partial D} \sin \varphi \, dr,$$

где граница ∂D обходится против часовой стрелки в координатной плоскости $r\varphi$.

Для заданной 4-петли, проекция которой на M есть K , обозначим через $s(y)$ функцию на границе ∂K , которая представляет (временную) высоту нашей 4-петли над базой M . То есть для любого $y \in \partial K$ полагаем $s(y)$ равной единственному моменту времени $s \in (0, \tau(y))$ такому, что точка $\Phi^s(y)$ лежит на 4-петле.

Заметим, что функция $s(y)$ гладкая на каждом устойчивом и неустойчивом многообразии, ограничивающем K ; она непрерывна в точках x_2, x_3 и x_4 и имеет скачок в точке x_1 , равный σ . Следовательно,

$$\sigma = \pm \int_{\partial K} ds(y),$$

где знак зависит от направления обхода ∂K .

Для завершения доказательства леммы 6.40 остается заметить, что $ds(y) = \pm \sin \varphi \, dr$, где знак зависит от направления движения вдоль ∂K (см. рис. 6.11). ■

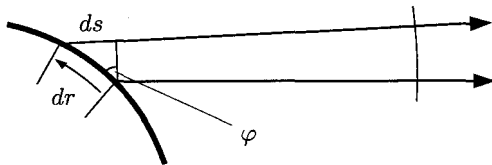


Рис. 6.11. Доказательство соотношения $ds = \sin \varphi \, dr$

ГЛАВА 7

Статистические свойства

7.1. Введение

В эргодической теории, которая изучает преобразования, сохраняющие меру, существует иерархия свойств, которые характеризуют по большей части сильные степени хаоса¹: эргодичность, слабое перемешивание, сильное перемешивание, множественное перемешивание, К-перемешивание и свойство Бернулли. Из каждого свойства этого списка вытекают все предыдущие (более слабые) свойства. Наибольшая степень хаоса (свойство Бернулли) влечет все остальные. Все автоморфизмы Бернулли с одинаковой энтропией изоморфны. Таким образом, свойство Бернулли является наибольшей возможной степенью хаоса в терминах чистой эргодической теории.

Однако при работе с гладкими отображениями (с особенностями или без) важными становятся другие вопросы, возникающие в физических приложениях. Для заданного гладкого отображения $F: M \rightarrow M$, сохраняющего меру μ , и гладкой функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ («наблюдаемой величины») можно изучить скорость убывания корреляций, центральную предельную теорему и другие предельные теоремы; см. определения ниже. Все это в целом известно как *статистические свойства*; см. определения в следующем параграфе.

В то время как перечисленные выше эргодические свойства характеризуют хаос в теоретико-множественных терминах, статистические свойства «говорят» на языке теории вероятности: они утверждают близкую схожесть между заданной динамической системой (M, F, μ, f) и последовательностями независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных переменных.

Возникает вопрос о том, как сравнить эргодические и статистические свойства. Строго говоря, первые из них не сильнее и не слабее статистических свойств; просто они характеризуют хаос в других терминах.

¹Для краткости, ограничим обсуждение обратимыми преобразованиями (автоморфизмами).

Например, существуют гладкие отображения Бернулли, для которых статистические свойства очень плохи для типичных гладких наблюдаемых величин (корреляции убывают медленно, центральная предельная теорема не выполняется и т. д.). С другой стороны, существуют системы с чисто эргодическими характеристиками (даже не перемешивающие), для которых центральная предельная теорема удивительным образом выполняется для некоторых наблюдаемых величин (это происходит для иррациональных окружностей вращения [BD87] и циклов [Ch95, предложение 3.6]).

Однако для типичных моделей сильные статистические свойства требуют хотя бы свойства перемешивания, и едва ли их можно представить без K -перемешивания и свойства Бернулли. При изучении билиардов эргодические свойства (включая свойство Бернулли) определенно составляют более базовый уровень наших знаний, чем, скажем, оценки для корреляции и предельные теоремы. Именно поэтому эргодические свойства билиардов были представлены раньше. Теперь же вернемся к их статистическим свойствам.

7.2. Определения

Пусть $F: M \rightarrow M$ — обратимое отображение, сохраняющее вероятностную меру μ , а $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция (в физике f обычно называется *наблюдаемой*).

Лемма 7.1. Последовательность

$$\mathcal{X}_n = f \circ F^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7.1)$$

называется *стационарным стохастическим процессом*, причем (M, μ) является основным вероятностным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стационарность последовательности $\{\mathcal{X}_n\}$ означает, что ее конечномерные распределения инвариантны относительно сдвига; см. приложение В. Точнее говоря, для любых несовпадающих $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$ совместное распределение $\mathcal{X}_{k+k_1}, \dots, \mathcal{X}_{k+k_m}$ не зависит от $k \in \mathbb{Z}$; то есть для любого борелева множества $B \subset \mathbb{R}^m$ вероятность

$$\mu((\mathcal{X}_{k+k_1}, \dots, \mathcal{X}_{k+k_m}) \in B)$$

не зависит от k . Этот факт следует из инвариантности меры μ . Оставим эту проверку читателю в качестве упражнения. ■

Таким образом, для заданной функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ее значения $f \circ F^n$ для всех моментов времени $n \in \mathbb{Z}$ образуют последовательность (одинаково распределенных) случайных переменных. Эту последовательность можно рассматривать как стационарный стохастический процесс (с дискретным временем) и привлечь средства теории вероятности для описания его поведения.

Например, пусть $f = 1_A$ — индикатор множества $A \subset M$ (то есть $f(x) = 1$ для $x \in A$ и 0 для $x \notin A$); тогда $\mathcal{X}_n = 1_{F^{-n}A}$ — это индикатор прообраза $F^{-n}(A)$.

Будем говорить, что $\mathcal{X}_n$ и $\mathcal{X}_m$, определенные по формуле (7.1), независимы, если для любых борелевых множеств $E, G \subset \mathbb{R}$

$$\mu(\mathcal{X}_n \in E, \mathcal{X}_m \in G) = \mu(\mathcal{X}_n \in E) \mu(\mathcal{X}_m \in G).$$

Для индикатора $f = 1_A$ это условие сводится к условию независимости множеств $F^{-n}(A)$ и $F^{-m}(A)$.

Особенный интерес для нас представляют частичные суммы

$$S_n = f + f \circ F + f \circ F^2 + \dots + f \circ F^{n-1}. \quad (7.2)$$

Говорят, что последовательность (7.1) удовлетворяет усиленному закону больших чисел (УЗБЧ), если

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \langle f \rangle := \int_M f d\mu \quad (7.3)$$

почти везде (ср. с приложением В). Легко понять, что выполнение УЗБЧ гарантируется эргодической теоремой Биркгофа для всех эргодических отображений и интегрируемых наблюдаемых величин.

Дополнительными вероятностными законами, которые характеризуют стохастические процессы, будут центральная предельная теорема (ЦПТ), принцип инвариантности (см. § 7.9) и т. д. Эти законы выведены в классической теории вероятности для независимых одинаково распределенных случайных переменных и затем расширены на различные классы слабо зависящих стационарных процессов; см. обзор [DPS86].

Тем не менее необходимо осознавать, что случайные переменные $\mathcal{X}_n = f \circ F^n$, появляющиеся из динамической системы $F: M \rightarrow M$, не являются независимыми (за исключением тривиальных примеров). Таким образом, чтобы вывести аналоги ЦПТ, принципа инвариантности и т. д., для динамически генерируемых случайных процессов необходимо использовать самые современные средства теории вероятности.

Зависимость между случайными переменными $\mathcal{X}_n$ и $\mathcal{X}_m$ характеризуется их ковариацией

$$\text{Cov}(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}_m) = \langle \mathcal{X}_n \mathcal{X}_m \rangle - \langle \mathcal{X}_n \rangle \langle \mathcal{X}_m \rangle,$$

где $\langle \cdot \rangle$ обозначает математическое ожидание; ср. с (7.3). Для стационарных процессов $\langle \mathcal{X}_n \rangle = \langle \mathcal{X}_m \rangle$ и $\text{Cov}(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}_m)$ зависят только от $|n - m|$. Введем величину

$$\mathbf{C}_f(n) = \text{Cov}(f, f \circ F^n) = \langle f \cdot (f \circ F^n) \rangle - \langle f \rangle^2. \quad (7.4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.2. Показать, что $\mathbf{C}_f(-n) = \mathbf{C}_f(n)$ и $\mathbf{C}_f(n - m) = \text{Cov}(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}_m)$.

При изучении динамических систем, согласно традиции, принятой в физической литературе, величина (7.4) называется *корреляцией*, а не ковариацией. В действительности чаще всего исследуются более общие корреляционные функции, а именно

$$\mathbf{C}_{f,g}(n) = \langle f \cdot (g \circ F^n) \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle, \quad (7.5)$$

где $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ — две наблюдаемые величины. Чтобы отличать функцию $\mathbf{C}_f(n)$ от $\mathbf{C}_{f,g}(n)$, первую функцию называли *автокорреляционной*.

Если бы переменные $\mathcal{X}_n$ и $\mathcal{X}_m$ были независимы при $n \neq m$, то $\langle \mathcal{X}_n \mathcal{X}_m \rangle = \langle \mathcal{X}_n \rangle \langle \mathcal{X}_m \rangle$; следовательно, $\mathbf{C}_f(n - m) = 0$. Но, как уже было сказано, едва ли можно ожидать независимость в детерминированной системе; текущее состояние $x \in M$ полностью определяет состояние $x_n = F^n(x)$ в любой момент времени $n \in \mathbb{Z}$. Это лишает надежды на какую-либо независимость (или даже малейшую неопределенность в будущем!).

Однако предположим, что состояние системы известно только приближенно. В этом случае картина меняется. Скажем, известно, что $x \in A$, и нам хотелось бы узнать, будет ли $x_n = F^n(x) \in B$, где $A, B \subset M$ — некоторые подмножества (возможно, очень малые). Тогда, предполагая, что F перемешивающее, вероятность того, что $x_n \in B$ для заданного $x \in A$, будет равна

$$\mu(F^n(x) \in B / x \in A) = \mu(B \cap F^n A) / \mu(A) \rightarrow \mu(B)$$

при $n \rightarrow \infty$, так что события $\{x \in A\}$ и $\{x_n \in B\}$ становятся асимптотически независимыми!

Асимптотическая независимость x и $x_n = F^n(x)$ в этом смысле эквивалентна приближенному обращению в нуль корреляций (*убывание корреляций*), что является известным утверждением в эргодической теории.

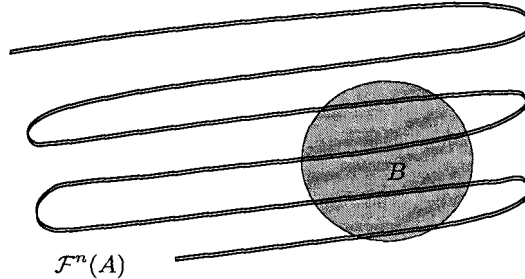


Рис. 7.1. Асимптотическая независимость в перемешивающих отображениях

Утверждение. Отображение F является перемешивающим тогда и только тогда, когда для любых двух наблюдаемых величин $f, g \in L^2_\mu(M)$ имеет место предел $C_{f,g}(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (приложение С).

Таким образом, сходимость $C_{f,g}(n) \rightarrow 0$ обеспечивается перемешиванием, но, чтобы доказать ЦПТ и другие предельные теоремы, необходима быстрая сходимость в смысле, определяемом ниже. И здесь нас ожидает неприятный сюрприз: для типичных наблюдаемых величин f, g , сходимость очень медленная, слишком медленная для выполнения какой-либо из предельных теорем.

Точнее говоря, для любого аperiodического преобразования, сохраняющего меру, и любой последовательности $c_n \rightarrow 0$ (медленно сходящейся) имеет место неравенство $|C_{f,g}(n)| \geq |c_n|$ для типичных интегрируемых (или даже для типично ограниченных) функций f и g . Даже для непрерывных отображений на компактных метрических пространствах сходимость произвольно медленная для характеристических непрерывных функций; ср. с обсуждением в [Ch95]. Чтобы гарантировать быструю сходимость, необходимо ограничить класс отображений и наблюдаемых величин гладкими или почти гладкими величинами.

К счастью, это в точности тип отображений и наблюдаемых величин, которые встречаются в физических моделях, где фазовое пространство M чаще всего предполагается гладким (часто компактным) многообразием, а отображение F является гладким или кусочно-гладким. Наблюдаемые величины, представляющие интерес для физики, обычно являются гладкими (или кусочно-гладкими) функциями на фазовом пространстве. Внутри этого класса отображений и наблюдаемых величин скорость сходимости $C_{f,g}(n) \rightarrow 0$ становится подходящей.

Чаще всего в приложениях встречаются следующие два типа сходимости.

Определение 7.3. Говорят, что корреляции убывают экспоненциально быстро, если

$$|C_{f,g}(n)| \leq \text{const } e^{-a|n|} \quad (7.6)$$

для некоторого $a > 0$ и всех $n \neq 0$. Говорят, что корреляции убывают алгебраически (или полиномиально), если

$$|C_{f,g}(n)| \leq \text{const } |n|^{-a} \quad (7.7)$$

для некоторого $a > 0$ и всех $n \neq 0$.

Экспоненциального убывания корреляций обычно достаточно для доказательства предельных теорем. Алгебраического убывания корреляций может быть достаточно, если значение a достаточно велико, но в этом случае доказательства становятся более сложными. Если $a \leq 1$, то предельные теоремы, как правило, не выполняются.

Для гладких равномерно гиперболических отображений (диффеоморфизмов Аносова и аксиомы А) корреляции затухают экспоненциально для всех гладких (даже для всех непрерывных по Гельдеру) наблюдаемых величин [Bow75, Ru78]. Для неравномерно гиперболических отображений корреляции обычно убывают алгебраически [Hu01].

Мы увидим, что для рассеивающих билиардов категорий А и В (где гиперболичность равномерная) корреляции убывают экспоненциально, так же, как и для отображений Аносова и аксиомы А. Для рассеивающих билиардов категории Е и для многих нерассеивающих хаотических билиардов гиперболичность неравномерна и корреляции убывают полиномиально [Mac83, Mar04, CZ05].

Далее сформулируем центральную предельную теорему.

Определение 7.4. Говорят, что последовательность (7.1) удовлетворяет центральной предельной теореме (ЦПТ), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ \frac{S_n - n\langle f \rangle}{\sqrt{n}} \leq z \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} ds \quad (7.8)$$

для всех $-\infty < z < \infty$. Здесь $\sigma = \sigma_f \geq 0$ — это постоянная². Эквивалентно, $(S_n - n\langle f \rangle)/\sqrt{n}$ сходится по распределению к нормальному закону $\mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$.

²В случае $\sigma_f = 0$ правая часть (7.8) полагается равной 0 при $z < 0$ и 1 при $z > 0$.

Дисперсия σ_f^2 в ЦПТ связана с корреляциями (7.4) с помощью соотношения

$$\sigma_f^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_f(n) = C_f(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_f(n). \quad (7.9)$$

Отсюда следует, что необходимым условием для центральной предельной теоремы будет суммируемость корреляционной функции $C_f(n)$. Это условие можно считать минимальным требованием для скорости сходимости $C_f(n) \rightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.5. Интересно исследовать вырожденный случай $\sigma_f^2 = 0$. Он возникает тогда и только тогда, когда функция f гомологична постоянной, что означает, что $f = K + g - g \circ F$ для некоторой $g \in L^2(M)$ и постоянной K .

УПРАЖНЕНИЕ 7.6. Показать, что если $f = K + g - g \circ F$ для некоторой функции $g \in L^2(M)$, то $\langle f \rangle = K$ и ЦПТ выполняется с $\sigma_f^2 = 0$. (Обратное утверждение также верно, но его доказательство намного сложнее; см. § 7.8.)

Некоторые другие предельные теоремы будут введены в § 7.9. Более серьезное обсуждение статистических свойств динамических систем читатель может найти в [Ch95, CY00, Den89].

7.3. Исторический обзор

При изучении статистических свойств гладких гиперболических динамических систем использовались различные подходы.

Все началось в конце 1960-х годов, когда для нескольких классов гладких гиперболических отображений были построены разбиения Маркова. Сначала они были построены Адлером и Вейсом для линейных автоморфизмов тора [AW67], затем — Синаем для диффеоморфизмов Аносова [Sin68a, Sin68b] и Боуэном для диффеоморфизмов аксиомы А [Bow70]. Конечное разбиение Маркова может использоваться для кодирования траектории каждой точки с помощью бесконечной последовательности символов из конечного алфавита. Таким образом, динамику можно представить как символическую систему некоторого типа, названную «топологической марковской цепью» или «подсдвигом конечного типа».

С другой стороны, бесконечную последовательность символов можно отождествить с конфигурацией одномерного решетчатого газа — классического объекта исследования в статистической механике. Таким образом, изучение гиперболических отображений стало тесно связанным с теорией решетчатых газов — связь, которая оказала огромное влияние на обе дисциплины.

Как это часто случается, приблизительно в то же самое время (в конце 1960-х годов) физики придумали состояния Гиббса для одномерных решеточных газов; это было сделано Добрушиным [Dob68a, Dob68b, Dob68c], а также Лэндфордом и Рюэлем [LR69]. В начале 1970-х Синай [Sin72] и Рюэль [Ru76] применили теорию состояний Гиббса для построения инвариантных мер Гиббса для диффеоморфизмов Аносова и аксиомы А. Таким образом, был найден большой класс физически значимых инвариантных мер. Теория состояний Гиббса в физике (которая известна под именем «термодинамический формализм») также содержала факты, которые «переводились» в экспоненциальное убывание корреляций и центральную предельную теорему для мер Гиббса и непрерывных по Гельдеру наблюдаемых величин; см. [Bow75].

Ключевым элементом при изучении состояний Гиббса была щель в спектре для оператора Перрона–Фробениуса, действующего на непрерывные по Гельдеру плотности. Оператор Перрона–Фробениуса очень эффективный инструмент, но его использование включает в себя очень абстрактные элементы функционального анализа, которые в известной степени скрывают динамическое содержание задачи. В любом случае этот подход преобладал в 1970-е годы. Для полного изложения соответствующих методов и результатов читатель может обратиться к обзорам [Bow75, Ru78, PP90, Ba00, Ch02].

В начале 1980-х была сделана попытка расширить термодинамический формализм на рассеивающие билиарды. Началось с того, что Бунимович и Синай [BS80] описали разбиения Маркова для рассеивающих билиардов категории А; более формальное построение разбиений Маркова для столов категорий А, В и С см. в [BSC90]. Однако оказалось, что такие разбиения никогда не будут конечными (они всегда счетные). Этот факт сделал символическое представление неэффективным, а оператор Перрона–Фробениуса — неудобным.

Вместо этого Бунимович и Синай [BS81] аппроксимировали отображение столкновения $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ с помощью вероятностной марковской цепи со счетным числом состояний. Для этого случая они вывели статистические свойства отображения $\mathcal{F}$ из быстрого перемешивания в приближенной цепи. Ключевой составляющей в их анализе стала проверка условия Деблина. В качестве альтернативы можно аппроксимировать отображение $\mathcal{F}$ счетным семейством конечных марковских цепей, и условие Деблина можно заменить лучшими условиями перемешивания, что ведет к более точным результатам; см. [BSC91].

В любом случае аппроксимация марковскими цепями позволила вывести для центральной предельной теоремы и нескольких других предельных

теорем почти идеальные оценки на корреляционную функцию. В [BS81] было доказано, что

$$|C_{f,g}(n)| \leq \text{const } e^{-a|n|^\gamma} \quad (7.10)$$

для некоторых значений $a > 0$ и $\gamma \in (0, 1)$; ср. с (7.6). Такой режим убывания был назван *экспоненциально вытянутым*. Оценка (7.10) была улучшена в [BSC91], где было показано, что $\gamma \geq 1/2$, но эта оценка была по-прежнему слабее, чем (7.6). Более подробное представление этих идей читатель может найти в [BSC91, Ch95].

Необходимость в экспоненциальных оценках на корреляционные функции для рассеивающих билиардов была очевидна, и в 1998 году Л.-С. Юнг получила одну из оценок! Ею был разработан [Yø98] (см. также [BY00]) новый подход к гиперболическим отображениям с особенностями, основанный на *башенном построении* (который в некотором смысле является более удобным вариантом разбиения Маркова). Кроме того, она придумала, как можно использовать оператор Перрона – Фробениуса. Это позволило получить экспоненциальную границу для корреляций (7.6) для рассеивающих билиардов категории A и непрерывных по Гельдеру наблюдаемых величин. Чернов расширил [Ch99] результаты Юнг на билиарды категорий B и C.

Таким образом, Юнг восстановила степень оператора Перрона – Фробениуса, но уже через год она отказалась от него в пользу еще более эффективного средства. Она вывела вновь [Yø99] экспоненциальную оценку для корреляции (7.6) для гиперболических отображений с помощью метода спаривания (заимствованного из теории вероятности), таким образом, игнорируя сразу и символичный формализм, и оператор Перрона – Фробениуса. Основная идея этого нового подхода заключается в том, что образы различных гладких мер на M становятся ближе друг к другу и, таким образом, сходятся к общему пределу; степень «близости» и скорость сходимости определяются спариванием. Ее полное доказательство было, в сущности, динамическим, в отличие от ранних методик, основанных на операторах.

Элегантность нового метода Юнг была недавно продемонстрирована Брессау (Bressaud) и Ливерани (Liverani) [BL02], которые применили его к отображениям Аносова и восстановили результаты Боуэна 1970-х годов. В дальнейшем Долгопят упростил метод спаривания, заменив гладкие меры на M одномерными мерами на неустойчивых кривых, которые сделали доказательство еще более прозрачным. В данной главе представим самый последний вариант метода спаривания из [CD06, приложение A] и [Ch06b].

Как и в предыдущих главах, обсуждение ограничивается билиярдами категории А, однако, приложив дополнительные усилия, главные заключения можно расширить на категории В и С. В действительности многие из доказательств достаточно общие и могут быть применены к другим гиперболическим отображениям с особенностями.

7.4. Стандартные пары и семейства

Начнем с наблюдения, побудившего использовать одномерные меры на неустойчивых кривых (было предложено Долгопятом).

Разделим пространство столкновений $\mathcal{M}$ на малые подобласти (ячейки) $D_i \subset \mathcal{M}$ и представим гладкую меру μ_0 на $\mathcal{M}$ как взвешенную сумму его сужений на эти ячейки. Теперь образ малой области $D \subset \mathcal{M}$ под действием отображения $\mathcal{F}^n$ получается сильно растянутым в неустойчивом направлении, сильно сжат в устойчивом направлении и, возможно, разрезан особенностями на множество частей. Таким образом, $\mathcal{F}^n(D)$ вскоре будет выглядеть как объединение одномерных кривых, каждая из которых напоминает неустойчивое многообразие отображения столкновений $\mathcal{F}$. С этого момента мера $\mathcal{F}^n(\mu_0)$ будет вести себя как взвешенная сумма гладких мер на неустойчивых кривых. Заметим, что, кроме того, необходимо «обрезать» $\mathcal{F}^n(D)$ вдоль линий однородности S_k , $|k| \geq k_0$, введенных в § 5.3, чтобы гарантировать контроль за искажениями.

Введем класс вероятностных мер, опирающихся на неустойчивые кривые (напомним читателю, что неустойчивые кривые, введенные в § 4.5, будут более общими, чем неустойчивые многообразия).

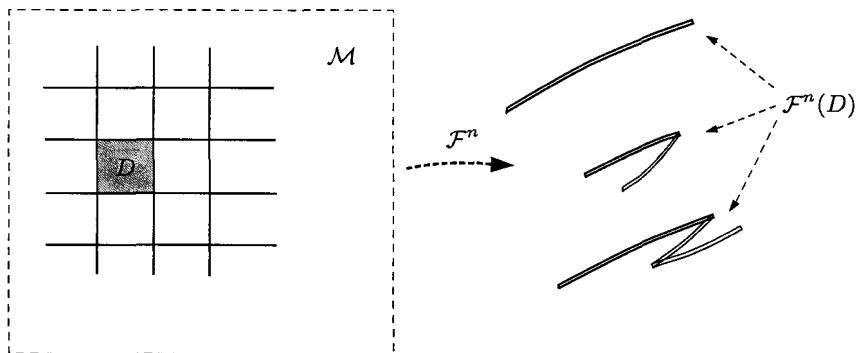


Рис. 7.2. Эволюция ячейки $D \subset \mathcal{M}$

Определение 7.7. *Стандартная пара* (W, ν) — это однородная неустойчивая кривая $W \subset \mathcal{M}$ с определенной на ней вероятностной мерой ν , плотность ρ которой относительно меры Лебега на W регулярна; см. ниже.

Регулярность плотности $\rho(x)$ должна быть сравнима с регулярностью отображения $\mathcal{F}$; последнее выражается двумя ключевыми оценками: ограничения на искажения (§ 5.6) и абсолютная непрерывность (§ 5.8). В то время как искажения будут достаточно гладкими (теоремы 5.29 и 5.31), якобиан голономного отображения удовлетворяет только «динамически определенной непрерывности по Гельдеру» (предложение 5.48). В соответствии с этим потребуем, чтобы плотность $\rho(x)$ была динамически непрерывной по Гельдеру в смысле формулы, приведенной ниже.

Пусть $s_+(x, y)$ — функция «разделения времени», определенная в (5.31), и $\theta = \Lambda^{-1/6} < 1$ (см. доказательство предложения 5.48). Кроме того, зафиксируем достаточно большую постоянную $C_\tau > 0$.

Определение 7.8. Плотность $\rho(x)$ на однородной неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}$ называется *регулярной*, если

$$|\ln \rho(x) - \ln \rho(y)| \leq C_\tau \theta^{s_+(x, y)} \quad (7.11)$$

(нижний индекс τ в C_τ обозначает «регулярный» (regular)).

УПРАЖНЕНИЕ 7.9. Проверить, что плотность, удовлетворяющая (7.11), может иметь разрыв в каждой точке счетного и плотного множества $W \cap \mathcal{S}_\infty^{\mathbb{H}}$, но она должна быть непрерывной на его дополнении $W \setminus \mathcal{S}_\infty^{\mathbb{H}}$. Кроме того, показать, что

$$\max_{x \in W} \rho(x) / \min_{x \in W} \rho(x) \leq \text{const} = e^{C_\tau}. \quad (7.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.10. Условие (7.11) не изменится, если умножить плотность $\rho(x)$ на постоянную. Следовательно, для заданной стандартной пары (W, ν) любая подкривая $W' \subset W$ с условной мерой, порожденной ν на ней, образуют стандартную пару.

Напомним, что разбиение $\xi_{\mathbb{H}}^u$ области $\mathcal{M}$ на (максимальные) неустойчивые H -многообразия $\{W_{\mathbb{H}}^u\}$ измеримо; условная мера на каждом $W_{\mathbb{H}}^u$, порожденная μ , является u -SRB мерой $\nu_{W_{\mathbb{H}}^u}$, плотность которой определена в (5.4); ср. с § 5.4.

УПРАЖНЕНИЕ 7.11. Проверить, что любое неустойчивое H -многообразие $W_{\mathbb{H}}^u$ с u -SRB мерой $\nu_{W_{\mathbb{H}}^u}$ на ней образуют стандартную пару. Указание: использовать (5.32) и следствие 5.30.

Класс стандартных пар инвариантен под действием $\mathcal{F}$ в следующем смысле.

Предложение 7.12. Пусть (W, ν) — стандартная пара. Для каждого $n \geq 0$ обозначим через $W_{i,n}$ H -компоненты $\mathcal{F}^n(W)$. Тогда $\mathcal{F}^n(\nu) = \sum_i c_{i,n} \nu_{i,n}$, где $\sum_i c_{i,n} = 1$, и каждая пара $(W_{i,n}, \nu_{i,n})$ является стандартной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции достаточно доказать это утверждение для $n = 1$. Пусть $W_{i,1}$ — H -компонента $\mathcal{F}(W)$ и $x, y \in W_{i,1}$. Обозначим $x_1 = \mathcal{F}^{-1}(x)$ и $y_1 = \mathcal{F}^{-1}(y)$. Заметим, что справедливо равенство $s_+(x, y) = s_+(x_1, y_1) - 1$. Используя лемму 5.27 об ограничениях на искажения и (5.32), получим

$$\begin{aligned} |\ln \rho(x) - \ln \rho(y)| &\leq |\ln \rho_{i,1}(x_1) - \ln \rho_{i,1}(y_1)| + \\ &\quad + |\ln \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-1}(x) - \ln \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-1}(y)| \leq \\ &\leq C_r \theta^{s_+(x_1, y_1)} + C (\text{dist}(x, y))^{1/3} \leq \\ &\leq C_r \theta^{s_+(x, y)} + C' \theta^{s_+(x, y)} \end{aligned}$$

для некоторой постоянной $C' = C'(\mathcal{D}) > 0$. Таким образом, достаточно предположить, что C_r настолько велико, что $C_r \theta + C' \leq C_r$. ■

Очевидно, что $\mathcal{F}^n$ преобразует меру ν из стандартной пары в взвешенную сумму мер на конечном или счетном числе стандартных пар. Данное наблюдение побуждает нас ввести еще более общие семейства стандартных пар.

Определение 7.13. Стандартное семейство — это произвольное (счетное или несчетное) семейство $\mathcal{G} = \{(W_\alpha, \nu_\alpha)\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, стандартных пар с вероятностной фактор-мерой $\lambda_{\mathcal{G}}$ на индексном множестве $\mathcal{A}$. Такое семейство порождает вероятностную меру $\mu_{\mathcal{G}}$ на объединении $\cup_\alpha W_\alpha$ (и, таким образом, на $\mathcal{M}$):

$$\mu_{\mathcal{G}}(B) = \int \nu_\alpha(B \cap W_\alpha) d\lambda_{\mathcal{G}}(\alpha) \quad \forall B \subset \mathcal{M}.$$

Таким образом, предложение 7.12 утверждает, что $\mathcal{F}^n$ преобразует стандартную пару в счетное стандартное семейство (фактор-мера которого определяется последовательностью коэффициентов $\{c_{i,n}\}$). Аналогично, любое стандартное семейство $\mathcal{G}$ отображается $\mathcal{F}^n$ в другое стандартное семейство $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}^n(\mathcal{G})$. Легко увидеть, что $\mu_{\mathcal{G}_n} = \mathcal{F}^n(\mu_{\mathcal{G}})$.

Важно уметь управлять размером кривых W_α в стандартном семействе $\mathcal{G} = \{(W_\alpha, \nu_\alpha)\}$. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ и $x \in W_\alpha$ точка x делит кривую W_α на две части. Обозначим через $r_{\mathcal{G}}(x)$ длину короткой части (в евклидовой метрике). Это порождает функцию $r_{\mathcal{G}}$ на $\bigcup_\alpha W_\alpha$. Введем обозначение

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{G}} := \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\mu_{\mathcal{G}}(r_{\mathcal{G}} < \varepsilon)}{\varepsilon} = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\int \nu_\alpha(x \in W_\alpha: r_{\mathcal{G}}(x) < \varepsilon) d\lambda_{\mathcal{G}}(\alpha)}{\varepsilon}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.14. Пусть $\mathcal{G}$ состоит из одной стандартной пары (W, ν) . Предположим, что ν — это нормированная мера Лебега на W ; показать, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}} = 2/|W|$. Далее, пусть ν имеет произвольную регулярную плотность; тогда показать, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}} \asymp 1/|W|$; то есть $C_1 < \mathcal{Z}_{\mathcal{G}}|W| < C_2$, где $C_1 = C_1(\mathcal{D}) > 0$ и $C_2 = C_2(\mathcal{D}) > 0$ — постоянные (символ $\asymp$ был введен в § 4.3). Указание: использовать последний результат упражнения 7.9.

Следующее упражнение обобщает предыдущее.

УПРАЖНЕНИЕ 7.15. Пусть $\mathcal{G} = \{(W_\alpha, \nu_\alpha)\}$ — стандартное семейство. Показать, что

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{G}} \asymp \int \frac{d\lambda_{\mathcal{G}}(\alpha)}{|W_\alpha|}$$

(в этой формуле или обе величины конечны, или обе бесконечны).

Рассмотрим только стандартные семейства $\mathcal{G}$ с $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}} < \infty$. Далее исследуем, как величина $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}_n}$, где $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}^n(\mathcal{G})$, меняется в зависимости от n .

УПРАЖНЕНИЕ 7.16. Пусть $\mathcal{G}$ — стандартное семейство, состоящее из одной стандартной пары (W, ν) . Пусть $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}^n(\mathcal{G})$. Используя первую лемму о росте (теорема 5.52) и (7.12), показать, что для всех $n \geq 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \nu(r_{\mathcal{G}_n}(\mathcal{F}^n x) < \varepsilon) &\leq \text{const}[(\vartheta_1 \hat{\Lambda})^n \nu(r_{\mathcal{G}}(x) < \varepsilon/\hat{\Lambda}^n) + \varepsilon] \leq \\ &\leq \text{const}[\vartheta_1^n \varepsilon/|W| + \varepsilon], \end{aligned} \quad (7.13)$$

где постоянные зависят только от стола $\mathcal{D}$. (Напомним, что $0 < \vartheta_1 < 1$.)

³Во всех последующих доказательствах кривые W_α каждого стандартного семейства не пересекаются; однако в приведенном общем определении в этом условии нет необходимости: функция $r_{\mathcal{G}}$ определяется на каждой кривой W_α отдельно.

Предложение 7.17. Пусть $\mathcal{G} = \{(W_\alpha, \nu_\alpha)\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — это стандартное семейство и $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}^n(\mathcal{G})$. Тогда для всех $n \geq 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{G}_n} \leq c_1 \vartheta_1^n \mathcal{Z}_{\mathcal{G}} + c_2$$

для некоторых постоянных $c_i = c_i(\mathcal{D}) > 0$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проинтегрировать (7.13) по факторе $\lambda_{\mathcal{G}}$ и использовать результат упражнения 7.15. ■

Очевидно, что если величина $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}$ очень велика, то последовательность $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}_n}$ убывает экспоненциально быстро, пока не достигнет некоторого порогового значения, скажем $c_1 + c_2$.

Следствие 7.18. Для всех $n \geq \kappa \ln \mathcal{Z}_{\mathcal{G}}$ имеем $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}_n} \leq c_3$, где $\kappa, c_3 > 0$ — некоторые постоянные.

Читатель должен заметить схожесть между предложением 7.17 и следствием 7.18 и двумя леммами о росте (теоремы 5.52–5.53).

Исходя из этих фактов, введем понятие собственного семейства. Пусть $C_p > 0$ — достаточно большая постоянная (нижний индекс p в C_p обозначает «собственный» («proper»)).

Определение 7.19. Стандартное семейство $\mathcal{G}$ называется *собственным*, если $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}} \leq C_p$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.20. Проверить, что семейство, состоящее из одной стандартной пары (W, ν) , будет собственным тогда и только тогда, когда $|W| \geq c_0 = \text{const} > 0$, то есть тогда и только тогда, когда кривая W не слишком коротка (величину c_0 можно сделать произвольно малой, выбирая C_p достаточно большим). Для краткости назовем такие пары (W, ν) *собственными стандартными парами*.

ПРИМЕР 7.21. В упражнении 7.11 было установлено, что каждое неустойчивое H -многообразие $W_{\mathbb{H}}^u$ с u -SRB мерой $\nu_{W_{\mathbb{H}}^u}$ на нем является стандартной парой. Таким образом, разбиение $\mathcal{M}$ на максимальные неустойчивые H -многообразия $\{W_{\mathbb{H}}^u\}$ с u -SRB мерами $\{\nu_{W_{\mathbb{H}}^u}\}$, определенными на них, и фактор-мерой, порожденной μ , образует (специальное) стандартное семейство $\mathcal{E}$. Безусловно, для этого семейства $\mu_{\mathcal{E}} = \mu$. Заметим также, что $\mathcal{E}$ отображается с помощью $\mathcal{F}$ в себя (ср. с предложением 5.4).

УПРАЖНЕНИЕ 7.22. Проверить, что семейство $\mathcal{E}$ собственное. Указание: используйте теорему 5.17.

Рассмотрим более общий случай, когда $\{W\}$ — гладкое слоение $\mathcal{M}$ на неустойчивые кривые, которые протягиваются от $\varphi = -\pi/2$ до $\varphi = \pi/2$. Разделяя их прямыми $\mathbb{S}_k$, $|k| \geq k_0$, введенными в § 5.3, получим гладкое слоение $\mathcal{M}$ на однородные неустойчивые кривые $\{W_\alpha\}$. Мера μ порождает гладкие угловые меры $\{\nu_\alpha\}$ на $\{W_\alpha\}$ и фактор-меру на индексном множестве. Несложно проверить, что введенное стандартное семейство $\mathcal{G}$ является собственным и $\mu_{\mathcal{G}} = \mu$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.23. Пусть $D \subset \mathcal{M}$ — произвольный диск. Рассмотрим произвольное гладкое слоение D однородными неустойчивыми кривыми $\{W_\alpha\}$. Мера μ порождает угловые меры $\{\nu_\alpha\}$ на них и фактор-меру λ на индексном множестве $\{\alpha\}$. Показать, что для результирующего семейства $\mathcal{G} = \{(W_\alpha, \nu_\alpha)\}$ выполнено неравенство $Z_{\mathcal{G}} < \infty$, и если D не слишком мало, то семейство $\mathcal{G}$ собственное.

7.5. Лемма спаривания

В этом параграфе получим главный инструмент для изучения статистических свойств рассеивающих билиардов.

Пусть (W_1, ν_1) и (W_2, ν_2) — две стандартные пары. Для большого n их образы $\mathcal{F}^n W_1$ и $\mathcal{F}^n W_2$ состоят из множества N -компонент, рассеянных по всему $\mathcal{M}$. Некоторые N -компоненты $W' \subset \mathcal{F}^n W_1$ первого образа могут лежать близко к некоторым N -компонентам $W'' \subset \mathcal{F}^n W_2$ другого образа. Тогда некоторые точки $x' \in W'$ можно объединить устойчивыми многообразиями с точками $x'' \in W''$, так что их будущие итерации будут сближаться экспоненциально быстро. В этом случае можно «связать» меры, которые они несут, и показать, что асимптотическое поведение двух мер $\mathcal{F}^n(\nu_1)$ и $\mathcal{F}^n(\nu_2)$ становится одинаковым.

Доказательство этого утверждения может оказаться серьезной задачей: N -компоненты W' и W'' могут нести разное количество (массу) соответствующих мер. Чтобы разрешить эту проблему, можно, так сказать, связать тяжелую часть с несколькими легкими частями. Это можно сделать, разделяя тяжелую часть на несколько «более тонких» кривых, связав каждую из них с разным партнером.

Чтобы реализовать эту идею, разделим для удобства каждую исходную кривую W_1 и W_2 на несчетное число «волокон». С этой целью для заданной стандартной пары (W, ν) рассмотрим $\widehat{W} := W \times [0, 1]$ и снабдим $\widehat{W}$ вероятностной мерой $\widehat{\nu}$

$$d\widehat{\nu}(x, t) = d\nu(x) dt = \rho(x) dx dt, \quad (7.14)$$

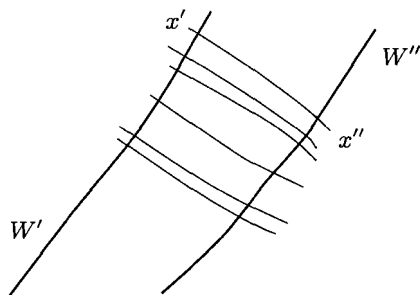
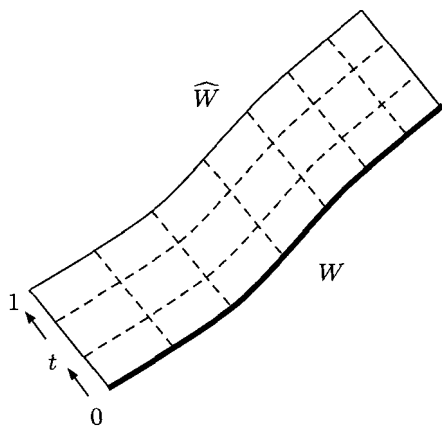


Рис. 7.3. Принцип спаривания

где $\rho(x)$ — плотность ν и $0 \leq t \leq 1$. Назовем $\widehat{W}$ *прямоугольником с базой* W ; см. рис. 7.4. Отображение $\mathcal{F}^n$ вводится на $\widehat{W}$ естественным образом, $\mathcal{F}^n(x, t) = (\mathcal{F}^n x, t)$, и любая функция f , первоначально определенная на W , может быть расширена на $\widehat{W}$ как $f(x, t) = f(x)$.

Далее напомним, что $\mathcal{F}^n(W_1)$ и $\mathcal{F}^n(W_2)$ являются, в общем случае, счетными стандартными семействами. Таким образом, в построении выше можно начать с двух стандартных семейств, а не с двух стандартных пар, и связать образы мер, первоначально определенных на двух семействах.

Рис. 7.4. Прямоугольник $\widehat{W} = W \times [0, 1]$ на «базе» W

В этом случае необходимо разделить *каждую* неустойчивую кривую W в *каждом* оригинальном семействе на несчетное число «волокон», построив прямоугольник над W .

Для заданного стандартного семейства $\mathcal{G} = (W_\alpha, \nu_\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, с фактор-мерой $\lambda_{\mathcal{G}}$ обозначим через $\widehat{\mathcal{G}} = (\widehat{W}_\alpha, \widehat{\nu}_\alpha)$ семейство соответствующих прямоугольников, где $\widehat{W}_\alpha$ — прямоугольник с базой W_α . Снабдим $\widehat{\mathcal{G}}$ такой же фактор-мерой $\lambda_{\mathcal{G}}$ и обозначим через $\widehat{\mu}_{\mathcal{G}}$ порожденную меру на объединении $\cup_\alpha \widehat{W}_\alpha$.

Следующая лемма является ключевым инструментом метода спаривания.

Лемма 7.24 (лемма спаривания). Пусть $\mathcal{G} = (W_\alpha, \nu_\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и $\mathcal{E} = (W_\beta, \nu_\beta)$, $\beta \in \mathfrak{B}$, — два собственных стандартных семейства. Тогда существует биективное отображение (отображение спаривания) $\Theta: \cup_\alpha \widehat{W}_\alpha \rightarrow \cup_\beta \widehat{W}_\beta$, которое сохраняет меру, то есть $\Theta(\widehat{\mu}_{\mathcal{G}}) = \widehat{\mu}_{\mathcal{E}}$, и функция (времени спаривания) $\Upsilon: \cup_\alpha \widehat{W}_\alpha \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что

А. Пусть $(x, t) \in \widehat{W}_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и $\Theta(x, t) = (y, s) \in \widehat{W}_\beta$, $\beta \in \mathfrak{B}$. Обозначим $m = \Upsilon(x, t) \in \mathbb{N}$. Тогда точки $\mathcal{F}^m(x)$ и $\mathcal{F}^m(y)$ лежат на том же самом устойчивом H -многообразии $W_{\mathbb{H}}^s \subset \mathcal{M}$.

В. Существует равномерная экспоненциальная оценка хвоста для функции Υ :

$$\widehat{\mu}_{\mathcal{G}_1}(\Upsilon > n) \leq C_{\Upsilon} \vartheta_{\Upsilon}^n, \quad (7.15)$$

для некоторых постоянных $C_{\Upsilon} = C_{\Upsilon}(\mathcal{D}) > 0$ и $\vartheta_{\Upsilon} = \vartheta_{\Upsilon}(\mathcal{D}) < 1$.

Отложим доказательство леммы спаривания до §§ 7.12–7.15 и вернемся к статистическим свойствам для рассеивающих билиардов. Сначала введем класс соответствующих функций на $\mathcal{M}$ (наблюдаемые величины). Они будут характеризоваться динамически определенной непрерывностью по Гельдеру.

Вспомним время разделения $s_+(x, y)$, введенное в (5.31). По аналогии с ним введем *прошлое* время разделения:

$$s_-(x, y) = \min\{n \geq 0: y \notin \mathcal{Q}_{-n}^{\mathbb{H}}(x)\}, \quad (7.16)$$

где $\mathcal{Q}_{-n}^{\mathbb{H}}(x)$ обозначает открытую связную компоненту множества $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-n}^{\mathbb{H}}$, содержащую точку x (очевидно, эта функция симметрична: $s_-(x, y) = s_-(y, x)$). Заметим, что прообразы $\mathcal{F}^{-n}(x)$ и $\mathcal{F}^{-n}(y)$ разделяются к моменты $n = s_-(x, y)$, так как они лежат в разных связных компонентах «нового» пространства столкновений $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$. Если $y \in \mathcal{Q}_{-n}^{\mathbb{H}}(x)$ для всех $n \geq 0$, то $y \in W_{\mathbb{H}}^u(x)$; в этом случае полагаем $s_-(x, y) = \infty$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.25. Проверить, что если x и y лежат на одной устойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}$, тогда

$$\text{dist}(x, y) \leq C\Lambda^{-s-(x,y)} \quad (7.17)$$

для некоторой постоянной $C = C(\mathcal{D}) > 0$. Указание: доказательство строится аналогично доказательству (5.32).

Определение 7.26. Функция $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *динамически непрерывной по Гельдеру*, если существуют $\vartheta_f \in (0, 1)$ и $K_f > 0$ такие, что для любых x и y , лежащих на одной неустойчивой кривой,

$$|f(x) - f(y)| \leq K_f \vartheta_f^{s_+(x,y)} \quad (7.18)$$

и для любых x и y , лежащих на одной устойчивой кривой,

$$|f(x) - f(y)| \leq K_f \vartheta_f^{s_-(x,y)}. \quad (7.19)$$

Обозначим пространство таких функций через $\mathcal{H}$.

Класс динамически непрерывных по Гельдеру функций больше, чем класс (обычных) непрерывных по Гельдеру функций $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, которые характеризуются соотношением

$$|f(x) - f(y)| \leq C_f [\text{dist}(x, y)]^{\alpha_f} \quad \forall x, y \in \mathcal{M}. \quad (7.20)$$

Здесь $\alpha_f \in (0, 1]$ — показатель Гельдера, а минимальное значение $C_f > 0$, удовлетворяющее (7.20), называется нормой Гельдера функции f .

УПРАЖНЕНИЕ 7.27. Доказать, что любая непрерывная по Гельдеру функция $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ динамически непрерывна по Гельдеру, причем $\vartheta_f = \Lambda^{-\alpha_f}$. Указание: использовать (5.31) и (7.16).

УПРАЖНЕНИЕ 7.28. Доказать, что если существуют $n_1, n_2 \geq 0$ такие, что f является непрерывной по Гельдеру на каждой связной компоненте множества $\mathcal{M} \setminus (S_{n_1}^{\mathbb{H}} \cup S_{-n_2}^{\mathbb{H}})$, то есть (7.20) выполняется с теми же самыми C_f и α_f , когда x и y лежат в одной и той же компоненте множества $\mathcal{M} \setminus (S_{n_1}^{\mathbb{H}} \cup S_{-n_2}^{\mathbb{H}})$, тогда f динамически непрерывна по Гельдеру.

УПРАЖНЕНИЕ 7.29. Проверить, что в билиардах категории $\mathcal{A}$ функция времени разделения $\tau(x)$ непрерывна по Гельдеру на связных компонентах множества $\mathcal{M} \setminus S_1^{\mathbb{H}}$. Чему равен показатель Гельдера? Сделать вывод, что $\tau(x)$ динамически непрерывна по Гельдеру.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.30. Иногда используются функции, удовлетворяющие только одному из условий (7.18) и (7.19). Обозначим пространство функций, удовлетворяющих (7.18), через $\mathcal{H}^+$, а функций, удовлетворяющих (7.19), — через $\mathcal{H}^-$.

7.6. Свойство равномерного распределения

В этом параграфе выведем первое статистическое свойство из леммы спаривания. Оно утверждает, что для любого собственного стандартного семейства $\mathcal{G}$ образы $\mathcal{F}^n(\mu_{\mathcal{G}})$ его меры $\mu_{\mathcal{G}}$ слабо сходятся при $n \rightarrow \infty$ к $\mathcal{F}$ -инвариантной мере μ . Кроме того, в некотором смысле скорость сходимости будет экспоненциальной. Назовем это свойство *равнораспределением*.

Заметим, что собственное семейство $\mathcal{G}$ может быть достаточно «локализованным» в $\mathcal{M}$. Оно может состоять из одной стандартной пары, или ее мера $\mu_{\mathcal{G}}$ может быть определена на некотором диске в $\mathcal{M}$; см. упражнение 7.23. В этом случае свойство равнораспределения эффективно устанавливает асимптотическую независимость между настоящим и будущим системы.

Теорема 7.31 (равнораспределение). Пусть $\mathcal{G}$ — собственное стандартное семейство. Для любой динамически непрерывной по Гельдеру функции $f \in \mathcal{H}$ и $n \geq 0$

$$\left| \int_{\mathcal{M}} f \circ \mathcal{F}^n d\mu_{\mathcal{G}} - \int_{\mathcal{M}} f d\mu \right| \leq B_f \theta_f^n, \quad (7.21)$$

где

$$B_f = 2C_{\Upsilon}(K_f + \|f\|_{\infty})$$

и

$$\theta_f = [\max\{\vartheta_{\Upsilon}, \vartheta_f\}]^{1/2} < 1. \quad (7.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что существует собственное $\mathcal{F}$ -инвариантное семейство $\mathcal{E}$ такое, что $\mu = \mu_{\mathcal{E}}$; см. пример 7.21. Лемма спаривания 7.24 определяет отображение спаривания Θ между семействами $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$ и соответствующую функцию времени спаривания Υ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta &:= \int_{\mathcal{M}} f \circ \mathcal{F}^n d\mu_{\mathcal{G}} - \int_{\mathcal{M}} f \circ \mathcal{F}^n d\mu_{\mathcal{E}} = \\ &= \int_{\widehat{\mathcal{G}}} f(\mathcal{F}^n(x, t)) d\widehat{\mu}_{\mathcal{G}} - \int_{\widehat{\mathcal{E}}} f(\mathcal{F}^n(y, s)) d\widehat{\mu}_{\mathcal{E}} = \\ &= \int_{\widehat{\mathcal{G}}} [f(\mathcal{F}^n(x, t)) - f(\mathcal{F}^n(\Theta(x, t)))] d\widehat{\mu}_{\mathcal{G}}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Заметим, что если $\Theta(x, t) = (y, s)$ и $m := \Upsilon(x, t) \leq n$, тогда $s_-(\mathcal{F}^n x, \mathcal{F}^n y) > n - m$, следовательно,

$$|f(\mathcal{F}^n(x, t) - f(\mathcal{F}^n(\Theta(x, t))))| \leq K_f \vartheta_f^{n-m}. \quad (7.24)$$

Теперь последний интеграл в (7.23) можно представить в виде

$$\int_{\widehat{\mathcal{G}}} [\dots] = \int_{\Upsilon \leq n/2} [\dots] + \int_{\Upsilon > n/2} [\dots] = I + II. \quad (7.25)$$

Из утверждения А леммы 7.24 и (7.24) следует, что $|I| \leq K_f \vartheta_f^{n/2}$, а из утверждения В следует, что $|II| \leq 2\|f\|_{\infty} C_{\Upsilon} \vartheta_{\Upsilon}^{n/2}$. ■

УПРАЖНЕНИЕ 7.32. Оценку (7.21) можно немного улучшить, если уточнить разложение (7.25), используя более мелкие множества $\{\Upsilon = m\}$ для всех $0 \leq m \leq n$ и множество-остаток $\{\Upsilon > n\}$. Проработать детали и получить улучшенную оценку (далее она использоваться не будет).

Теорему 7.31 можно расширить на «множественные» наблюдаемые величины, то есть наблюдения проводятся в разные моменты времени. Пусть $f_0, f_1, \dots, f_k \in \mathcal{H}$ — динамически непрерывные по Гельдеру функции с одинаковыми величинами $\vartheta_f = \vartheta_{f_i}$, $K_f = K_{f_i}$ и $\|f\|_{\infty} = \|f_i\|_{\infty}$, $0 \leq i \leq k$. (Например, можно взять $f_0 = f_1 = \dots = f_k = f$.) Рассмотрим произведение

$$\tilde{f} = f_0 \cdot (f_1 \circ \mathcal{F}) \cdot (f_2 \circ \mathcal{F}^2) \cdot \dots \cdot (f_k \circ \mathcal{F}^k).$$

Теорема 7.33. Пусть $\mathcal{G}$ — собственное стандартное семейство. Тогда для $n \geq 0$

$$\left| \int_{\mathcal{M}} \tilde{f} \circ \mathcal{F}^n d\mu_{\mathcal{G}} - \int_{\mathcal{M}} \tilde{f} d\mu \right| \leq B_{\tilde{f}} \theta_{\tilde{f}}^n, \quad (7.26)$$

где $\theta_{\tilde{f}} < 1$ такое же, как в (7.22), и

$$B_{\tilde{f}} = 2C_{\Upsilon} \|f\|_{\infty}^k (1 - \vartheta_f)^{-1} (K_f + \|f\|_{\infty}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство почти идентично доказательству теоремы 7.31, за исключением того, что (7.24) должно быть заменено на

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(\mathcal{F}^n(x, t)) - \tilde{f}(\mathcal{F}^n(\Theta(x, t)))| &\leq K_f \|f\|_{\infty}^k (\vartheta_f^{n-m} + \dots + \vartheta_f^{n-m+k}) \leq \\ &\leq K_f \|f\|_{\infty}^k (1 - \vartheta_f)^{-1} \vartheta_f^{n-m}. \end{aligned}$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ 7.34. Последовательные моменты времени $0, 1, \dots, k$ использовались для простоты. Утверждение (и доказательство) не изменяется для любой возрастающей последовательности моментов времени $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.35. В теоремах 7.31 и 7.33 предполагалось, что начальное стандартное семейство $\mathcal{G}$ было собственным. Если это не так, то необходимо подождать, пока его образ $\mathcal{F}^m \mathcal{G}$ не станет собственным для некоторого $m \geq 1$, и затем применить эти теоремы, заменив n на $n - m$. Если $Z_{\mathcal{G}} < \infty$, то время ожидания составит $m = \kappa \ln Z_{\mathcal{G}}$ итераций, согласно следствию 7.18. Если $\mathcal{G}$ состоит из одной стандартной пары (W, ν) , время ожидания равно $m = \kappa |\ln |W||$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.36. В теоремах 7.31 и 7.33 достаточно предположить, что $f \in \mathcal{H}^-$ (соответственно $f_0, \dots, f_k \in \mathcal{H}^-$); ср. с замечанием 7.30.

7.7. Экспоненциальное убывание корреляций

В этом параграфе выведем оценку (7.6) для динамически непрерывных по Гельдеру наблюдаемых величин. Наши результаты аналогичны (но немного точнее) результатам из [Yo98, Ch99]. Для краткости будем использовать обозначение $\langle f \rangle = \int_{\mathcal{M}} f d\mu$.

Теорема 7.37 (экспоненциальное убывание корреляций). *Для каждой пары динамически непрерывных по Гельдеру функций $f, g \in \mathcal{H}$ и $n \geq 0$*

$$|\langle f \cdot (g \circ \mathcal{F}^n) \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle| \leq B_{f,g} \theta_{f,g}^n, \quad (7.27)$$

где

$$\theta_{f,g} = [\max\{\vartheta_{\Upsilon}, \vartheta_f, \vartheta_g, e^{-1/\kappa}\}]^{1/4} < 1, \quad (7.28)$$

где $\kappa > 0$ — это постоянная из теоремы 5.53,

$$B_{f,g} = C_0 (K_f \|g\|_{\infty} + K_g \|f\|_{\infty} + \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}), \quad (7.29)$$

и $C_0 = C_0(\mathcal{D}) > 0$ — это постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E} = \{W_{\alpha}, \nu_{\alpha}\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — стандартное семейство, состоящее из всех максимальных неустойчивых H -многообразий и u -SRB мер на них; см. пример 7.21. Напомним, что $\mu_{\mathcal{E}} = \mu$ и $\mathcal{E}$ — собственное семейство (упражнение 7.22). Временной интервал $[0, n]$ можно поделить в отношении 1:3 и записать

$$\langle f \cdot (g \circ \mathcal{F}^n) \rangle = \int (f \circ \mathcal{F}^{-n/4}) (g \circ \mathcal{F}^{3n/4}) d\mu_{\mathcal{E}}$$

(здесь $n/4$ означает целое, ближайшее к $n/4$, и т.д.). Пусть $\bar{f}$ обозначает условное математическое ожидание $f \circ \mathcal{F}^{-n/4}$ на неустойчивых Н-многообразиях W_α относительно и-SRB мер ν_α , то есть

$$\bar{f}(x) = \int_{W_\alpha} f \circ \mathcal{F}^{-n/4} d\nu_\alpha \quad \forall x \in W_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathfrak{A}.$$

Очевидно, функция $f \circ \mathcal{F}^{-n/4}$ почти постоянна на каждом Н-многообразии W_α . Точнее говоря, благодаря динамической непрерывности по Гельдеру функции f

$$\sup_{W_\alpha} f \circ \mathcal{F}^{-n/4} - \inf_{W_\alpha} f \circ \mathcal{F}^{-n/4} \leq K_f \vartheta_f^{n/4}; \quad (7.30)$$

следовательно,

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} |\bar{f}(x) - f \circ \mathcal{F}^{-n/4}(x)| \leq K_f \vartheta_f^{n/4}.$$

Заметим также, что $\langle f \rangle = \langle \bar{f} \rangle$; таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta &= \langle f \cdot (g \circ \mathcal{F}^n) \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle = \\ &= \langle \bar{f} \cdot (g \circ \mathcal{F}^{3n/4}) \rangle - \langle \bar{f} \rangle \langle g \rangle + \delta_1, \end{aligned}$$

где $|\delta_1| \leq K_f \|g\|_\infty \vartheta_f^{n/4}$. Так как функция $\bar{f}$ постоянна почти на каждом Н-многообразии W_α , обозначим ее значение через $\bar{f}_\alpha$ и, используя теорему 7.31 и замечание 7.35, получим

$$\int_{W_\alpha} \bar{f} \cdot (g \circ \mathcal{F}^{3n/4}) d\nu_\alpha = \bar{f}_\alpha \langle g \rangle + \delta_\alpha, \quad (7.31)$$

где

$$|\delta_\alpha| \leq 2 \min \left\{ \|f\|_\infty \|g\|_\infty, \|f\|_\infty C_{\mathcal{F}} (K_g + \|g\|_\infty) \theta_g^{3n/4 - \varkappa |\ln |W_\alpha||} \right\}$$

и $\theta_g = [\max\{\vartheta_{\mathcal{F}}, \vartheta_g\}]^{1/2}$. Интегрируя (7.31) относительно фактор-меры $\lambda_{\mathcal{E}}$ семейства $\mathcal{E}$, получим

$$\langle \bar{f} \cdot (g \circ \mathcal{F}^{3n/4}) \rangle = \langle \bar{f} \rangle \langle g \rangle + \int_{\mathfrak{A}} \delta_\alpha d\lambda_{\mathcal{E}}(\alpha).$$

Остается оценить последний член. Так как $\mathcal{E}$ — собственное семейство,

$$\mu\left(\cup W_\alpha: |W_\alpha| < e^{-\frac{n}{4\kappa}}\right) \leq C_p e^{-\frac{n}{4\kappa}}.$$

Для H -многообразия W_α , удовлетворяющего $|W_\alpha| \geq e^{-\frac{n}{4\kappa}}$, получим $3n/4 - \kappa |\ln |W_\alpha|| \geq n/2$. Следовательно,

$$\left| \int \delta_\alpha d\lambda_{\mathcal{E}}(\alpha) \right| \leq 2C_p \|f\|_\infty \|g\|_\infty e^{-\frac{n}{4\kappa}} + 2\|f\|_\infty C_T (K_g + \|g\|_\infty) \theta_g^{n/2}.$$

Теорема 7.37 доказана. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 7.38. Достаточно предположить, что $f \in \mathcal{H}^+$ и $g \in \mathcal{H}^-$; ср. с замечаниями 7.30 и 7.36.

Выведем важное следствие из данного замечания. Предположим, что f постоянна почти на каждом неустойчивом H -многообразии $W_\mathbb{H}^u$, а g — постоянна почти на каждом устойчивом H -многообразии $W_\mathbb{H}^s$. Кроме того, можно переопределить неустойчивые и устойчивые конусы так, что они вырождаются в линии, касательные к неустойчивым и устойчивым многообразиям соответственно⁴. В этом случае можно положить $K_f = K_g = 0$ и $\theta_f = \theta_g = 0$, и, следовательно,

$$|\langle f \cdot (g \circ \mathcal{F}^n) \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle| \leq C_0 \|f\|_\infty \|g\|_\infty \theta_0^n \quad (7.32)$$

для всех $n \geq 0$, где $\theta_0 = [\max\{\vartheta_T, e^{-1/\kappa}\}]^{1/4} < 1$.

Следствие 7.39. Пусть $A, B \subset \mathcal{M}$ — два измеримых множества таких, что $A = \cup W_\mathbb{H}^u$ — объединение нескольких неустойчивых H -многообразий и $B = \cup W_\mathbb{H}^s$ — это объединение нескольких устойчивых H -многообразий (здесь имеются в виду максимальные H -многообразия; ср. с §§ 4.11 и 5.4). Тогда

$$|\mu(A \cap \mathcal{F}^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B)| \leq C_0 \theta_0^n. \quad (7.33)$$

⁴Как обычно при изучении гиперболических отображений, построение инвариантных конусов — процедура достаточно свободная. Например, для заданного семейства неустойчивых конусов C_x^u можно заменить его более узкими конусами $C_x^{u,n} := D\mathcal{F}^n(C_{\mathcal{F}^{-n}x}^u)$. Очевидно, это уменьшает класс неустойчивых кривых. В конечном итоге можно положить $n = \infty$; тогда конусы становятся линиями, касательными к неустойчивым многообразиям, а неустойчивые кривые сводятся к неустойчивым многообразиям.

УПРАЖНЕНИЕ 7.40. Проверить, что (7.32) следует из (7.27)–(7.29), а (7.33) следует из (7.32). Указание: использовать характеристические функции (индикаторы) множеств A и B .

Теорема 7.37 может быть расширена на так называемые «множественные» корреляции, то есть корреляции между наблюдаемыми величинами, определенные в множественные моменты времени. Пусть $f_0, f_1, \dots, f_r \in \mathcal{H}$ и $g_0, g_1, \dots, g_k \in \mathcal{H}$ — два множества динамически непрерывных по Гельдеру функций. Предположим, что функции f первого множества имеют одинаковые параметры $\vartheta_f = \vartheta_{f_i}$, $K_f = K_{f_i}$ и $\|f\|_\infty = \|f_i\|_\infty$ для всех $0 \leq i \leq r$. Аналогично, пусть функции g имеют одинаковые параметры $\vartheta_g = \vartheta_{g_i}$, $K_g = K_{g_i}$ и $\|g\|_\infty = \|g_i\|_\infty$ для всех $0 \leq i \leq k$. Рассмотрим два произведения

$$\tilde{f} = f_0 \cdot (f_1 \circ \mathcal{F}^{-1}) \cdot (f_2 \circ \mathcal{F}^{-2}) \dots (f_r \circ \mathcal{F}^{-r})$$

и

$$\tilde{g} = g_0 \cdot (g_1 \circ \mathcal{F}) \cdot (g_2 \circ \mathcal{F}^2) \dots (g_k \circ \mathcal{F}^k).$$



Рис. 7.5. Множественные корреляции

Теорема 7.41 (экспоненциальное убывание множественных корреляций). Для всех $n > 0$

$$|\langle \tilde{f} \cdot (\tilde{g} \circ \mathcal{F}^n) \rangle - \langle \tilde{f} \rangle \langle \tilde{g} \rangle| \leq B_{\tilde{f}, \tilde{g}} \theta_{f,g}^{[n]}, \quad (7.34)$$

где $\theta_{f,g}$ определено в (7.28) и

$$B_{\tilde{f}, \tilde{g}} = C_0 \|f\|_\infty^r \|g\|_\infty^k \left[\frac{K_f \|g\|_\infty}{1 - \vartheta_f} + \frac{K_g \|f\|_\infty}{1 - \vartheta_g} + \|f\|_\infty \|g\|_\infty \right], \quad (7.35)$$

а $C_0 = C_0(\mathcal{D}) > 0$ — постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство почти совпадает с доказательством теоремы 7.37 с несколькими изменениями. Во-первых, заметим очевидные оценки:

$$\|\tilde{f}\|_\infty \leq \|f\|_\infty^{r+1}, \quad \|\tilde{g}\|_\infty \leq \|g\|_\infty^{k+1}.$$

Во-вторых, (7.30) заменяется на

$$\begin{aligned} \sup_{W_\alpha} \tilde{f} \circ \mathcal{F}^{-n/4} - \inf_{W_\alpha} \tilde{f} \circ \mathcal{F}^{-n/4} &\leq K_f \|f\|_\infty^r (\vartheta_f^{n/4} + \dots + \vartheta_f^{n/4+r}) \leq \\ &\leq K_f \|f\|_\infty^r (1 - \vartheta_f)^{-1} \vartheta_f^{n/4}. \end{aligned}$$

Наконец, вместо теоремы 7.31 необходимо использовать теорему 7.33. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 7.42. Здесь для простоты использовались последовательные моменты времени $-r, \dots, -1, 0$ и $n, n+1, \dots, n+k$. Утверждение (и доказательство) будет таким же для любых двух возрастающих последовательностей моментов времени $t_{-r} < \dots < t_{-1} < 0$ и $n < t_1 < \dots < t_k$, отделенных друг от друга «временной щелью» длины n .

7.8. Центральная предельная теорема

В этом параграфе докажем, что последовательность $\mathcal{X}_n = f \circ F^n$, введенная в (7.1), удовлетворяет ЦПТ (7.8), а также формуле (7.9) для каждой динамически непрерывной по Гельдеру наблюдаемой функции $f \in \mathcal{H}$. Приведенные доказательства в этом и следующем параграфах требуют достаточно глубокого знания теории вероятности, но читателю нет необходимости волноваться об этом; здесь и в приложении В приводятся полные утверждения и/или ссылки на общеизвестные учебники.

Сначала сделаем методологическое замечание. В теории хаотических динамических систем ЦПТ обычно формулируется после получения хороших оценок для корреляционных функций, и доказательство ЦПТ в большой степени опирается на оценки корреляций. Может возникнуть вопрос о том, следует ли формально в общем случае из быстрого убывания корреляций ЦПТ. Стандартные доказательства ЦПТ не отвечают на этот вопрос, поскольку все они используют некоторые другие (более строгие) свойства перемешивания динамики, помимо явных оценок на корреляции.

Полагаем, что быстрое убывание только двукратной корреляционной функции $S_f(n)$ не было бы достаточно для ЦПТ, но хорошие оценки на множественные корреляции могут помочь. Здесь будет представлено доказательство ЦПТ, которое полагается целиком на экспоненциальное убывание множественных корреляций (теорема 7.41). Таким образом, будет продемонстрировано, что ЦПТ действительно является формальным следствием быстрого убывания множественных корреляций.

Теорема 7.43. Пусть $f \in \mathcal{H}$ — динамически непрерывная по Гельдеру наблюдаемая величина. Тогда выполняется ЦПТ (7.8), и формула (7.9) для σ_f^2 , и утверждение замечания 7.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наше доказательство следует доказательствам [BSC91, раздел 6] и [Ch95, раздел 3]. Это доказательство использует некоторые стандартные факты теории вероятности; читателю, незнакомому с вероятностями, стоит ознакомиться с приложением В и [BSC91, Ch95].

Во-первых, можно предположить, что $\langle f \rangle = 0$ (иначе заменим f на $f - \langle f \rangle$). Тогда получим $C_f(n) = \langle f \cdot (f \circ \mathcal{F}^n) \rangle$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.44. Проверить следующую формулу:

$$\text{Var } S_n = \langle S_n^2 \rangle = n C_f(0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) C_f(i). \quad (7.36)$$

Указание: вспомните упражнение 7.2.

Так как $C_f(n)$ сходится к нулю экспоненциально быстро, то

$$\text{Var } S_n = n\sigma_f^2 + O(1), \quad (7.37)$$

где σ_f^2 определяется формулой (7.9).

УПРАЖНЕНИЕ 7.45. Доказать, что существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Var } S_n - n\sigma_f^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} n C_f(n) < \infty. \quad (7.38)$$

Возможны два случая. Во-первых, может оказаться, что $\sigma_f^2 = 0$. Тогда из (7.38) следует, что последовательность $\{\text{Var } S_n\}$ ограничена и имеет конечный предел. Тогда можно воспользоваться общим результатом Леонаова [Леоб1] (см. также [IL71, теорема 18.2.2]), согласно которому существует другая функция, $g \in L_\mu^2(\mathcal{M})$, такая, что $f(x) = g(\mathcal{F}x) - g(x)$ почти всюду. Это доказывает утверждение в замечании 7.5.

Далее будем предполагать, что $\sigma_f^2 > 0$. Тогда, используя (7.38), получим, что главное выражение (7.8) эквивалентно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ \frac{S_n}{\sqrt{\text{Var } S_n}} \leq z \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-s^2/2} ds; \quad (7.39)$$

то есть $S_n/\sqrt{\text{Var } S_n}$ сходится к стандартному нормальному распределению $\mathcal{N}(0, 1)$. В некоторых учебниках по теории вероятности именно (7.39), а не (7.8), называется центральной предельной теоремой.

Доказательство (7.39) основано на методике Бернштейна аппроксимации слабо зависимых случайных переменных суммами *независимых* переменных. Этот метод также известен как «метод больших и малых блоков».

Разделим временной интервал $[0, n]$ на последовательность чередующихся больших интервалов (блоков) длины $p = [n^a]$ и малых блоков длины $q = [n^b]$ для некоторых $0 < b < a < 1$ (позже введем предположение $a < 1/2$). Число больших блоков равно $k = [n/(p+q)] \sim n^{1-a}$. Последний оставшийся блок имеет длину $l = n - kp - (k-1)q < p+q$. Заметим, что длины как больших, так и малых блоков растут при $n \rightarrow \infty$.

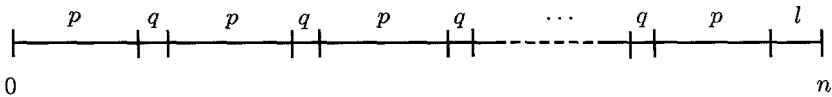


Рис. 7.6. Чередование больших и малых блоков

Обозначим через Δ_r , $1 \leq r \leq k$, большие блоки и множества

$$S_p^{(r)}(x) = \sum_{i \in \Delta_r} f(\mathcal{F}^i x), \quad S'_n = \sum_{r=1}^k S_p^{(r)}$$

и $S''_n = S_n - S'_n = \sum_{i \in [0, n-1] \setminus \cup \Delta_r} f(\mathcal{F}^i x)$. Вторая сумма S''_n содержит не более чем $n'' = kq + p \leq 2n^h$ членов, где $h = \max\{a, 1-a+b\} < 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.46. Проверить, что

$$\text{Var } S''_n \leq n'' \left(|C_f(0)| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_f(n)| \right) \leq \text{const} \cdot n^h.$$

Указание: использовать упражнение 7.44.

Используя неравенство Чебышева, получим

$$\mu \left\{ x: \frac{|S''_n|}{\sigma_f \sqrt{n}} > \varepsilon \right\} \leq \frac{\text{Var } S''_n}{\varepsilon^2 \sigma_f^2 n} \leq \text{const } n^{h-1} \rightarrow 0 \quad (7.40)$$

при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $S''_n / \sqrt{\text{Var } S_n}$ сходится к нулю по вероятности. Следующий факт является стандартным в теории вероятности (см., например, [IL71, лемма 18.4.1]), читателю предлагается проверить этот факт непосредственно.

Лемма 7.47. Если последовательность случайных переменных $\mathcal{X}_n$ сходится к $\mathcal{X}$ по распределению и η_n сходится к нулю по вероятности, тогда $\mathcal{X}_n + \eta_n$ сходится к $\mathcal{X}$ по распределению.

Таким образом, можно заменить S_n на $S'_n = \sum S_p^{(r)}$ в (7.39).

УПРАЖНЕНИЕ 7.48. Проверить, что наблюдаемые величины $S_p^{(1)}, \dots, S_p^{(k)}$ имеют одинаковые распределения. В частности, $\text{Var } S_p^{(r)} = \text{Var } S_p$ для всех $r = 1, \dots, k$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.49. Проверить, что

$$\begin{aligned} |\text{Var } S_n - k \text{Var } S_p| &\leq \\ &\leq n'' |\mathbf{C}_f(0)| + 2 \sum_{i=1}^{p-1} (n'' + ik) |\mathbf{C}_f(i)| + 2 \sum_{i=p}^{n-1} (n-i) |\mathbf{C}_f(i)|. \end{aligned}$$

Указание: использовать упражнения 7.44 и 7.46.

В результате $|\text{Var } S_n - k \text{Var } S_p| = o(n) = o(\text{Var } S_n)$, так что можно заменить $\text{Var } S_n$ в (7.39) на $k \text{Var } S_p$. Таким образом, соотношение (7.39) преобразуется в

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ \frac{S'_n}{\sqrt{k \text{Var } S_p}} \leq z \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{s^2}{2}} ds. \quad (7.41)$$

Обозначим

$$U_n = \frac{S'_n}{\sqrt{k \text{Var } S_p}} = \frac{S_p^{(1)} + \dots + S_p^{(k)}}{\sqrt{k \text{Var } S_p}} = u_1 + \dots + u_k, \quad (7.42)$$

где $u_r = S_p^{(r)} / \sqrt{k \text{Var } S_p}$. Заметим, что U_n — это сумма одинаково распределенных, но не обязательно независимых случайных переменных $u_1, \dots, u_k$.

Теперь большие блоки $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ отделяются малыми блоками, длины которых $q \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Основываясь на этом, покажем, что $S_p^{(1)}, \dots, S_p^{(k)}$ (и, таким образом, $u_1, \dots, u_k$) становятся почти независимыми.

Лемма 7.50. U_n имеют такое же предельное распределение, как и сумма

$$V_n = v_1 + \dots + v_k \quad (7.43)$$

k независимых случайных переменных $v_1, \dots, v_k$, каждая из которых имеет такое же распределение, как и u_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема непрерывности Леви (см. приложение В) утверждает, что последовательность случайных переменных $\{W_n\}$ сходится по распределению к случайной переменной W тогда и только тогда, когда их характеристические функции $\varphi_{W_n}(t) = \langle \exp(itW_n) \rangle$ сходятся поточечно к характеристической функции W , то есть к $\varphi_W(t) = \langle \exp(itW) \rangle$; здесь $i = \sqrt{-1}$. Следовательно, достаточно показать, что $\varphi_{U_n}(t) \rightarrow \varphi_{V_n}(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Обозначим $w_r = \exp(itu_r)$ для $1 \leq r \leq k$; тогда

$$\varphi_{U_n}(t) = \langle w_1 \dots w_k \rangle.$$

Из независимости $v_1, \dots, v_k$ следует, что

$$\langle e^{itv_1} \dots e^{itv_k} \rangle = \langle e^{itv_1} \rangle \dots \langle e^{itv_k} \rangle = \langle e^{itv_1} \rangle^k;$$

тогда

$$\varphi_{V_n}(t) = \langle w_1 \rangle^k = \langle w_1 \rangle \dots \langle w_k \rangle.$$

Далее обозначим $g(x) = \exp(itf(x)/\sqrt{k \operatorname{Var} S_p})$. Тогда

$$w_r = (g \circ \mathcal{F}^{(p+q)(r-1)}) \cdot (g \circ \mathcal{F}^{(p+q)(r-1)+1}) \dots (g \circ \mathcal{F}^{(p+q)(r-1)+p-1}).$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.51. Показать, что если $f \in \mathcal{H}$, то $g \in \mathcal{H}$. Кроме того, проверить, что $\vartheta_g = \vartheta_f$, $K_g = K_f t / \sqrt{k \operatorname{Var} S_p}$, и $\|g\|_\infty \leq 1$.

Согласно теореме 7.41, для каждого $r = 1, \dots, k-1$ имеем

$$|\langle w_r w_{r+1} \dots w_k \rangle - \langle w_r \rangle \langle w_{r+1} \dots w_k \rangle| \leq B\theta^q, \quad (7.44)$$

где

$$\theta = \max\{\vartheta_T, \vartheta_f, e^{-1/\kappa}\} < 1$$

и

$$B = C_0 \left[\frac{2K_f |t|}{(1 - \vartheta_f) \sqrt{k \operatorname{Var} S_p}} + 1 \right].$$

Комбинируя (7.44) для всех $r = 1, \dots, k-1$, получим

$$|\langle w_1 \dots w_k \rangle - \langle w_1 \rangle \dots \langle w_k \rangle| \leq Bk\theta^q.$$

Отсюда следует лемма 7.50. ■

Остается показать, что V_n сходится при $n \rightarrow \infty$ к стандартному нормальному закону по распределению. Будем использовать следующий факт из теории вероятности (см., например, доказательство теоремы 18.4.1 в [IL71]):

Предложение 7.52. *Предположим, что для каждого $n \geq 1$ случайная переменная V_n есть сумма $k = k_n$ независимых одинаково распределенных случайных переменных $v_1, \dots, v_k$, нормированных так, что $E(V_n) = 0$ и $\text{Var } V_n = 1$. Кроме того, предположим, что $k_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда V_n сходится к стандартному нормальному распределению тогда и только тогда, когда выполняется следующий аналог условия Линдберга⁵ для каждого $\varepsilon > 0$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k \langle v_1^2 \cdot \mathbf{1}_{\{|v_1| > \varepsilon\}} \rangle = 0. \quad (7.45)$$

Благодаря предыдущим построениям нам остается проверить условие Линдберга (7.45). Заметим, что

$$|v_1| \leq \frac{\sup_{x \in \mathcal{M}} |S_p|}{\sqrt{k} \text{Var } S_p} \leq \frac{\text{const } p}{\sqrt{n}}.$$

Выбор $a < 1/2$ гарантирует, что $p/\sqrt{n} \rightarrow 0$, так что множество $\{x: |v_1| > \varepsilon\}$ будет пустым (!) для всех достаточно больших n . Это доказывает (7.45), и мы получаем ЦПТ. ■

Завершим этот параграф векторной ЦПТ. Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_r)^T$ — вектор-функция на $\mathcal{M}$, компоненты которой f_i динамически непрерывны по Гельдеру. Рассмотрим сумму

$$\mathbf{S}_n = \{S_{1,n}, \dots, S_{r,n}\} = \mathbf{f} + \mathbf{f} \circ \mathcal{F} + \dots + \mathbf{f} \circ \mathcal{F}^{n-1}$$

и матрицу $\mathbf{V} = \{v_{ij}\}$ размера $r \times r$ с компонентами

$$v_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Cov}(S_{i,n}, S_{j,n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{C}_{f_i f_j}(n). \quad (7.46)$$

Заметим, что $v_{ii} = \sigma_{f_i}^2$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.53. Доказать второе тождество в (7.46). Проверить, что матрица $\mathbf{V}$ является симметричной и положительно полуопределенной.

⁵Здесь $\mathbf{1}_B$ обозначает характеристическую функцию (индикатор) события B .

Теорема 7.54 (векторная ЦПТ). Если матрица $\mathbf{V}$ не вырождена, то есть $\det \mathbf{V} \neq 0$, вектор $(\mathbf{S}_n - n\langle \mathbf{f} \rangle)/\sqrt{n}$ сходится по распределению к r -мерному нормальному закону с нулевым средним и матрицей ковариации $\mathbf{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следующая лемма дает полезный критерий вырожденности матрицы $\mathbf{V}$.

Лемма 7.55. Матрица $\mathbf{V}$ вырождена, то есть $\det \mathbf{V} = 0$, тогда и только тогда, когда существует линейная комбинация $h = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$ с некоторым ненулевым вектором $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)^T \neq 0$, которая гомологична постоянной; то есть $h = K + g - g \circ \mathcal{F}$ почти всюду для некоторых $K \in \mathbb{R}$ и $g \in L^2_\mu(\mathcal{M})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала лемму. Заметим, что $\det \mathbf{V} = 0$ эквивалентно $\sigma_h^2 = 0$ для некоторого $\mathbf{a} \neq 0$. Из замечания 7.5 следует утверждение леммы. ■

Теорему 7.54 можно доказать двумя способами. Во-первых, можно просто повторить доказательство теоремы 7.43 с очевидными изменениями. Кроме того, можно свести теорему 7.54 к теореме 7.43, используя следующий трюк. Сначала можно предположить, что $\langle \mathbf{f} \rangle = 0$ (иначе заменим $\mathbf{f}$ на $\mathbf{f} - \langle \mathbf{f} \rangle$). Тогда для любой линейной комбинации $h = \mathbf{a}^T \mathbf{f} = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$ имеем $\sigma_h \neq 0$ (благодаря лемме 7.55), и, таким образом, по теореме 7.43 функция

$$R_n := \mathbf{a}^T \mathbf{S}_n / \sqrt{n} = (h + \dots + h \circ \mathcal{F}^{n-1}) / \sqrt{n}$$

сходится по распределению к нормальному закону с нулевым средним и дисперсией σ_h^2 . По теореме непрерывности Леви (см. приложение В) ее характеристическая функция $\varphi_{R_n}(t)$ сходится поточечно при $n \rightarrow \infty$ к

$$\exp(-\sigma_h^2 t^2 / 2) = \exp(-\mathbf{a}^T \mathbf{V} \mathbf{a} t^2 / 2)$$

для любого $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$\varphi_{R_n}(t) = \langle \exp(it \mathbf{a}^T \mathbf{S}_n / \sqrt{n}) \rangle = \varphi_{\mathbf{S}_n / \sqrt{n}}(a_1 t, \dots, a_r t),$$

где

$$\varphi_{\mathbf{S}_n / \sqrt{n}}(t_1, \dots, t_r) = \langle \exp(it^T \mathbf{S}_n / \sqrt{n}) \rangle$$

обозначает характеристическую функцию векторной переменной $\mathbf{S}_n / \sqrt{n}$ и $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_r)^T$ ее векторный аргумент. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\mathbf{S}_n / \sqrt{n}}(t_1, \dots, t_r) = \exp(-\mathbf{t}^T \mathbf{V} \mathbf{t} / 2),$$

что в точности совпадает с характеристической функцией нормального распределения с нулевым средним и матрицей ковариации V , так что теорема 7.54 вновь следует из теоремы непрерывности Леви. ■

7.9. Другие предельные теоремы

Центральная предельная теорема (ЦПТ) — это лишь первый шаг в исследовании статистических свойств последовательности $\mathcal{X}_n = f \circ F^n$, введенной в (7.1) и появляющейся из хаотического отображения $F: M \rightarrow M$ и соответствующей наблюдаемой величины $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Следующим шагом после ЦПТ будет принцип инвариантности. Воспользуемся обозначениями § 7.2. При $N \geq 1$ и $x \in M$ рассмотрим непрерывную функцию $W_N(s; x)$ переменной $s \in [0, 1]$, которая в рациональных точках $s = n/N$ имеет вид

$$W_N\left(\frac{n}{N}; x\right) = \frac{S_n(x) - n\langle f \rangle}{\sigma_f \sqrt{N}},$$

а между точками продолжается с помощью линейной интерполяции (график $W_N(s; x)$ в этом случае ломаная линия). Инвариантная мера μ и семейство $\{W_N(s; x), x \in M\}$ порождают вероятностную меру на пространстве непрерывных функций на $[0, 1]$.

Определение 7.56. Говорят, что последовательность (7.1) удовлетворяет *слабому принципу инвариантности* (СПИ), если мера слабо сходится к мере Винера при $N \rightarrow \infty$. Говорят, что (7.1) удовлетворяет *почти на верное принципу инвариантности* (ПНПИ), если существует стандартный винеровский процесс (броуновское движение) $B(s; x)$ на M относительно меры μ такой, что для некоторого $\lambda > 0$

$$|W_N(s; x) - B(s; x)| = \mathcal{O}(N^{-\lambda})$$

почти для всех (по мере μ) точек $x \in M$.

Принцип инвариантности утверждает, что функция сгущения S_n , после надлежащего масштабирования пространства и времени, сходится к винеровскому процессу (классическое Броуновское движение). Чтобы доказать принцип инвариантности, будем использовать общую теорему, выведенную Филиппом и Стаутом [PhS75], которую представим здесь в форме, адаптированной к нашим нуждам.

Пусть ξ_0 — конечно четное разбиение $\mathcal{M}$. Обозначим

$$\xi_n = \mathcal{F}^n(\xi_0), \quad \xi_m^n = \xi_m \vee \dots \vee \xi_n$$

для всех $m < n$ (допускаются значения $m = -\infty$ и $n = \infty$). Каждое разбиение ξ_m^n соответствует σ -алгебре $\mathfrak{F}_m^n$, состоящей из измеримых ξ_m^n -множеств (mod 0); см. приложение А. Предположим, что $\xi_{-\infty}^\infty = \varepsilon$ — разбиение на отдельные точки; то есть $\mathfrak{F}_{-\infty}^\infty$ совпадает с σ -алгеброй всех измеримых множеств в $\mathcal{M}$.

Пусть $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция. Для $m \geq 1$ обозначим через $\bar{f}_m = \mathbb{E}(f | \xi_{-m}^m)$ условное математическое ожидание f относительно разбиения ξ_{-m}^m ; то есть

$$\bar{f}_m(x) = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f d\mu \quad \forall x \in B \quad \forall B \in \xi_{-m}^m.$$

Следующая теорема доказана в [PhS75]; см. теорему 7.1 и замечание на с. 81 в этой книге.

Теорема 7.57 ([PhS75]). *Предположим, что существуют постоянные $0 < \delta < 2$ и $C > 0$ такие, что*

$$\langle |f(x)|^{2+\delta} \rangle < \infty, \quad (7.47)$$

и для всех $m \geq 1$

$$\langle |f(x) - \bar{f}_m|^{2+\delta} \rangle \leq C m^{-(2+7/\delta)}. \quad (7.48)$$

Кроме того, предположим, что $\sigma_f^2 > 0$ и

$$\text{Var } S_n = n\sigma_f^2 + \mathcal{O}(n^{1-\delta/30}) \quad (7.49)$$

при $n \rightarrow \infty$. Наконец, предположим, что для всех $n \geq 1$

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leq C n^{-168(1+2/\delta)} \quad (7.50)$$

для всех $A \in \mathfrak{F}_{-\infty}^0$ и $B \in \mathfrak{F}_n^\infty$. Тогда последовательность $\mathcal{X}_n = f \circ \mathcal{F}^n$ удовлетворяет ПНПИ и СПИ.

В действительности из ПНПИ следует СПИ, как и многие другие предельные теоремы. Упомянем лишь несколько следствий ПНПИ, а более подробную информацию читатель может найти в [PhS75, Section 1].

Следствие 7.58 (интегральные тесты). Пусть $\phi(t)$ — положительная неубывающая вещественнозначная функция. Тогда

$$\mu\left(\frac{S_n - n\langle f \rangle}{\sqrt{n}} > \phi(n) \text{ бесконечно часто}\right) = 0 \text{ или } 1$$

в зависимости от того, сходится или расходится интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\phi(t)}{t} e^{-\phi^2(t)/2} dt.$$

Кроме того, полагаем $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} |S_i - i\langle f \rangle|$. Тогда

$$\mu(M_n/\sqrt{n} < \phi^{-1}(n) \text{ бесконечно часто}) = 0 \text{ или } 1$$

в зависимости от того, сходится или расходится интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\phi^2(t)}{t} e^{-8\pi^{-2}\phi^2(t)} dt.$$

Следствие 7.59 (закон повторного логарифма). Почти для каждой точки (по мере μ) $x \in M$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - n\langle f \rangle}{\sqrt{2n\sigma_f^2 \log \log n}} = 1.$$

Остается доказать следующую лемму.

Лемма 7.60. *Отображение столкновения $\mathcal{F}: M \rightarrow M$ для рассеивающих бильярдных категории A и динамически непрерывных по Гельдеру наблюдаемых величин $f \in \mathcal{H}$ с $\sigma_f^2 > 0$ удовлетворяет всем условиям теоремы 7.57.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что (7.47) выполняется для любого $\delta \in (0, 2)$, так как $\|f\|_{\infty} < \infty$, и (7.49) следует из (7.37). Чтобы доказать (7.48) и (7.50), необходимо построить разбиение ξ_0 .

Пусть ξ_0 — разбиение M на связные компоненты множества $M \setminus S^{\mathbb{H}}$. То есть элементы ξ_0 — это области, на которых отображение $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}: M_{\mathbb{H}} \rightarrow M_{\mathbb{H}}$ гладкое. Напомним, что каждый элемент ξ_0 — это криволинейный многоугольник, ограниченный устойчивыми кривыми, и внутренние углы этих многоугольников не превышают π (см. упражнения 4.49 и 5.16).

Тогда $\xi_1 = \mathcal{F}(\xi_0)$ — это разбиение $\mathcal{M}$ на связные компоненты множества $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-1}^{\mathbb{H}}$, так что его элементы — это подобные криволинейные многоугольники, ограниченные неустойчивыми кривыми. Несложно увидеть, что для любых $A \in \xi_0$ и $B \in \xi_1$ пересечение $A \cap B$ есть криволинейный многоугольник; то есть элементы $\xi_0^1 = \xi_0 \vee \xi_1$ — это связные компоненты множества $\mathcal{M} \setminus (\mathcal{S}^{\mathbb{H}} \cup \mathcal{S}_{-1}^{\mathbb{H}})$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.61. Проверить, что для любых $p, q > 0$ элементы разбиения ξ_{-p}^q являются связными компонентами множества $\mathcal{M} \setminus (\mathcal{S}_{p+1}^{\mathbb{H}} \cup \mathcal{S}_{-q}^{\mathbb{H}})$. Указание: заметим, что $\mathcal{F}^{-q}(\xi_{-p}^q) = \xi_{-p-q}^0$; затем использовать индукцию по $p+q$.

Следовательно, элементы разбиения ξ_{-m}^m — это связные компоненты множества $\mathcal{M} \setminus (\mathcal{S}_{m+1}^{\mathbb{H}} \cup \mathcal{S}_{-m}^{\mathbb{H}})$. Кроме того, они являются криволинейными многоугольниками, ограниченными устойчивыми и неустойчивыми кривыми, внутренние углы которых не превышают π .

УПРАЖНЕНИЕ 7.62. Пусть $A \in \xi_{-m}^m$. Показать, что для любых двух точек $x, y \in A$ существует точка $z \in A$ такая, что x и z принадлежат одной неустойчивой кривой и y и z принадлежат одной устойчивой кривой. Указание: показать, что любые две точки в одном и том же элементе разбиения ξ_{-m}^0 лежат на одной устойчивой кривой.

Теперь, используя обозначения из упражнений, получим $s_+(x, z) > m$ и $s_-(y, z) > m$; таким образом, $|f(x) - f(y)| \leq 2K_f \vartheta_f^m$. Отсюда следует, что

$$\langle |f(x) - \bar{f}_m|^{2+\delta} \rangle \leq \text{const } \vartheta_f^{(2+\delta)m}.$$

Итак, получим (7.48).

Докажем, наконец, главную гипотезу (7.50). Заметим, что ξ_1^∞ совпадает с разбиением $\xi_{\mathbb{H}}^u$ множества $\mathcal{M}$ на (максимальные) неустойчивые Н-многообразия, введенные в § 5.4. Аналогично, $\xi_{-\infty}^0$ совпадает с разбиением $\xi_{\mathbb{H}}^s$ множества $\mathcal{M}$ на (максимальные) устойчивые Н-многообразия. Следовательно, любое множество $A \in \mathfrak{F}_{-\infty}^0$ — это объединение нескольких устойчивых Н-многообразий. Аналогично, для любого множества $B \in \mathfrak{F}_n^\infty$ его прообраз $\mathcal{F}^{-n+1}(B) \in \mathfrak{F}_1^\infty$ будет объединением нескольких неустойчивых Н-многообразий. Тогда из следствия 7.39 несложно понять, что

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leq C_0 \theta_0^{n-1}.$$

Это доказывает (7.50). ■

7.10. Статистика столкновений и диффузия

В этом параграфе выведем несколько фактов из ЦПТ, которые имеют явную физическую интерпретацию. Как и ранее, ограничим анализ рассеивающими билиярдами категории А, но здесь это ограничение объясняется не только удобством: результаты этого параграфа не распространяются на другие категории рассеивающих билиардов.

Напомним, функция возвращения $\tau(x)$ динамически непрерывна по Гельдеру; см. упражнение 7.29. Следовательно, она удовлетворяет ЦПТ; то есть существует $\sigma_f^2 \geq 0$ такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ \frac{t_n - n\langle \tau \rangle}{\sqrt{n}} \leq z \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_f} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{s^2}{2\sigma_f^2}} ds \quad (7.51)$$

для всех $-\infty < z < \infty$. Здесь

$$t_n = \tau(x) + \dots + \tau(\mathcal{F}^{n-1}x)$$

— это время n -го столкновения.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.63. На самом деле $\sigma_\tau^2 > 0$. Действительно, если $\sigma_\tau^2 = 0$, то $\tau = K + g - g \circ \mathcal{F}$, как следует из замечания 7.5. Хорошо известно, что если функция потолка специального потока Φ^t гомологична постоянной, то Φ^t изоморфна специальному потоку под действием постоянной функции потолка; см. [Gur65]. Такой поток не может быть перемешивающим (ср. с упражнением 6.29), но билиардный поток Φ^t является перемешивающим; см. § 6.11. Это доказывает, что $\sigma_\tau^2 > 0$.

Рассмотрим траекторию $\Phi^t(x)$ точки $x \in \mathcal{M}$ на временном интервале $(0, T)$ и обозначим через $n_x(T)$ число столкновений, которые с ней происходят. Напомним, что почти для всех $x \in \mathcal{M}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T/n_x(T) = \bar{\tau} = \langle \tau \rangle \quad (7.52)$$

(см. упражнения 2.37 и 2.38) и $\bar{\tau}$ определяется соотношением (2.32).

Теорема 7.64. *Имеем*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu \left\{ \frac{n_x(T) - T/\bar{\tau}}{\sqrt{T}} \leq z \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} ds \quad (7.53)$$

для всех $-\infty < z < \infty$. Здесь $\sigma^2 = \sigma_f^2/\bar{\tau}^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для всех $Z > 0$

$$\mu(n_x \leq Z) = \mu(t_{[Z]+1} > T),$$

где $[Z]$ обозначает интегральную часть Z . Теперь (7.53) легко следует из (7.51) и (7.52); оставим проверку читателю в качестве упражнения. ■

Далее напомним вектор-функцию $\mathbf{L}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$, введенную в § 2.14. Ее можно определить в виде

$$\mathbf{L}(x) = \tau(x)\mathbf{v}(x),$$

где $\mathbf{v}(x)$ — единичный вектор скорости билиардной частицы при движении от x до $\mathcal{F}(x)$. Заметим, что $\|\mathbf{L}(x)\| = \tau(x)$.

Сумма

$$\Delta_n = \mathbf{L} + \mathbf{L} \circ \mathcal{F} + \dots + \mathbf{L} \circ \mathcal{F}^{n-1}$$

имеет следующее физическое значение. Как уже говорилось в § 4.1, каждую билиардную траекторию на билиардном столе $\mathcal{D} \subset \text{Tor}^2$ категории $\mathcal{A}$ можно поднять от тора до ее универсального покрытия $\mathbb{R}^2$; см. пример на рис. 4.2. Тогда получим траекторию, движущуюся на неограниченном столе с бесконечным числом периодически расположенных рассеивателей. Эта неограниченная билиардная система известна как плоский периодический газ Лоренца; см. обсуждение в § 4.1. Она моделирует динамику газа электронов, отскакивающих от тяжелых молекул в металлах (рассеиватели представляют кристаллическую молекулярную структуру). Теперь Δ_n — это векторное перемещение движущегося электрона (билиардной частицы) на плоскости $\mathbb{R}^2$ в ходе n последовательных столкновений с рассеивателями. Напомним, что $\langle \mathbf{L} \rangle = 0$ (см. упражнение 2.44 в § 2.14), следовательно, $\langle \Delta_n \rangle = 0$.

Обозначим компоненты функции $\mathbf{L}$ через $\mathbf{L} = (L_1, L_2)$. Доказательство, используемое ранее в упражнении 7.29, позволяет говорить о динамической непрерывности по Гельдеру для L_1 и L_2 . Тогда применима векторная ЦПТ (теорема 7.54), и она приводит к следующему результату.

Теорема 7.65. Вектор $\Delta_n/\sqrt{n}$ сходится по распределению к двумерному нормальному закону с нулевым средним и ковариационной матрицей $\mathbf{V} = \{v_{ij}\}$, элементы которой

$$v_{ij} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{C}_{L_i L_j}(n).$$

То есть для произвольного прямоугольника $B \subset \mathbb{R}^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Delta_n / \sqrt{n} \in B) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \mathbf{V}}} \iint_B e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}} dx dy,$$

где $\mathbf{x} = (x, y)^T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.66. Ковариационная матрица $\mathbf{V}$ не вырождена для любого бильярдного стола категории A, но доказательство этого факта достаточно сложное. Читатель может найти его в [BSC91, § 7.2] и [BS96, раздел 5].

ЗАМЕЧАНИЕ 7.67. Наоборот, для любого ограниченного бильярдного стола $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ковариационная матрица $\mathbf{V}$ вырождена. Это следует из очевидного факта, что функции $\Delta_n(x)$ равномерно ограничены.

Предположим, что начальная точка $x \in \mathcal{M}$ выбирается случайным образом и поднята до единичного квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ на универсальном покрытии $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $\mathbf{q}_0 = \pi_q(x)$ ее начальное положение в этом квадрате. Тогда положение ее поднятой траектории в момент n -го столкновения, назовем его $\mathbf{q}_n$, есть 2D вектор, который удовлетворяет $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_0 + \Delta_n$. Согласно неравенству треугольника,

$$\|\mathbf{q}_n - \Delta_n\| \leq \|\mathbf{q}_0\| \leq \text{const} = \sqrt{2};$$

следовательно, асимптотическое поведение $\mathbf{q}_n$ идентично поведению Δ_n , описанному теоремой 7.65. Точнее говоря, $\mathbf{q}_n / \sqrt{n}$ сходится к двумерному нормальному закону с нулевым средним и ковариационной матрицей $\mathbf{V}$.

Далее опишем типичный эксперимент из статистической физики. Предположим, что N частиц (электронов) $x_1, \dots, x_N$ выбраны случайным образом на границах рассеивателей в единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$; см. рис. 7.7. Позволим каждой частице двигаться вдоль ее траектории вплоть до n -го столкновения и запишем их конечные расположения $\mathbf{q}_1(n), \dots, \mathbf{q}_N(n)$. Тогда распределение результирующих векторов будет приблизительно нормальным с нулевым средним и ковариационной матрицей $n\mathbf{V}$.

Это классический процесс диффузии, в котором движущиеся частицы быстро колеблются между неподвижными препятствиями, но в целом медленно диффундируют (распространяются) во всех направлениях случайным образом. Ковариационная матрица $\mathbf{V}$ отражает асимптотическое поведение процесса диффузии и называется *матрицей диффузии*; она характеризует форму распределения частицы. Собственные значения $\mathbf{V}$ определяют скорость диффузии, а их отношение определяет эксцентриситет.

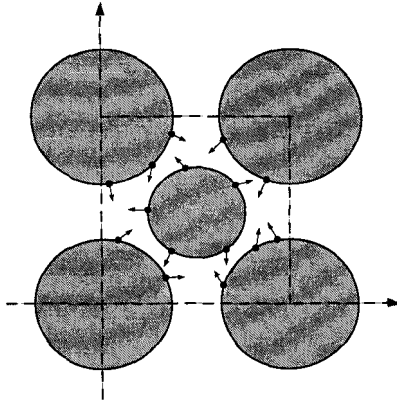


Рис. 7.7. Начальный выбор случайных частиц в эксперименте

Критически настроенный читатель должен заметить, что наш гипотетический эксперимент не совсем реалистичен: движущиеся частицы не синхронизированы, так что каждая из них может подойти к n -му столкновению в разное время. Более естественным будет сделать мгновенный снимок всего процесса в большой момент времени $T > 0$, то есть исследовать положения движущихся частиц в момент T (а не в момент их n -ых столкновений).

Чтобы рассмотреть такую задачу, обозначим расположение движущейся бильярдной частицы в плоском газе Лоренца в момент времени T через $\mathbf{q}(T)$ и рассмотрим его асимптотическое распределение при $T \rightarrow \infty$.

Теорема 7.68. Вектор $\mathbf{q}(T)/\sqrt{T}$ сходится по распределению к двумерному нормальному закону с нулевым средним и ковариационной матрицей $\bar{\tau}^{-1}\mathbf{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство повторяет доказательство [BS81, раздел 3]. Для заданного $T > 0$ зафиксируем $m = [T/\bar{\tau}]$. Вновь обозначим через $n(T) = n_x(T)$ число столкновений, которое испытывает траектория точки $x \in \mathcal{M}$, в течение времени T . Тогда $\mathbf{q}(T) = \mathbf{q}_{n(T)} + \mathcal{O}(1)$, так как горизонт ограничен бильярдами категории А. Следовательно, $T = m\bar{\tau} + \mathcal{O}(1)$; следовательно,

$$\frac{\mathbf{q}(T)}{\sqrt{T}} = \left(\frac{\mathbf{q}_m}{\sqrt{m\bar{\tau}}} + \frac{\mathbf{q}_{n(T)} - \mathbf{q}_m}{\sqrt{m\bar{\tau}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \right) \times \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \right).$$

Очевидно, члены $\mathcal{O}(1/\sqrt{m})$ не могут повлиять на предельное распределение, так что опустим их. По теореме 7.65 первый член $\mathbf{q}_m/\sqrt{m\bar{\tau}}$ сходится по распределению к двумерному нормальному закону с нулевым средним и ковариационной матрицей $\bar{\tau}^{-1}\mathbf{V}$.

Остается показать, что средний член $(\mathbf{q}_{n(T)} - \mathbf{q}_m)/\sqrt{m\bar{\tau}}$ сходится к нулю по вероятности, и затем применить лемму 7.47. По теореме 7.64 для любого $\varepsilon > 0$ существует $A = A_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mu(|n_x(T) - m| \geq A\sqrt{m}) \leq \varepsilon.$$

Теперь желаемый результат получится, если оба выражения

$$\max_{1 \leq j \leq A\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{m}} \left| \sum_{i=m}^{m+j} \mathbf{L}(\mathcal{F}^i x) \right| \quad \text{и} \quad \max_{1 \leq j \leq A\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{m}} \left| \sum_{i=m-j}^m \mathbf{L}(\mathcal{F}^i x) \right|$$

сходятся к нулю по вероятности. Так как $\mathcal{F}$ сохраняет меру μ , достаточно рассмотреть

$$\max_{1 \leq j \leq A\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{m}} \left| \sum_{i=0}^j \mathbf{L}(\mathcal{F}^i x) \right| \quad \text{и} \quad \max_{1 \leq j \leq A\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{m}} \left| \sum_{i=-j}^0 \mathbf{L}(\mathcal{F}^i x) \right|.$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.69. Используя эргодическую теорему Биркгофа, показать, что последние два выражения сходятся к нулю по вероятности.

Это доказывает теорему 7.68. ■

Вернемся к нашим воображаемым экспериментам. Предположим вновь, что N начальных частиц (электронов) $x_1, \dots, x_N$ случайным образом выбираются в единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Позволим каждому электрону двигаться вдоль своей траектории вплоть до момента времени T и запишем их окончательные положения $\mathbf{q}_1(T), \dots, \mathbf{q}_N(T)$. Тогда распределение результирующих векторов будет приближенно нормальным с нулевым средним и ковариационной матрицей $n\bar{\tau}^{-1}\mathbf{V}$. Таким образом, можно назвать $\bar{\tau}^{-1}\mathbf{V}$ *матрицей диффузии в реальном времени*. Заметим, что она пропорциональна *матрице диффузии в дискретном времени* $\mathbf{V}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.70. Теоремы 7.65 и 7.68 не применимы к рассеивающим бильярдам типа В. Без горизонта функция возвращения $\tau(x)$ и функция перемещения $\mathbf{L}(x)$ не ограничены и имеют конечные первые моменты, но бесконечные вторые моменты (упражнение 2.41). В этом случае бильiardная частица может прыгать далеко между последовательными столкновениями; такое движение называется

баллистическим движением. Таким образом, частица стремится двигаться быстрее, чем она это делает в процессе классической диффузии (это поведение теперь может быть связано с естественными явлениями, известными как «супердиффузия» и «сверхпроводимость»). Эвристические доказательства [B192] и численные эксперименты [ZE97] подтверждали, что правильным масштабированием для функции перемещения q_n будет $\sqrt{n \log n}$, а не $\sqrt{n}$; то есть $q_n / \sqrt{n \log n}$ должно сходиться к предельному распределению. О доказательстве этой гипотезы было недавно объявлено в [SV04].

7.11. Сплошные прямоугольники и прямоугольники Кантора

В данном параграфе начнем доказывать лемму спаривания 7.24. Доказательство основано на различных построениях, и сначала рассмотрим самое базовое построение — построение прямоугольников.

В § 6.5 уже использовались области «прямоугольной формы», ограниченные двумя неустойчивыми H -многообразиями и двумя устойчивыми H -многообразиями (напомним упражнение 6.11).

Определение 7.71. Любая замкнутая область $\Omega \subset M$, ограниченная двумя неустойчивыми H -многообразиями и двумя устойчивыми H -многообразиями, называется *сплошным прямоугольником*. Его граница состоит из четырех гладких кривых, которые естественно назвать *u -сторонами* и *s -сторонами*⁶ Ω ; см. рис. 7.8.

Сплошной прямоугольник Ω является замыканием его внутренности. Для любой внутренней точки $x \in \Omega$ неустойчивое H -многообразие $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ или пересекает обе s -стороны Ω (как на рис. 7.8), или обрывается где-то в Ω (возможно, на своей s -стороне). В первом случае говорят, что $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ *полностью пересекает* сплошной прямоугольник Ω . Аналогичные понятия применяются к устойчивым H -многообразиям.

Для заданного сплошного прямоугольника $\Omega \subset M$ обозначим через $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\Omega)$ множество точек $x \in \Omega$ таких, что *оба* H -многообразия $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ и $W_{\mathbb{H}}^s(x)$ полностью пересекают Ω . Множество $\mathfrak{R}$ имеет естественную структуру прямого произведения, описанную далее.

Напомним, что устойчивые многообразия — это убывающие кривые в M , а неустойчивые многообразия — это возрастающие кривые; следовательно, любое устойчивое многообразие W^s может пересекать любое

⁶По техническим причинам предполагается, что четыре угловых точки сплошного прямоугольника *не* являются концевыми точками H -многообразия, образующего его стороны; то есть эти H -многообразия могут быть расширены за пределы угловой точки.

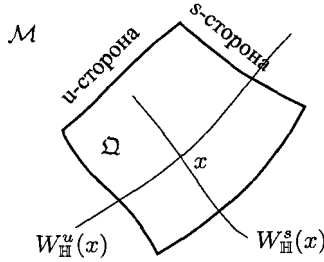


Рис. 7.8. Сплошной прямоугольник Ω . Н-многообразие $W^u_{\mathbb{H}}(x)$ полностью пересекает Ω , но $W^s_{\mathbb{H}}(x)$ обрывается внутри Ω

неустойчивое многообразие W^u только в одной точке; то есть $W^s \cap W^u$ или одноэлементное, или пустое множество. Для любых $x, y \in \mathcal{M}$ полагаем

$$[x, y] := W^s_{\mathbb{H}}(x) \cap W^u_{\mathbb{H}}(y).$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.72. Показать, что если $x, y \in \mathfrak{R}(\Omega)$, то обе точки $[x, y]$ и $[y, x]$ существуют и принадлежат $\mathfrak{R}(\Omega)$.

Пусть Ω — сплошной прямоугольник. Выберем точку $z \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\Omega)$ и полагаем $C = W^u_{\mathbb{H}}(z) \cap \mathfrak{R}$ и $D = W^s_{\mathbb{H}}(z) \cap \mathfrak{R}$. Тогда

$$\mathfrak{R} = [C, D] := \{[x, y] : x \in C, y \in D\}.$$

Кроме того, для каждого $w \in \mathfrak{R}$ существует единственное представление $w = [x, y]$, где $x \in C$ и $y \in D$, так что множества C и D играют роль координатных осей в $\mathfrak{R}$. Таким образом, $\mathfrak{R}$ имеет структуру прямого произведения, но она сильно отличается от Ω ; см. следующее упражнение.

УПРАЖНЕНИЕ 7.73. Показать, что множество $\mathfrak{R}(\Omega)$ замкнуто, но нигде не является плотным; то есть это множество ведет себя как канторово множество. Указание: для замкнутости см. упражнение 5.24. Затем напомним, что произвольно короткие устойчивые и неустойчивые многообразия будут плотными в $\mathcal{M}$ (§ 4.13).

Это мотивирует введение следующего понятия.

Определение 7.74. Замкнутое подмножество $\mathfrak{R} \subset \mathcal{M}$ называется *прямоугольником Кантора*, если для любых $x, y \in \mathfrak{R}$ имеем $\emptyset \neq [x, y] \in \mathfrak{R}$.

Любой прямоугольник $\mathfrak{R}$ имеет структуру прямого произведения $\mathfrak{R} = [C, D]$, где $C = W^u_{\mathbb{H}}(z) \cap \mathfrak{R}$ и $D = W^s_{\mathbb{H}}(z) \cap \mathfrak{R}$ для некоторого $z \in \mathfrak{R}$, как и ранее. Прямоугольники нигде не будут плотными.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.75. Термин «прямоугольник» имеет интересное происхождение. Когда марковские разбиения были впервые построены для линейных гиперболических автоморфизмов тора [AW67], их элементы были действительно прямоугольниками или параллелограммами. Так что элементы разбиения Маркова получили соответствующие имена. В последующих построениях разбиений Маркова (для отображений аксиомы А [Bow70] и билиардов [BS80, BSC90]) их элементы были множествами, подобными канторовым множествам со структурой прямого произведения, как и прямоугольники Кантора, но они по традиции назывались «прямоугольниками» или «параллелограммами».

Большую часть времени мы будем работать с прямоугольниками Кантора $\mathfrak{R} \subset \mathcal{M}$ и только иногда со сплошными прямоугольниками $\Omega \subset \mathcal{M}$. Для краткости под *прямоугольником* будем подразумевать прямоугольник Кантора.

Пусть $\mathfrak{R}$ — прямоугольник и $z \in \mathfrak{R}$. Множество $C = W_{\mathbb{H}}^u(z) \cap \mathfrak{R}$ замкнуто и лежит на возрастающей кривой; таким образом, оно имеет две экстремальные точки x_1 и x_2 (см. рис. 7.9). Аналогично, пусть y_1 и y_2 обозначают экстремальные точки множества $D = W_{\mathbb{H}}^s(z) \cap \mathfrak{R}$.

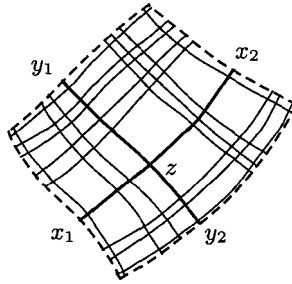


Рис. 7.9. Сплошной прямоугольник $\Omega(\mathfrak{R}) \supset \mathfrak{R}$ ограничен четырьмя пунктирными линиями

УПРАЖНЕНИЕ 7.76. Проверить, что два устойчивых H -многообразия $W_{\mathbb{H}}^s(x_i)$, $i = 1, 2$, и два неустойчивых H -многообразия $W_{\mathbb{H}}^u(y_i)$, $i = 1, 2$, образуют сплошной прямоугольник Ω , содержащий $\mathfrak{R}$. Этот прямоугольник будет минимальным; то есть если $\Omega' \supset \mathfrak{R}$ — другой сплошной прямоугольник, то $\Omega \subset \Omega'$.

Обозначим данный сплошной прямоугольник через $\Omega(\mathfrak{R})$ и назовем его *оболочкой* прямоугольника $\mathfrak{R}$.

Определение 7.77. Пусть $\mathfrak{R}$ — прямоугольник. Прямоугольник $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}$ называется *u-подпрямоугольником*, если $W_{\mathbb{H}}^u(x) \cap \mathfrak{R} = W_{\mathbb{H}}^u(x) \cap \mathfrak{R}_1$ для любой точки $x \in \mathfrak{R}_1$. Аналогично, $\mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{R}$ называется *s-подпрямоугольником*, если $W_{\mathbb{H}}^s(x) \cap \mathfrak{R} = W_{\mathbb{H}}^s(x) \cap \mathfrak{R}_2$ для любой точки $x \in \mathfrak{R}_2$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.78. Доказать, что образ $\mathcal{F}^n(\mathfrak{R})$ прямоугольника $\mathfrak{R}$ для любой $n \in \mathbb{Z}$ будет конечным или счетным объединением прямоугольников $\{\mathfrak{R}_i\}$. Для $n > 0$ их прообразы $\mathcal{F}^{-n}(\mathfrak{R}_i)$ будут s-подпрямоугольниками в $\mathfrak{R}$. При $n < 0$ они являются u-подпрямоугольниками в $\mathfrak{R}$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.79. Проверить, что $\mu(\mathfrak{R}) > 0$ тогда и только тогда, когда для любой (и, следовательно, для каждой) точки $z \in \mathfrak{R}$ имеют место соотношения⁷ $|W_{\mathbb{H}}^u(z) \cap \mathfrak{R}| > 0$ и $|W_{\mathbb{H}}^s(z) \cap \mathfrak{R}| > 0$. Указание: используйте абсолютную непрерывность (§§ 5.8 и 6.3).

В следующих разделах рассмотрим только прямоугольники с положительной мерой. Назовем

$$\rho^u(\mathfrak{R}) = \inf_{x \in \mathfrak{R}} \frac{|W_{\mathbb{H}}^u(x) \cap \mathfrak{R}|}{|W_{\mathbb{H}}^u(x) \cap \Omega(\mathfrak{R})|} \quad (7.54)$$

(минимальной) *u-плотностью* $\mathfrak{R}$. Аналогично определяется (минимальная) *s-плотность* $\rho^s(\mathfrak{R})$, и величина

$$\rho(\mathfrak{R}) = \min\{\rho^u(\mathfrak{R}), \rho^s(\mathfrak{R})\}$$

будет называться (минимальной) *плотностью* прямоугольника $\mathfrak{R}$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.80. Показать, что $\mu(\mathfrak{R}) > 0$ тогда и только тогда, когда $\rho(\mathfrak{R}) > 0$. Указание: заметим, что дробь в (7.54) — это непрерывная функция x , определенная на замкнутом множестве $\mathfrak{R}$; следовательно, она достигает своего минимума. Затем использовать абсолютную непрерывность.

Очевидно, $0 \leq \rho^{u,s}(\mathfrak{R}) < 1$. Если $\rho(\mathfrak{R})$ близко к единице, то прямоугольник $\mathfrak{R}$ будет «очень плотным»; то есть он будет занимать почти всю доступную площадь оболочки $\Omega(\mathfrak{R})$.

Фундаментальная теорема Синая 5.70 гарантирует, что множество очень плотных прямоугольников существуют всюду в $\mathcal{M}$ (заметим, что это справедливо для билиардов категории A, B и C, но наши доказательства, как обычно, ограничиваются категорией A).

⁷Обозначим через $|W|$ длину кривой W . Таким образом, для любого подмножества $B \subset W$ выражение $|B|$ означает одномерную меру Лебега B .

Предложение 7.81. Для любой точки $x \in \mathcal{M}$, которая имеет ненулевые H -многообразия $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ и $W_{\mathbb{H}}^s(x)$, существует замкнутый прямоугольник $\mathfrak{R} \ni x$ с положительной мерой. Кроме того, для любого $\delta > 0$ можно найти прямоугольник $\mathfrak{R} \ni x$ с плотностью $\rho(\mathfrak{R}) > 1 - \delta$ и такой, что точка x делит кривые $W_{\mathbb{H}}^u(x) \cap \Omega(\mathfrak{R})$ и $W_{\mathbb{H}}^s(x) \cap \Omega(\mathfrak{R})$ в отношении между $0.5 - \delta$ и $0.5 + \delta$; то есть x — это почти геометрический центр $\Omega(\mathfrak{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ и $W_{\mathbb{H}}^s(x)$ существуют, имеем $x \in \mathcal{M} \setminus (S_{\infty}^{\mathbb{H}} \cup S_{-\infty}^{\mathbb{H}})$. Теперь утверждение несложно вывести из фундаментальной теоремы 5.70. ■

7.12. «Магнитный» прямоугольник

В этом параграфе продолжим доказывать лемму спаривания 7.24, построив специальный прямоугольник $\mathfrak{R}_*$, устойчивые многообразия которого будут использоваться для «соединения» (или «связи») точки $\mathcal{F}^n(\cup_{\alpha} W_{\alpha})$ с точками $\mathcal{F}^n(\cup_{\beta} W_{\beta})$. Прямоугольник $\mathfrak{R}_*$, подобно магниту, будет «притягивать» H -компоненты образов наших собственных стандартных семейств.

Прямоугольник $\mathfrak{R}_*$ будет строиться аналогично прямоугольникам в предложении 7.81, но с дополнительной осторожностью, чтобы гарантировать лучший контроль за его устойчивыми многообразиями.

Сначала пусть $W_{\mathbb{H}}^u \subset \mathcal{M}$ — неустойчивое H -многообразие. Как и в § 5.9, для каждой точки $x \in W_{\mathbb{H}}^u$ и $n \geq 0$ обозначим через $r_n(x)$ расстояние от точки $\mathcal{F}^n(x)$ до ближайшей концевой точки H -компоненты $\mathcal{F}^n(W_{\mathbb{H}}^u)$, которая содержит точку $\mathcal{F}^n(x)$. Кроме того, напомним, что $r_{\mathbb{H}}^s(x)$ обозначает расстояние, измеренное вдоль (максимального) устойчивого H -многообразия $W_{\mathbb{H}}^s(x)$, от x до ближайшей концевой точки $W_{\mathbb{H}}^s(x)$; см. § 5.12. В этом параграфе также было доказано, что

$$r_{\mathbb{H}}^s(x) \geq \min_{n \geq 0} \tilde{C}^{-1} \Lambda^n r_n(x), \quad (7.55)$$

где $\Lambda > 1$ — минимальный коэффициент растяжения (4.19), а $\tilde{C} = \tilde{C}(\mathcal{D}) > 0$ — постоянная.

Пусть $\widetilde{W} \subset W_{\mathbb{H}}^u$ — подкривая (выберем ее позже). Для заданного $\kappa > 0$ полагаем

$$\widetilde{W}_{\kappa} := \widetilde{W} \setminus \cup_{n \geq 0} \{x \in \widetilde{W} : r_n(x) < \tilde{C} \Lambda^{-n} \kappa\}. \quad (7.56)$$

Заметим, что подмножество $\widetilde{W}_{\kappa} \subset \widetilde{W}$ замкнуто. Благодаря (7.55) имеем $r_{\mathbb{H}}^s(x) \geq \kappa$ для каждого $x \in \widetilde{W}_{\kappa}$. Обозначим через

$$\mathfrak{S}_{\kappa}(\widetilde{W}) = \{W_{\mathbb{H}}^s(x) : x \in \widetilde{W}_{\kappa}\}$$

множество соответствующих устойчивых H -многообразий (все они продолжаются на расстояние $\geq \kappa$ в обе стороны от $\widetilde{W}$).

Так как $\widetilde{W}_\kappa$ — замкнутое множество, у него есть две экстремальные точки x_1 и x_2 на кривой $\widetilde{W}$, которые соответствуют двум экстремальным H -многообразиям $W_\mathbb{H}^s(x_1)$ и $W_\mathbb{H}^s(x_2)$ в семействе $\mathfrak{S}_\kappa(\widetilde{W})$. Будем говорить, что неустойчивая кривая W *полностью пересекает* семейство $\mathfrak{S}_\kappa(\widetilde{W})$, если она пересекает *все* H -многообразия $W_\mathbb{H}^s \in \mathfrak{S}_\kappa(\widetilde{W})$.

Обозначим через $\mathcal{G}_\kappa^u(\widetilde{W})$ семейство всех неустойчивых H -многообразий $W_\mathbb{H}^u \subset \mathcal{M}$, которые полностью пересекают семейство $\mathfrak{S}_\kappa(\widetilde{W})$. Наконец, пусть

$$\mathfrak{R}_\kappa(\widetilde{W}) = \bigcup_{W_\mathbb{H}^s \in \mathfrak{S}_\kappa(\widetilde{W})} \bigcup_{W_\mathbb{H}^u \in \mathcal{G}_\kappa^u(\widetilde{W})} W_\mathbb{H}^s \cap W_\mathbb{H}^u$$

обозначает прямоугольник, образованный нашими двумя семействами устойчивых и неустойчивых H -многообразий. Заметим, что это замкнутый прямоугольник.

Предложение 7.82. *Для любого $\delta > 0$ существуют подкривые $\widetilde{W} \subset W_\mathbb{H}^u$ и $\kappa > 0$ такие, что прямоугольник $\mathfrak{R}_* = \mathfrak{R}_\kappa(\widetilde{W})$ имеет плотность $\rho(\mathfrak{R}_*) > 1 - \delta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала пусть $\widetilde{W} = W_\mathbb{H}^s$. Из результатов § 5.12 следует, что $|\widetilde{W} \setminus \bigcup_{\kappa > 0} \widetilde{W}_\kappa| = 0$. Выберем $\kappa > 0$ такое, что $|\widetilde{W}_\kappa| > 0$, и выберем точку плотности Лебега $z \in \widetilde{W}_\kappa$ на кривой $\widetilde{W}$. Уменьшим $\widetilde{W}$ так, что эта кривая становится малой окрестностью z . Оставшаяся часть доказательства совпадает с доказательством предложения 7.81. ■

В дальнейшем выберем малое $\delta > 0$ и зафиксируем соответствующие $\widetilde{W} \subset W_\mathbb{H}^u$ и $\kappa > 0$ и специальный прямоугольник $\mathfrak{R}_* = \mathfrak{R}_\kappa(\widetilde{W})$, построенный в предложении ранее. Обозначим $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\kappa(\widetilde{W})$ для краткости и, немного запутывая изложение, обозначим также через $\mathfrak{S}$ объединение всех H -многообразий $W_\mathbb{H}^s \in \mathfrak{S}$.

Заметим, что $\widetilde{W}_\kappa = \widetilde{W} \cap \mathfrak{S}$. Для любой неустойчивой кривой W , которая полностью пересекает $\mathfrak{S}$, полагаем $W_\kappa := W \cap \mathfrak{S}$.

Далее, для любой стандартной пары (W, ν) и любой $n \geq 0$ обозначим через $W_{n,i}$ все H -компоненты $\mathcal{F}^n(W)$, которые полностью пересекают $\mathfrak{S}$, и полагаем

$$W_{n,*} = \bigcup_i \mathcal{F}^{-n}(W_{n,i} \cap \mathfrak{S}). \quad (7.57)$$

Предложение 7.83. *Существуют постоянные $n_1 \geq 1$ и $d_1 > 0$ такие, что для любой собственной стандартной пары и любого $n \geq n_1$*

$$\nu(W_{n,*}) \geq d_1. \quad (7.58)$$

Это свойство легко распространяется на собственные стандартные семейства с очевидным обозначением.

Следствие 7.84. *Существуют постоянные $n_0 \geq 1$ и $d_0 > 0$ такие, что для любого собственного стандартного семейства $\mathcal{G} = \{(W_\alpha, \nu_\alpha)\}$ и любого $n \geq n_0$*

$$\mu_{\mathcal{G}}(\cup_\alpha W_{\alpha,n,*}) \geq d_0. \quad (7.59)$$

Доказательство предложения 7.83 следует из доказательства [BSC91, теорема 3.13]. Оно основано на свойствах перемешивания $\mathcal{F}$, установленных в § 6.7. В действительности из перемешивания $\mathcal{F}$ относительно легко следовало бы (7.58), если бы были включены все H -компоненты $\mathcal{F}^n(W)$ в (7.57). Но поскольку интерес представляют только те многообразия, которые полностью пересекают $\mathcal{S}$ (частичные пересечения здесь не учитываются), нам необходимо дополнительное построение, чтобы гарантировать полное пересечение.

Определение 7.85. Говорят, что неустойчивая кривая W^u *собственно пересекает* прямоугольник $\mathfrak{R}$, если:

- (a) W^u пересекает обе s -стороны $\Omega(\mathfrak{R})$;
- (b) для каждого $x \in \mathfrak{R}$ выполнено соотношение $W^u \cap W_{\mathbb{H}}^u(x) \cap \Omega(\mathfrak{R}) = \emptyset$; то есть W^u не пересекает неустойчивых многообразий $\mathfrak{R}$;
- (c) для каждого $x \in \mathfrak{R}$ точка $W^u \cap W_{\mathbb{H}}^s(x)$ делит кривую $W_{\mathbb{H}}^s(x) \cap \Omega(\mathfrak{R})$ в отношении между 0.1 и 0.9; то есть W^u не подходит слишком близко ни к одной из u -сторон $\Omega(\mathfrak{R})$;
- (d) $\rho^s(\mathfrak{R}) > 0.99$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.86. Показать, что любая неустойчивая кривая W^u собственно пересекает прямоугольник $\mathfrak{R}$. Указание: если кривая W^u не совпадает с любой кривой разрыва $S \subset S_{-\infty}^{\mathbb{H}}$, используйте предложение 7.81. В ином случае требуется более аккуратное доказательство, которое повторяет доказательство теоремы 6.14; оставим его читателю.

Лемма 7.87. Для любого $q > 0$ существует конечная совокупность прямоугольников $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_m$ таких, что любая неустойчивая кривая W длины $\geq q$ собственно пересекает по меньшей мере одну из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расстояние Хаусдорфа между неустойчивыми кривыми $W_1, W_2 \subset \mathcal{M}$ имеет вид

$$\text{dist}_H(W_1, W_2) = \max_{i=1,2} \sup_{x \in W_i} \text{dist}(x, W_{3-i}).$$

Если последовательность неустойчивых кривых W_i сходится в метрике Хаусдорфа к кривой $W \subset \mathcal{M}$, то W — это также неустойчивая кривая. Следовательно, множество замкнутых неустойчивых кривых длины $\geq q$ с метрикой Хаусдорфа компактно. Кроме того, легко понять, что если неустойчивая кривая W собственно пересекает прямоугольник $\mathfrak{R}$, то все неустойчивые кривые, которые достаточно близки к W в метрике Хаусдорфа, также собственно пересекают $\mathfrak{R}$. Таким образом, каждый прямоугольник $\mathfrak{R}$ пересекается собственно открытым (хотя и, возможно, пустым) множеством неустойчивых кривых. Лемма следует из стандартного доказательства компактности. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7.83. Выберем и зафиксируем конечную совокупность прямоугольников $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_m$ такую, что неустойчивая кривая каждой собственной стандартной пары собственно пересекает одну из них.

Пусть (W, ν) — собственная стандартная пара; она собственно пересекает прямоугольник $\mathfrak{R}_k$ для некоторого $1 \leq k \leq m$. Для любого $n \geq 1$ множество $\mathcal{F}^n(\mathfrak{R}_k)$ — это конечное или счетное объединение прямоугольников; обозначим их через $\mathfrak{R}_{k,n,i}$, $i \geq 1$. Напомним, что $\mathfrak{R}_{k,n,i}^- = \mathcal{F}^{-n}(\mathfrak{R}_{k,n,i})$ — это s -подпрямоугольник в $\mathfrak{R}_k$ для каждого i ; см. упражнение 7.78.

УПРАЖНЕНИЕ 7.88. Показать, что отображение $\mathcal{F}_H^n$ гладкое на каждом сплошном прямоугольнике $\Omega(\mathfrak{R}_{k,n,i}^-)$. С другой стороны, любые два сплошных прямоугольника $\Omega(\mathfrak{R}_{k,n,i}^-)$ и $\Omega(\mathfrak{R}_{k,n,j}^-)$ с $i \neq j$ отделены по крайней мере одной кривой разрыва множества $\mathcal{S}_n^H$, проходящих из одной u -стороны $\Omega(\mathfrak{R}_k)$ к другой (и таким образом пересекающих W); см. рис. 7.10. Указание: используйте свойство продолжения особенностей (§ 4.9 и упражнение 5.16).

Обозначим через $W_{n,j}$ все H -компоненты $\mathcal{F}^n(W)$. Как следует из предыдущего упражнения, каждый сплошной прямоугольник $\Omega(\mathfrak{R}_{k,n,i})$ пе-

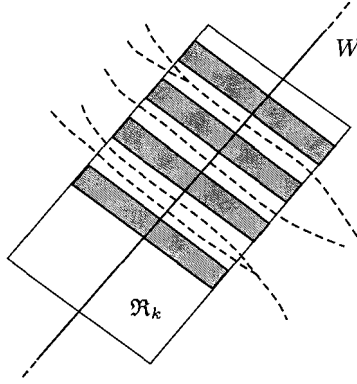


Рис. 7.10. Упражнение 7.88: серыми подпрямоугольниками обозначены $\mathfrak{R}_{k,n,j}$; пунктирные кривые — это особенности

пересекается в точности одной H -компонентой $W_{n,j}$ и каждая H -компонента $W_{n,j}$ пересекает самое большее один сплошной прямоугольник $\Omega(\mathfrak{R}_{k,n,i})$. Их можно перенумеровать так, что каждый сплошной прямоугольник $\Omega(\mathfrak{R}_{k,n,i})$ пересекается $W_{n,i}$.

Вернемся к нашему специальному прямоугольнику $\mathfrak{R}_*$ (магниту). Из абсолютной непрерывности следует, что почти каждая точка (по мере μ) $y \in \mathfrak{R}_*$ есть точка плотности Лебега множества $W_{\mathbb{H}}^s(y) \cap \mathfrak{R}_*$ на кривой $W_{\mathbb{H}}^s(y)$. Необходимо поработать над подмножеством $\mathfrak{P}_* \subset \mathfrak{R}_*$, где условие плотности «равномерное».

Следствие 7.89. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_* > 0$ и подмножество $\mathfrak{P}_* \subset \mathfrak{R}_*$ такое, что $\mu(\mathfrak{P}_*) > 0$, и для любого устойчивого H -многообразия $W_{\mathbb{H}}^s$ такого, что $W_{\mathbb{H}}^s \cap \mathfrak{P}_* \neq \emptyset$ и $|W_{\mathbb{H}}^s| < \delta_*$, имеем $|W_{\mathbb{H}}^s \cap \mathfrak{R}_*|/|W_{\mathbb{H}}^s| \geq 1 - \varepsilon$.

Зафиксируем малое $\varepsilon > 0$ и соответствующие $\delta_* > 0$ и $\mathfrak{P}_*$.

Из перемешивания $\mathcal{F}$ следует, что для всех $n \geq n'_1$

$$\mu(\mathfrak{P}_* \cap \mathcal{F}^n(\mathfrak{R}_k)) = \sum_i \mu(\mathfrak{P}_* \cap \mathfrak{R}_{k,n,i}) \geq d', \quad (7.60)$$

где $n'_1 \geq 1$, $d' > 0$ можно считать не зависящими от k и от стандартной пары (W, ν) (это вытекает из конечности совокупности $\{\mathfrak{R}_k\}$).

Лемма 7.90. Если $\mathfrak{P}_* \cap \mathfrak{R}_{k,n,i} \neq \emptyset$, то соответствующая H -компонента $W_{n,i}$ полностью пересекает прямоугольник $\mathfrak{R}_*$ (здесь предполагается, что n достаточно большое, $n \geq n_1''$ для постоянной $n_1'' \geq 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{P}_* \cap \mathfrak{R}_{k,n,i} \neq \emptyset$. Выберем точку $y \in \mathfrak{P}_* \cap \mathfrak{R}_{k,n,i}$ и рассмотрим устойчивое H -многообразие $\widehat{W}_{\mathbb{H}}^s := W_{\mathbb{H}}^s(\mathcal{F}^{-n}y) \cap \Omega(\mathfrak{R}_k)$. Если n — достаточно большое, то его образ $W_{\mathbb{H}}^s := \mathcal{F}^n(\widehat{W}_{\mathbb{H}}^s)$ короче, чем δ_* ; следовательно, $|W_{\mathbb{H}}^s \cap \mathfrak{R}_*|/|W_{\mathbb{H}}^s| \geq 1 - \varepsilon$ благодаря следствию 7.89. Если ε достаточно мало, то свойства (с) и (d) собственного пересечения (определение 7.85) гарантируют, что кривая $W_{\mathbb{H}}^s$ содержит много точек, принадлежащих множеству $\mathfrak{R}_* \cap \mathfrak{R}_{k,n,i}$. В действительности нужны только две точки, по одной на каждой стороне кривой $W_{n,i}$; назовем их y_1 и y_2 . Теперь пересечение $W_{\mathbb{H}}^s \cap W_{n,i}$ лежит между двумя точками:

$$y_1, y_2 \in W_{\mathbb{H}}^s \cap \mathfrak{R}_* \cap \mathfrak{R}_{k,n,i}.$$

Пусть Ω° обозначает сплошной прямоугольник, ограниченный двумя s -сторонами $\Omega(\mathfrak{R}_*)$ и двумя неустойчивыми H -многообразиями $W_{\mathbb{H}}^u(y_i)$, $i = 1, 2$ (см. рис. 7.11).

УПРАЖНЕНИЕ 7.91. Показать, что отображение $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{-n}$ гладкое на Ω° . Указание: использовать свойство продолжения особенностей (§ 4.9 и упражнение 5.16).

Гладкость $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{-n}$ внутри Ω° гарантирует, что $W_{n,i}$ не может оборваться там. Кроме того, оно не может пересекать u -стороны Ω° по свойству (b) собственного пересечения (определение 7.85), так что оно должно полностью пересечь $\mathfrak{R}_*$. Лемма 7.90 доказана. ■

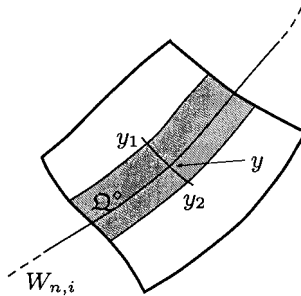


Рис. 7.11. Доказательство леммы 7.90

Чтобы закончить доказательство предложения 7.83, запишем

$$\begin{aligned}
 \nu(W_{n,*}) &= \sum_i \nu(\mathcal{F}^{-n}(W_{n,i} \cap \mathfrak{R}_*)) \geq \\
 &\geq \sum_i \nu(\mathcal{F}^{-n}(W_{n,i} \cap \mathfrak{R}_* \cap \mathfrak{R}_{k,n,i})) \geq \\
 &\geq c_k \sum_i \mu(\mathcal{F}^{-n}(\mathfrak{R}_* \cap \mathfrak{R}_{k,n,i})) \geq \\
 &\geq c_{\min} d' > 0.
 \end{aligned}$$

Здесь использовались ограничения на искажения, абсолютная непрерывность и (7.60). Постоянная $c_k > 0$ (появившаяся из ограничений на искажения и абсолютной непрерывности) зависит от k , но $c_{\min} := \min_{1 \leq k \leq m} c_k > 0$ не зависит от k , то есть от стандартной пары (W, ν) . Это справедливо для всех $n \geq \max\{n'_1, n''_2\}$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 7.92. В предложении 7.83 предполагалось, что стандартная пара (W, ν) является собственной. Если это не так, то необходимо подождать, пока ее образ $\mathcal{F}^m(W)$ не станет собственным стандартным семейством для некоторого $m \geq 1$, и затем применить следствие 7.84, заменив n_0 на $n_0 + m$. Напомним, что время ожидания здесь равно $m = \kappa \lfloor \ln |W| \rfloor$; см. замечание 7.35.

7.13. Промежутки, восстановление, остановка

Опишем общую стратегию доказательства леммы спаривания 7.24. Предположим для простоты, что $n_0 = 100$ и $d_0 = 0.01$ в следствии 7.84. Для заданного собственного стандартного семейства $\mathcal{G} = \{(W_\alpha, \nu_\alpha)\}$ после 100 итераций $\mathcal{F}$ по крайней мере 1% его образа будет «на магните». То же самое применимо в другому собственному стандартному семейству $\mathcal{E} = \{(W_\beta, \nu_\beta)\}$, так что в этот момент времени 1% их образов могут быть соединены, или «связаны», с помощью устойчивых H -многообразий $W_{\mathbb{H}}^s \in \mathfrak{S}$. Что же делать с оставшимися 99% их образов?

Если эти оставшиеся части образуют собственные стандартные семейства, то вновь можно провести 100 итераций $\mathcal{F}$ и снова связать 1% их образов. Таким образом, после $100n$ итераций $\mathcal{F}$ будут связаны все, кроме 0.99^n образов начальных стандартных семейств $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$. Это дает нам экспоненциальную оценку хвоста (7.15) и доказывает лемму спаривания.

Однако в этом плане есть сложность: после каждого спаривания оставшиеся 99% образов будут образовывать стандартное семейство, которое

не является собственным. Действительно, для любой H -компоненты W , которая полностью пересекает $\mathfrak{S}$, «связанные» точки $x \in W \cap \mathfrak{R}_*$ образуют замкнутое нигде не плотное (канторово) множество на кривой W , так что его дополнение будет счетным объединением очень коротких кривых, среди которых будет много произвольно коротких. Каждой кривой необходимо определенное время, чтобы вырасти (восстановить размер, чтобы стать собственным стандартным семейством), и более мелкие части будут расти дольше перед полным восстановлением. Чтобы учесть необходимый рост перед восстановлением, необходимы дополнительные построения, описываемые далее.

Пусть $\mathcal{P} = (W, \nu)$ — стандартная пара такая, что W полностью пересекает семейство $\mathfrak{S}$ (магнит), построенное в предыдущем параграфе. Тогда $W_\kappa = W \cap \mathfrak{S}$ — это замкнутое нигде не плотное множество на кривой W и его дополнение $W \setminus W_\kappa$ состоит из бесконечного числа интервалов; назовем их *промежутками* в W_κ . Эти промежутки естественным образом соответствуют связным компонентам множества $\widetilde{W} \setminus \widetilde{W}_\kappa$ (промежутки в $\widetilde{W}_\kappa$) (см. рис. 7.12), которые созданы точками $x \in \widetilde{W}$, удовлетворяющими $r_n(x) < \tilde{C}\Lambda^{-n}\kappa$, в соответствии с (7.56).

Пусть $\tilde{V} \subset \widetilde{W} \setminus \widetilde{W}_\kappa$ — интервал. Назовем величину

$$n = \min\{i \geq 1 : r_i(x) < \tilde{C}\Lambda^{-i}\kappa \text{ для некоторого } x \in \tilde{V}\}$$

рангом $\tilde{V}$. Очевидно, каждый промежуток в $\widetilde{W}_\kappa$ имеет свой ранг.

УПРАЖНЕНИЕ 7.93. Показать, что если $\text{ранг } \tilde{V} = n$, то $\mathcal{F}^{n-1}(\tilde{V})$ — это кривая длины $\geq C\Lambda^{-n}$ для некоторой постоянной $C = C(\mathcal{D}) > 0$. Указание: рассмотреть H -компоненты $\mathcal{F}^{n-1}(\widetilde{W})$, содержащие $\mathcal{F}^{n-1}(\tilde{V})$, показать,

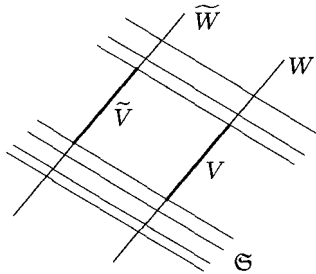


Рис. 7.12. Промежуток V в $W \setminus W_\kappa$ соответствует промежутку $\tilde{V}$ в $\widetilde{W} \setminus \widetilde{W}_\kappa$

что кривая пересекает $(C\Lambda^{-n})$ -окрестность множества особенностей $S^{\mathbb{H}}$ для некоторой постоянной $C > 0$, затем доказать, что она должна пересекать эту окрестность полностью (если она обрывается где-то внутри этой окрестности, то до этого она должна иметь разрывы из-за особенностей).

Каждый промежуток $V \subset W \setminus W_\kappa$ соответствует промежутку $\tilde{V} \subset \tilde{W} \setminus \tilde{W}_\kappa$ с рангом $n \geq 1$; в этом случае говорят, что V сам имеет ранг n . Концевые точки V связаны с точками $\tilde{V}$ устойчивыми H -многообразиями $W_{\mathbb{H}}^s \in \mathfrak{S}$ (см. рис. 7.12); следовательно, их образы $\mathcal{F}^{n-1}(V)$ и $\mathcal{F}^{n-1}(\tilde{V})$ должны находиться экспоненциально близко друг к другу (расстояние между ними $\ll \Lambda^{-n}$). Следовательно, $|\mathcal{F}^{n-1}(V)| \geq \frac{1}{2}C\Lambda^{-n}$. Тогда множество $\mathcal{F}^{n(2+\kappa \ln \Lambda)}(V)$ будет собственным стандартным семейством в соответствии с замечаниями 7.35 и 7.92.

Введем функцию *восстановления времени* $\mathbf{r}_P(x)$ на $W \setminus W_\kappa$, полагая $\mathbf{r}_P(x) = [n(2 + \kappa \ln \Lambda)]$, где n — ранг промежутка $V \subset W \setminus W_\kappa$, содержащий точку x (заметим, что функция $\mathbf{r}_P(x)$ теперь постоянна на каждом промежутке).

УПРАЖНЕНИЕ 7.94. Показать, что для всех $n \geq 1$

$$\nu(x \in W \setminus W_\kappa : \mathbf{r}_P(x) > n) \leq \text{const } \Lambda^{-n} \nu(W \setminus W_\kappa). \quad (7.61)$$

Указание: используйте вторую лемму о росте (теорема 5.53).

Далее, пусть $s_P(x)$ — другая функция на $W \setminus W_\kappa$ (со значениями в $\mathbb{N}$) такая, что

$$s_P(x) \equiv \text{const} \quad \text{на каждом промежутке } V \subset W \setminus W_\kappa \quad (7.62)$$

и

$$s_P(x) \geq \mathbf{r}_P(x) + n_0. \quad (7.63)$$

Так как обе функции $\mathbf{r}_P$ и s_P постоянны на каждом промежутке V , будем иногда обозначать их значения через $\mathbf{r}_P(V)$ и $s_P(V)$ соответственно.

Теперь применим следствие 7.84 к каждому промежутку $V \subset W \setminus W_\kappa$ (точнее, к образу $\mathcal{F}^{\mathbf{r}_P(V)}(V)$; ср. с замечаниями 7.35 и 7.92)

$$\nu(V_{s_P(V),*}) \geq d_0 \nu(V) \quad (7.64)$$

в обозначениях (7.57). Другими словами, в момент $n = s_P(V)$ d_0 -дробь образа $\mathcal{F}^n(V)$ будет «на магните». В этот момент времени образ $\mathcal{F}^n(V)$ может быть «остановлен» и часть его (которая пересекает магнит $\mathfrak{S}$) может

быть связана с соответствующим образом другого собственного стандартного семейства (это будет проделано в следующем разделе). Назовем s_P функцией времени остановки.

Заметим, что время остановки s_P не полностью определяется (7.62) и (7.63); это будет целью следующего предложения.

Предложение 7.95. *Функция времени остановки $s_P(x)$ может быть определена на $W \setminus W_\kappa$ (см. замечание ниже) так, что для всех $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{\nu(x \in W \setminus W_\kappa : s_P(x) = n)}{\nu(W \setminus W_\kappa)} = q_n, \quad (7.65)$$

где $\{q_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая

$$\sum q_n = 1 \quad \text{и} \quad q_n < \text{const } \theta^n \quad (7.66)$$

для некоторого $\theta \in (\Lambda^{-1}, 1)$. Кроме того, последовательность $\{q_n\}$ не зависит от P ; то есть она одна и та же для всех стандартных пар $P = (W, \nu)$, так что W полностью пересекает семейство $\mathfrak{S}$.

Опишем сначала идею доказательства. Благодаря (7.61) несложно определить s_P так, чтобы для всех $n > 0$

$$\frac{\nu(x \in W \setminus W_\kappa : s_P(x) = n)}{\nu(W \setminus W_\kappa)} \leq \text{const } \theta^n. \quad (7.67)$$

По-прежнему при определении функции s_P нет существенных ограничений, и нам хотелось бы выбрать ее так, чтобы удовлетворить (7.65) с последовательностью $\{q_n\}$, независимой от P . Наша идея иллюстрируется следующим упражнением.

УПРАЖНЕНИЕ 7.96. Пусть $g_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}$ — (счетное или несчетное) семейство функций, значения которых — натуральные числа такие, что для всех $n \geq 1$

$$m(x \in [0, 1] : g_\alpha(x) \geq n) \leq e^{-n},$$

где m обозначает меру Лебега на $[0, 1]$. Показать, что существуют последовательность $\{q_n\}$ такая, что $q_n \leq e^{-n}$, и семейство функций $f_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}$ таких, что

$$f_\alpha(x) \geq g_\alpha(x) \quad \forall \alpha \quad \forall x$$

и

$$\mathbf{m}(x \in [0, 1]: f_\alpha(x) = n) = q_n \quad \forall \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(заметим, что последовательность $\{q_n\}$ должна быть независимой от α).
Указание: рассмотреть последовательность $m_{\alpha,n} = \mathbf{m}(x: g_\alpha(x) = n)$.

Данное упражнение доказывается относительно просто, по сравнению с предложением 7.95, так как функции f_α должны быть определены на непрерывном интервале $[0, 1]$. В нашем случае функции времени остановки s_p должны быть постоянными на каждом промежутке, согласно (7.62), так что они фактически определены на дискретном (счетном) множестве промежутков. Таким образом, их распределение в смысле (7.65) труднее регулировать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7.95. Сделаем область функции времени остановки эффективно непрерывной, разделив каждый промежуток V на несчетное семейство «более тонких» кривых с помощью прямоугольников, описанных в § 7.5. Точнее, заменим несколько промежутков V прямоугольником $V \times [0, 1]$. Тогда можно разделить прямоугольник на подпрямоугольники $V \times I_j$, где $I_j \subset [0, 1]$ — подынтервалы. Определим величину s_p так, что она принимает различные значения на каждом подпрямоугольнике I_j . Размеры подынтервалов $I_j \subset [0, 1]$ должны выбираться так, чтобы гарантировать выполнение (7.65) и (7.66); это можно сделать используя упражнение 7.96, так как концевые точки I_j могут выбираться из непрерывного множества $[0, 1]$.

Поскольку величина s_p теперь постоянна на каждом подпрямоугольнике $V \times I_j$, последний может схлопнуться в кривую V_j , которая геометрически совпадает с промежутком V , но несет меру, отличную от ν : она несет меру ν , умноженную на $|I_j|$. В итоге получим счетное семейство кривых $\{V_j\}$, и функция s_p будет постоянной на каждом из них, что и требовалось доказать. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 7.97. Заметим, что в доказательстве предложения 7.95 необходимо разбить несколько компонент $W \subset W_\kappa$ на конечное или счетное число (геометрически тождественных) кривых, каждую с разным весом, и определить функцию времени остановки s_p отдельно для каждой кривой. Эта небольшая корректировка необходима, чтобы сделать предложение точным.

7.14. Построение отображения спаривания

Вернемся к построению отображения спаривания $\Theta: \cup_\alpha \widehat{W}_\alpha \rightarrow \cup_\beta \widehat{W}_\beta$ из леммы 7.24. Будем использовать рекурсивный алгоритмический подход.

Первые два шага нашего построения будут описаны подробно; дальнейшая процедура станет очевидной.

Напомним, что заданы два собственных стандартных семейства $\mathcal{G} = (W_\alpha, \nu_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, и $\mathcal{E} = (W_\beta, \nu_\beta)$, $\beta \in \mathcal{B}$, с соответствующими мерами $\mu_{\mathcal{G}}$ и $\mu_{\mathcal{E}}$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{G}} = (\widehat{W}_\alpha, \widehat{\nu}_\alpha)$ и $\widehat{\mathcal{E}} = (\widehat{W}_\beta, \widehat{\nu}_\beta)$ соответствующие семейства прямоугольников и определим две вероятностные меры $\widehat{\mu}_{\mathcal{G}}$ и $\widehat{\mu}_{\mathcal{E}}$ на объединениях $\cup_\alpha \widehat{W}_\alpha$ и $\cup_\beta \widehat{W}_\beta$ соответственно.

Определим первую функцию времени остановки s_0 на объединениях $\cup_\alpha \widehat{W}_\alpha$ и $\cup_\beta \widehat{W}_\beta$ как постоянную $s_0(x, t) \equiv n_0$. В момент $s_0 = n_0$ несколько H -компонент образов $\mathcal{F}^{s_0}(\cup_\alpha W_\alpha)$ и $\mathcal{F}^{s_0}(\cup_\beta W_\beta)$ будут полностью пересекать магнит $\mathfrak{S}$, а полная мера соответствующих пересечений с $\mathfrak{S}$ будет $\geq d_0$ (см. следствие 7.84).

Для каждой H -компоненты $W_{\alpha, s_0, i}$ образа $\mathcal{F}^{s_0}(W_\alpha)$, которая полностью пересекает $\mathfrak{S}$, рассмотрим соответствующий прямоугольник $\widehat{W}_{\alpha, s_0, i} = W_{\alpha, s_0, i} \times [0, 1]$. Разделим подпрямоугольник $W_{\alpha, s_0, i} \times [0, \tau_{\alpha, i}]$ с $0 < \tau_{\alpha, i} \leq 0.5$ так, что

$$\widehat{\mu}_{\mathcal{G}}(\cup_\alpha \widehat{W}_{\alpha, 1}) = d := d_0/2, \quad (7.68)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\alpha, 1} = \{ (x, t) \in \widehat{W}_\alpha : \mathcal{F}^{s_0}(x) \in W_{\alpha, s_0, i} \cap \mathfrak{S} \\ \text{и } t \in [0, \tau_{\alpha, i}] \text{ для некоторого } i \}. \end{aligned}$$

Это можно легко сделать благодаря следствию 7.84: если $\mu_{\mathcal{G}}(\cup_\alpha W_{\alpha, s_0, *}) = d_0$ в (7.59), то полагаем $\tau_{\alpha, i} = 0.5$ для всех α и i . Если неравенство в (7.59) строгое, то у нас «слишком много удовольствий сразу». Тогда снизим некоторые из $\tau_{\alpha, i}$, чтобы сделать (7.68) точным.

Добавим над W знаки «тильда», чтобы обозначить подмножества $\cup_\alpha \widehat{W}_\alpha$, на которых определяется отображение спаривания Θ . На первом шаге нашего построения Θ должно переводить точки $(x, t) \in \cup_\alpha \widehat{W}_{\alpha, 1}$ в точки $(y, s) \in \cup_\beta \widehat{W}_\beta$ такие, что $\mathcal{F}^{s_0}(x)$ и $\mathcal{F}^{s_0}(y)$ лежат на том же устойчивом H -многообразии $W_{\mathbb{H}}^s \in \mathfrak{S}$. Оно также должно сохранять меру (то есть переводить $\widehat{\mu}_{\mathcal{G}}$ в $\widehat{\mu}_{\mathcal{E}}$). Чтобы правильно определить Θ на множестве $\cup_\alpha \widehat{W}_{\alpha, 1}$, опишем сначала его образ, который обозначим через $\cup_\beta \widetilde{W}_{\beta, 1}$ (здесь индекс 1 обозначает *первый* шаг построения).

Существует соблазн определить $\widetilde{W}_{\beta, 1}$ таким же образом, как было определено $\widetilde{W}_{\alpha, 1}$. В этом случае множества $\cup_\beta \widetilde{W}_{\beta, 1}$ и $\cup_\alpha \widetilde{W}_{\alpha, 1}$ имели бы

ту же полную меру ($= d$) и их $\mathcal{F}^{s_0}$ -образы лежали бы на том же устойчивом H -многообразии $W_{\mathbb{H}}^s \in \mathfrak{S}$, но этого может быть недостаточно, так как такое отображение может не сохранять меру. Действительно, для некоторого $W_{\mathbb{H}}^s \in \mathfrak{S}$ пересечения $W_{\mathbb{H}}^s \cap \mathcal{F}^{s_0}(\cup_{\alpha} \widetilde{W}_{\alpha,1})$ и $W_{\mathbb{H}}^s \cap \mathcal{F}^{s_0}(\cup_{\beta} \widetilde{W}_{\beta,1})$ могут нести разные «величины» мер $\widehat{\mu}_{\mathcal{G}}$ и $\widehat{\mu}_{\mathcal{E}}$ соответственно. Причина для этого возможного «несоответствия» объясняется следующим образом.

УПРАЖНЕНИЕ 7.98. Предположим, что плотность меры $\mathcal{F}^{s_0}(\mu_{\mathcal{G}})$ постоянна (равномерна) на каждой H -компоненте $\mathcal{F}^{s_0}(W_{\alpha})$, которая полностью пересекает магнит $\mathfrak{S}$. Сделаем подобное предположение для плотности другой меры $\mathcal{F}^{s_0}(\mu_{\mathcal{E}})$. Дополнительно предположим, что якобиан голономных отображений между H -компонентами $\mathcal{F}^{s_0}(W_{\alpha})$ и компонентами $\mathcal{F}^{s_0}(W_{\beta})$, которые полностью пересекают магнит $\mathcal{G}$, постоянен (скажем, равен единице). Показать, что равномерные плотности на H -компонентах $\mathcal{F}^{s_0}(W_{\alpha})$ будут переведены в равномерные плотности на H -компонентах $\mathcal{F}^{s_0}(W_{\beta})$. Прийти к выводу, что несоответствий не будет; то есть отображение Θ сохраняло бы меру.

Данное упражнение описывает «идеальную» (невозможную) ситуацию. В действительности плотности наших мер могут варьироваться вдоль наших H -компонент, а якобиан голономного отображения может также изменяться и отличаться от единицы. Чтобы поработать с этими явлениями, сначала предположим, без потери общности, что диаметр «специального прямоугольника» $\mathcal{R}_{*}$, построенного в § 7.12, очень мал, так что соответствующие осцилляции плотностей малы (скажем, отношение плотностей в различных точках на той же самой H -компоненте лежит между 0.99 и 1.01), а якобиан голономного отображения принимает значения в узком интервале вокруг единицы, скажем в $[0.99, 1.01]$.

Определим множество $\cup_{\beta} \widetilde{W}_{\beta,1}$ следующим образом. Для каждой H -компоненты $W_{\beta,s_0,j} \subset \mathcal{F}^{s_0}(W_{\beta})$, которая полностью пересекает магнит $\mathfrak{S}$, построим функцию $\tau_{\beta,j}(y)$ на $W_{\beta,s_0,j} \cap \mathfrak{S}$ со значениями в интервале $[0, 0.6]$ и затем полагаем

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\beta,1} = \{ (y, t) \in \widehat{W}_{\beta} : \mathcal{F}^{s_0}(y) \in W_{\beta,s_0,j} \cap \mathfrak{S} \\ \text{и } t \in [0, \tau_{\beta,j}(\mathcal{F}^{s_0}y)] \text{ для некоторого } j \}. \end{aligned}$$

Функции $\tau_{\beta,j}$ можно построить так, чтобы для каждого устойчивого H -многообразия $W_{\mathbb{H}}^s \in \mathfrak{S}$ пересечения $W_{\mathbb{H}}^s \cap \mathcal{F}^{s_0}(\cup_{\alpha} \widetilde{W}_{\alpha,1})$ и $W_{\mathbb{H}}^s \cap \mathcal{F}^{s_0}(\cup_{\beta} \widetilde{W}_{\beta,1})$ несли такую же «величину» мер $\widehat{\mu}_{\mathcal{G}}$ и $\widehat{\mu}_{\mathcal{E}}$ соответственно. Именно по этой причине функции $\tau_{\beta,j}$ нуждаются в некотором пространстве, так что их значения можно отрегулировать соответствующим образом,

и именно поэтому функциям позволено увеличиваться до 0.6 (по сравнению с $\tau_{\alpha,i} \leq 0.5$).

Кроме того, так как плотности мер для стандартных пар динамически непрерывны по Гельдеру (7.11), как и якобиан голономного отображения (предложение 5.48), то функции $\tau_{\beta,j}(y)$ также будут динамически непрерывны по Гельдеру; то есть они удовлетворяют

$$|\ln \tau_{\beta,j}(y) - \ln \tau_{\beta,j}(z)| \leq C_0 \theta^{s_+(y,z)} \quad (7.69)$$

для некоторой постоянной $C_0 > 0$.

Естественным образом определим отображение спаривания $\Theta: \cup_{\alpha} \widetilde{W}_{\alpha,1} \rightarrow \cup_{\beta} \widetilde{W}_{\beta,1}$, которое сохраняет меру и спаривает точки, $\mathcal{F}^{s_0}$ -образы которых лежат на том же самом устойчивом многообразии семейства $\mathfrak{S}$. Заметим, что

$$\widehat{\mu}_{\mathcal{G}}(\cup_{\alpha} \widetilde{W}_{\alpha,1}) = \widehat{\mu}_{\mathcal{E}}(\cup_{\beta} \widetilde{W}_{\beta,1}) = d, \quad (7.70)$$

где постоянная $d = d_0/2$ была введена в (7.68). Наконец, определим значение функции времени спаривания $\Upsilon(x, t) = s_0$ на $\cup_{\alpha} \widetilde{W}_{\alpha,1}$. Это завершает первый шаг нашего построения отображения спаривания Θ .

Перед тем как перейти на второй шаг, необходимо «провести инвентаризацию» оставшихся (неспаренных) частей семейства $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$ и представить их образы в момент s_0 через объединение нескольких прямоугольников. С этой целью определим сначала постоянную функцию $\tau_{\alpha,i}(x)$ на каждой H -компоненте $W_{\alpha,s_0,i}$ образа $\mathcal{F}^{s_0}(W_{\alpha})$, которая полностью пересекает $\mathfrak{S}$ так, что $\tau_{\alpha,i}(x) \equiv \tau_{\alpha,i}$, где $\tau_{\alpha,i}$ — это постоянная, выбранная ранее (перед уравнением (7.68)).

Напротив, функция $\tau_{\beta,j}(y)$, определенная ранее, на канторовом подмножестве $W_{\beta,s_0,j} \cap \mathfrak{S} \subset W_{\beta,s_0,j}$ не будет постоянной. Продолжим ее на всю кривую $W_{\beta,s_0,j}$ с помощью линейной интерполяции (сделаем ее линейной на каждом промежутке $V \subset W_{\beta,s_0,j} \setminus \mathfrak{S}$ и всюду непрерывной). График $\tau_{\beta,j}$ делит прямоугольник $W_{\beta,s_0,j} \times [0, 1]$ на две части («подпрямоугольники», каждый с нерегулярной стороной; см. рис. 7.13).

УПРАЖНЕНИЕ 7.99. Проверить, что функция $\tau_{\beta,j}(y)$ после своего продолжения на $W_{\beta,s_0,j}$ по-прежнему будет динамически непрерывной по Гельдеру в смысле (7.69).

Теперь «несвязанные» множества $\cup_{\alpha} \mathcal{F}^{s_0}(\widehat{W}_{\alpha} \setminus \widetilde{W}_{\alpha,1})$ и $\cup_{\beta} \mathcal{F}^{s_0}(\widehat{W}_{\beta} \setminus \widetilde{W}_{\beta,1})$ состоят из связных компонент трех типов.

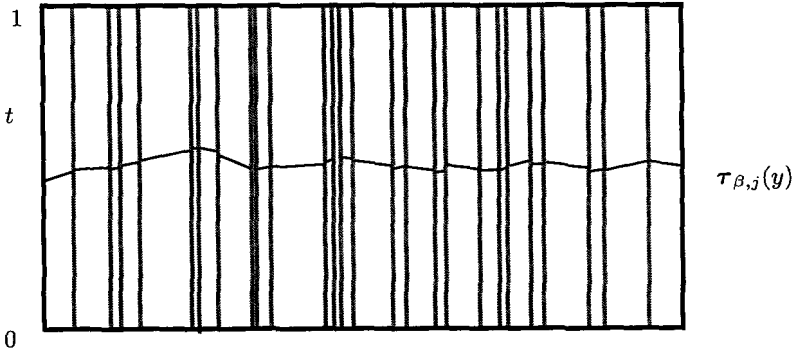


Рис. 7.13. Разбиение прямоугольника над H -компонентой $W_{\beta,s_0,j}$: нерегулярная линия в середине — это график функции $\tau_{\beta,j}(y)$; он отделяет «верхний подпрямоугольник» (второго типа) от нижней трапеции (третьего типа)

Первый тип: прямоугольники, соответствующие H -компонентам $\mathcal{F}^{s_0}(W_\alpha)$ и $\mathcal{F}^{s_0}(W_\beta)$, которые не полностью пересекают магнит $\mathfrak{S}$; они никак не модифицировались.

Второй тип: «верхние подпрямоугольники»

$$\{(x, t): x \in W_{\alpha,s_0,i} \text{ \& } t \in [\tau_{\alpha,i}(x), 1]\} \quad (7.71)$$

и подобные им области

$$\{(y, t): y \in W_{\beta,s_0,j} \text{ \& } t \in [\tau_{\beta,j}(x), 1]\} \quad (7.72)$$

(последние не являются истинными подпрямоугольниками; одна их сторона «рваная», как показано на рис. 7.13). Все эти области (7.71)–(7.72) имеют достаточно длинные основания (длиннее, чем размер специального прямоугольника $\mathfrak{R}_*$ в своем неустойчивом направлении).

Третий тип: «нижние подпрямоугольники»

$$\{(x, t): x \in V \text{ \& } t \in [0, \tau_{\alpha,i}(x)]\},$$

построенные на промежутках $V \subset W_{\alpha,s_0,i} \setminus \mathfrak{S}$, и подобные им области

$$\{(y, t): y \in V' \text{ \& } t \in [0, \tau_{\beta,j}(y)]\},$$

построенные на промежутках $V' \subset W_{\beta,s_0,j} \setminus \mathfrak{S}$ (последние являются трапециями, как показано на рис. 7.13).

Далее мы «поправим» нерегулярные стороны прямоугольников второго и третьего типа с помощью простого алгоритма: он состоит в растягивании каждого вертикального (то есть параллельного оси t) волокна внутри каждого прямоугольника. Точнее говоря, для заданного «прямоугольника» $\widehat{W}_1 = \{(x, t) : x \in W \text{ \& } t \in [0, \tau(x)]\}$, где W — это неустойчивая кривая и $\tau(x) : W \rightarrow [0, 1]$ — это непрерывная функция, снабженная вероятностной мерой $d\widehat{\nu}(x, t) = \rho(x) dx dt$, преобразуем интервал $[0, \tau(x)]$ на единичный интервал $[0, 1]$ линейно в каждой точке $x \in W$ и, таким образом, получим прямоугольник полной высоты $\widetilde{W} = W \times [0, 1]$ с мерой

$$d\widehat{\nu}_1(x, t) = \rho_1(x) dx dt, \quad \rho_1(x) = \tau(x) \rho(x). \quad (7.73)$$

Напомним, что «функция потолка» $\tau(x)$ динамически непрерывна по Гельдеру для прямоугольников второго и третьего типов (ср. с (7.69) и упражнением 7.99), и такой же будет любая регулярная плотность $\rho(x)$ согласно (7.11). Следовательно, новая плотность $\rho_1(x)$, определенная в (7.73), также будет динамически непрерывной по Гельдеру, а именно:

$$|\ln \rho_1(x) - \ln \rho_1(y)| \leq (C_0 + C_r) \theta^{s+(x,y)}. \quad (7.74)$$

Безусловно, постоянная $C = C_0 + C_r$ больше, чем C_r в (7.11), так что плотность $\rho_1(x)$ не обязана быть регулярной. Но ее образы сглаживаются и становятся регулярными достаточно быстро.

УПРАЖНЕНИЕ 7.100. Показать, что существует постоянная $m_0 \geq 1$ такая, что кривая W с плотностью $\rho_1(x)$ на ней, как определено в (7.73), будет преобразована $\mathcal{F}^{m_0}$ в H -компоненты, на которых порожденные плотности будут регулярны. Указание: использовать ограничения на искажения из § 5.6 и напомним, что C_r в (7.11) предполагается достаточно большим. В действительности, делая в случае необходимости C_r больше, даже можно гарантировать, что $m_0 = 1$; то есть плотности регуляризируются сразу же.

Таким образом, оставшиеся (несвязанные) множества

$$\cup_{\alpha} \mathcal{F}^{s_0}(\widehat{W}_{\alpha} \setminus \widetilde{W}_{\alpha,1}) \quad \text{и} \quad \cup_{\beta} \mathcal{F}^{s_0}(\widehat{W}_{\beta} \setminus \widetilde{W}_{\beta,1}) \quad (7.75)$$

являются объединениями прямоугольников полной (единичной) высоты. Обозначим семейства этих прямоугольников через $\widehat{\mathcal{G}}_1 = \{\widehat{W}_{\alpha,1}\}$ и $\widehat{\mathcal{E}}_1 = \{\widehat{W}_{\beta,1}\}$ соответственно. (Заметим, что $\mathcal{F}^{s_0}$ -образ «старого прямоугольника» $\widehat{W}_{\alpha}$ может содержать счетное число «новых» прямоугольников $\widehat{W}_{\alpha,1}$. Таким образом, необходимо переиндексировать наши семейства, так что

новые индексы α и β могут не соответствовать старым индексам, используемым для оригинального семейства $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$, но это не страшно.)

Таким образом, получаем два новых семейства $\widehat{\mathcal{G}}_1$ и $\widehat{\mathcal{E}}_1$, каждое несет меру, порожденную $\mathcal{F}^{s_0}$ -образом оригинальной меры ($\widehat{\mu}_{\mathcal{G}}$ или $\widehat{\mu}_{\mathcal{E}}$). Согласование порожденных мер на новых семействах $\widehat{\mathcal{G}}_1$ и $\widehat{\mathcal{E}}_1$ дает две вероятностные меры на них, которые назовем $\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{G}}_1}$ и $\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{E}}_1}$ соответственно. Плотности новых мер $\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{G}}_1}$ и $\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{E}}_1}$ могут быть не регулярны, но их образы становятся регулярными всего лишь за $\leq m_0$ итераций на $\mathcal{F}$ (или даже через один шаг; см. упражнение 7.100), так что на это небольшое неудобство можно не обращать внимание.

Главная сложность, как говорилось в § 7.13, состоит в том, что новые семейства $\widehat{\mathcal{G}}_1$ и $\widehat{\mathcal{E}}_1$ могут не быть собственными, так как они содержат огромное число произвольно малых прямоугольников третьего типа, созданных в промежутках магнита $\mathcal{S}$. Безусловно, если определить меры $\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{G}}_1}$ и $\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{E}}_1}$ на объединении прямоугольников первого и второго типов, то, таким образом, приведенные семейства (хотя и не обязательно собственные) будут, очевидно, восстанавливаться и станут собственными стандартными семействами всего лишь за несколько итераций $\mathcal{F}$. Проверка этого простого факта остается читателю. Можно предположить, что прямоугольники первого и второго типа уже образуют собственное стандартное семейство.

Однако на прямоугольниках третьего типа время восстановления может варьироваться серьезным образом согласно § 7.13. Определим функцию времени остановки $s_1(x, t)$ на прямоугольниках третьего типа, как описано в предложении 7.95. Функция s_1 принимает значения в $\mathbb{N}$, является постоянной на каждом прямоугольнике и соответствует времени, когда образ прямоугольника становится собственным стандартным семейством плюс дополнительно n_0 итераций $\mathcal{F}$.

Также необходимо определить функцию времени остановки s_1 на прямоугольниках первого и второго типов, так что она принимает значения в $\mathbb{N}$, постоянна на каждом прямоугольнике и ее общее распределение на *всех* прямоугольниках согласовано с распределением, описанном в предложении 7.95; то есть

$$\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{G}}_1}(\cup_{\alpha} \widehat{W}_{\alpha,1} : s_1 = n) = q_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (7.76)$$

и

$$\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{E}}_1}(\cup_{\beta} \widehat{W}_{\beta,1} : s_1 = n) = q_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (7.77)$$

с той же самой последовательностью $\{q_n\}$, как и в (7.65)–(7.66).

Для того чтобы определить такую функцию s_1 и гарантировать (7.76) и (7.77), нам может потребоваться разделить несколько прямоугольников $\widehat{W}_{\alpha,1}$ и $\widehat{W}_{\beta,1}$ первого и второго типов на «более тонкие» подпрямоугольники, как мы делали это в доказательстве предложения 7.95, и определим s_1 отдельно на каждом подпрямоугольнике. Если читатель разобрался с доказательством предложения 7.95, это будет несложной задачей, и мы оставляем ее читателю.

Теперь мы в нахождении в положении, очень похожем на положение, в котором мы были в начале этого раздела. Для каждого прямоугольника $\widehat{W}_{\alpha,1}$ множество $\mathcal{F}^{s_1}(\widehat{W}_{\alpha,1})$ с порожденной мерой будет собственным семейством, содержащим H -компоненты, полностью пересекающие магнит $\mathfrak{S}$, и их пересечения с $\mathfrak{S}$ будут иметь относительную меру $\geq d_0$ благодаря следствию 7.84:

$$\frac{\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{G}}_1}(\widehat{W}_{\alpha,1,s_1,*})}{\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{G}}_1}(\widehat{W}_{\alpha,1})} \geq d_0 \quad \text{и} \quad \frac{\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{E}}_1}(\widehat{W}_{\beta,1,s_1,*})}{\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{E}}_1}(\widehat{W}_{\beta,1})} \geq d_0 \quad (7.78)$$

для каждого α и β , в обозначениях (7.57)–(7.58). Заметим, что s_1 постоянна на каждом прямоугольнике $\widehat{W}_{\alpha,1}$ и $\widehat{W}_{\beta,1}$, так что эти обозначения имеют смысл.

Очевидно, величина s_1 в (7.78) зависит от α (или β). В дальнейшем сгруппируем прямоугольники $\widehat{W}_{\alpha,1}$ и $\widehat{W}_{\beta,1}$, на которых функция s_1 принимает одинаковое значение. В частности, имеем

$$\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{G}}_1}(\cup_{\alpha} \widehat{W}_{\alpha,1,s_1,*} : s_1 = n) \geq d_0 \widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{G}}_1}(\cup_{\alpha} \widehat{W}_{\alpha,1} : s_1 = n) = d_0 q_n \quad (7.79)$$

и, аналогично,

$$\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{E}}_1}(\cup_{\beta} \widehat{W}_{\beta,1,s_1,*} : s_1 = n) \geq d_0 \widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{E}}_1}(\cup_{\beta} \widehat{W}_{\beta,1} : s_1 = n) = d_0 q_n \quad (7.80)$$

как следствие (7.76)–(7.78).

Далее, для каждого $n \geq 1$ вновь рассмотрим все прямоугольники $\{\widehat{W}_{\alpha,1}\}$ и $\{\widehat{W}_{\beta,1}\}$, на которых функция s_1 принимает значение n . Их образы в момент времени n содержат H -компоненты, которые полностью пересекают магнит $\mathfrak{S}$, и относительная мера их пересечений с $\mathfrak{S}$ будет $\geq d_0$, как следует из (7.79)–(7.80). В этот момент применяется процедура спаривания, описанная на первом шаге, и затем сцепляем («спариваем») их подмножества относительной меры $d = d_0/2$ в соответствии с (7.70), так что

$$\widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{G}}_1}(\widehat{\mathcal{G}}_2^{(n)}) = \widehat{\mu}_{\widehat{\mathcal{E}}_1}(\widehat{\mathcal{E}}_2^{(n)}) = dq_n, \quad (7.81)$$

где

$$\widehat{\mathcal{G}}_2^{(n)} := \{(x, t) \in \cup_{\alpha} \widehat{W}_{\alpha, 1, s_1, *}: s_1 = n \text{ \& } \mathcal{F}^n(x, t) \text{ связано}\}$$

и

$$\widehat{\mathcal{E}}_2^{(n)} := \{(y, t) \in \cup_{\beta} \widehat{W}_{\beta, 1, s_1, *}: s_1 = n \text{ \& } \mathcal{F}^n(y, t) \text{ связано}\}.$$

Второй шаг построения заключается в применении этой процедуры для всех $n \geq 1$. Обозначим через

$$\widehat{\mathcal{G}}_2 = \cup_n \mathcal{F}^{-s_0}(\widehat{\mathcal{G}}_2^{(n)}) \quad \text{и} \quad \widehat{\mathcal{E}}_2 = \cup_n \mathcal{F}^{-s_0}(\widehat{\mathcal{E}}_2^{(n)})$$

прообразы всех подмножеств, «спаренных» во время второго шага построения. Заметим, что $\widehat{\mathcal{G}}_2 \subset \widehat{\mathcal{G}}$ и $\widehat{\mathcal{E}}_2 \subset \widehat{\mathcal{E}}$. Отображение спаривания Θ , таким образом, продолжается на $\Theta: \widehat{\mathcal{G}}_2 \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}_2$. Определим также функцию времени спаривания Υ на множестве $\widehat{\mathcal{G}}_2$:

$$\Upsilon(x, t) = s_0(x, t) + s_1(\mathcal{F}^{s_0}(x, t)).$$

Теперь должно быть очевидным, как продолжается построение отображения спаривания при рекурсивном повторении шагов.

7.15. Экспоненциальная оценка хвоста

В заключение докажем утверждение В леммы спаривания 7.24. Из него также будет следовать, что отображение спаривания Θ , построенное в § 7.14, определено почти везде на стандартном семействе $\widehat{\mathcal{G}}$.

Сначала подытожим результаты построений, сделанные в предыдущем параграфе. Для каждого $k \geq 1$ на k -ом шаге определим функцию времени остановки s_{k-1} на множествах $\cup_{\alpha} \widehat{W}_{\alpha, k-1}$ и $\cup_{\beta} \widehat{W}_{\beta, k-1}$ еще не связанных точек. Затем «спариваем» несколько точек их образов $\cup_{\alpha} \mathcal{F}^{s_{k-1}}(\widehat{W}_{\alpha, k-1})$ и $\cup_{\beta} \mathcal{F}^{s_{k-1}}(\widehat{W}_{\beta, k-1})$. Затем обозначим через $\widehat{\mathcal{G}}_k$ и $\widehat{\mathcal{E}}_k$ прообразы только что «спаренных» подмножеств на оригинальных семействах $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$. Наконец, продолжим функцию времени спаривания Υ на множество $\widehat{\mathcal{E}}_k$:

$$\Upsilon(z) = s_0(z) + s_1(\mathcal{F}^{s_0} z) + \dots + s_{k-1}(\mathcal{F}^{s_0 + \dots + s_{k-2}} z),$$

где $z = (x, t) \in \widehat{\mathcal{G}}_k$. Заметим, что точка $\mathcal{F}^{\Upsilon(z)}(z)$ и ее партнер $\mathcal{F}^{\Upsilon(z)}(\Theta(z))$ лежат на одном и том же устойчивом Н-многообразии, что доказывает утверждение А леммы 7.24 (в предположении, что Θ определена почти везде).

Далее перепишем соотношения для «меры» (7.76)–(7.77) и (7.81) для k -го шага. Для краткости отождествим множество $\widehat{\mathcal{G}}_k$ и $\widehat{\mathcal{E}}_k$ с их образами; то есть рассмотрим все функции времени остановки, как если бы они были определены на оригинальных семействах $\widehat{\mathcal{G}}$ и $\widehat{\mathcal{E}}$. Затем (7.76)–(7.77) обобщаются в следующую формулу «условной вероятности»:

$$\widehat{\mu}_{\mathcal{Y}}(\mathbf{s}_k = n / \mathbf{s}_{k-1} = n_{k-1}, \dots, \mathbf{s}_1 = n_1, \mathbf{s}_0 = n_0) = q_n, \quad (7.82)$$

где $\mathcal{Y} = \mathcal{G}$ или $\mathcal{E}$; а (7.81) обобщаются до другой формулы «условной вероятности»:

$$\widehat{\mu}_{\mathcal{Y}}(\widehat{\mathcal{Y}}_k / \mathbf{s}_{k-1} = n_{k-1}, \dots, \mathbf{s}_1 = n_1, \mathbf{s}_0 = n_0) = d, \quad (7.83)$$

где вновь $\mathcal{Y} = \mathcal{G}$ или $\mathcal{E}$ (заметим, что необходимо провести деление на q_n).

Следующее доказательство стандартно при изучении случайных блужданий (но здесь не предполагается, что читатель должен быть знаком с этой теорией). Пусть

$$\bar{p}_n := \widehat{\mu}_{\mathcal{G}}((x, t) \in \cup_{\alpha} \widehat{W}_{\alpha} : \Upsilon(x, t) = n) \quad (7.84)$$

обозначает отношение точек, связанных точно в момент n (то есть на n -ой итерации $\mathcal{F}$, а не на n -ом шаге нашего построения). Например, $\bar{p}_i = 0$ для $i < n_0$ и $\bar{p}_{n_0} = d$. Тогда, как следствие (7.83),

$$p_n := \bar{p}_n / d$$

будет отношением точек, *остановленных* в момент n , то есть

$$p_n = \widehat{\mu}_{\mathcal{G}}((x, t) \in \cup_{\alpha} \widehat{W}_{\alpha} : \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_1 + \dots + \mathbf{s}_k = n \text{ для некоторого } k).$$

Благодаря (7.82) и (7.83) справедлив следующий «закон свертки»:

$$p_{n+n_0} = (1-d) \left(q_n + (1-d) \sum_{i=1}^{n-1} q_{n-i} p_{n_0+i} \right) \quad \forall n \geq 1. \quad (7.85)$$

Данный закон устанавливается непосредственным вычислением и остается читателю в качестве упражнения.

Рассмотрим две комплексные аналитические функции:

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n_0+n} z^n \quad \text{и} \quad Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n.$$

Так как $|p_n| \leq 1$ и $|q_n| \leq 1$, эти функции определены по крайней мере на открытом единичном диске $\{z: |z| < 1\}$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Кроме того, несложно показать, что из (7.66) следует $|Q(z)| \leq 1$ для всех $|z| \leq 1$ и что функция $Q(z)$ аналитическая в немного большем комплексном диске $\{z: |z| < \theta^{-1}\}$; здесь $\theta^{-1} > 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.101. Проверить, что из (7.85) вытекает соотношение

$$P(z) = (1-d)Q(z) + (1-d)^2 P(z)Q(z).$$

Благодаря предыдущему упражнению имеем

$$P(z) = \frac{(1-d)Q(z)}{1 - (1-d)^2 Q(z)}. \quad (7.86)$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.102. Доказать, что $P(z)$ аналитическая в некотором комплексном диске, радиус которого больше, чем единица; то есть в $\{z: |z| < 1 + \delta\}$ для некоторого $\delta > 0$. Заметим: необходимо показать, что знаменатель (7.86) не обращается в нуль в окрестности единичного диска.

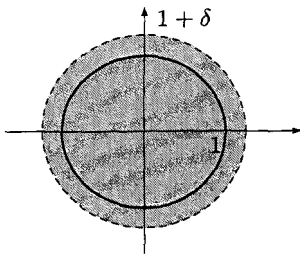


Рис. 7.14. Область аналитичности $P(z)$

Так как $P(z)$ аналитическая в диске $\{z: |z| < 1 + \delta\} \subset \mathbb{C}$, получим экспоненциальную оценку хвоста для p_n :

$$|p_n| \leq \text{const}(1 + \delta')^{-n}$$

для любого $\delta' < \delta$. Аналогичная оценка следует для величины $\bar{p}_n = d p_n$, введенной в (7.84). Лемма спаривания 7.24 теперь доказана. ■

ГЛАВА 8

Биллиарды Бунимовича

8.1. Введение

Напомним, что граница типичного бильярдного стола состоит из кривых одного из трех типов: рассеивающая (вогнутая), фокусирующая (выпуклая) и плоская; см. § 2.1. В предыдущих главах мы увидели, что бильяарды, имеющие только рассеивающие границы, чрезвычайно хаотичны¹: гиперболические, эргодические, перемешивающие и бильяарды Бернулли. Они также имеют положительную энтропию и хорошие статистические свойства.

Бильяарды, имеющие только плоские границы, то есть многоугольники, не могут быть гиперболическими: все их показатели Ляпунова равны нулю (упр. 3.21); следовательно, и их энтропия обращается в нуль (что следует из общих результатов § 3.12). Замечательно, что, тем не менее, многоугольные бильяарды в общем случае являются эргодическими [KMS86], и это кажется необычным. Даже являясь эргодическими, они не демонстрируют хаотического поведения. Остается неизвестным, могут ли многоугольные бильяарды быть перемешивающими, но, по нашему мнению, это очень маловероятно. В любом случае многоугольные бильяарды образуют очень специфический класс, их подробное рассмотрение выходит за рамки этой книги.

Что можно сказать о бильяардах, имеющих только выпуклые границы? В главе 1 мы узнали, что бильяарды в двух простейших выпуклых областях — окружностях и эллипсах — абсолютно регулярны. А именно, почти каждая бильяардная траектория в окружности и эллипсе имеет каустик и, таким образом, лежит на одномерной инвариантной кривой в пространстве столкновений.

Более того, в 1793 году Лазуткин [La73] доказал, что бильяарды в типичных строго выпуклых областях с гладкой границей имеют каустики

¹Мы доказали это только для категорий А и В, но наиболее важные хаотические свойства (эргодичность и свойство Бернулли) имеют место и для остальных категорий.

(то есть траектории с каустиками образуют множество положительной меры в пространстве столкновений); следовательно, они не могут быть эргодическими. Представляется, таким образом, что хаос не может образовываться в случае фокусирующих (выпуклых) границ — или, по крайней мере, для того, чтобы имел место хаос, фокусирующие границы должны иметь очень специальный вид. И с момента открытия Синаем рассеивающих билиардов в 1970 году они остались на несколько лет единственным известным классом хаотических билиардов.

Большим сюрпризом было то, что в середине 1970-х студент Синая Л. Бунимович [Bu74a, Bu74b, Bu79] построил хаотические билиарды, границы которых были фокусирующими и состояли только из дуг окружности! (Что может быть проще дуг окружности?) Билиарды Бунимовича рассматриваются в этой главе.

8.2. Механизм дефокусировки

Сначала опишем идею, стоящую за построениями Бунимовича. Напомним, что рассеивающиеся (расходящиеся) волновые фронты растут (расширяются), в то время как фокусирующиеся (сходящиеся) волновые фронты сжимаются (сокращаются); ср. § 3.7. В рассеивающих билиардах рассеивающиеся волновые фронты остаются рассеивающимися и в будущем (лемма 4.11); следовательно, они монотонно растут во времени (лемма 4.14). Это, по существу, гарантирует существование положительных показателей Ляпунова и в конечном счете гиперболичность динамики.

В билиардах с фокусирующими границами рассеивающийся волновой фронт, как правило, рано или поздно становится фокусирующимся (вспомним для примера упр. 3.32); таким образом, не существует класса волновых фронтов, которые росли бы монотонно все время. Однако нас интересует лишь гиперболичность отображения столкновений $\mathcal{F}$, поэтому важен лишь размер волнового фронта *во время столкновения* (то, что происходит между столкновениями, не имеет значения). Таким образом, нам нужно найти волновые фронты, которые растут «от столкновения к столкновению».

Используя обозначения § 3.6–3.7, положим $X \in \Omega$ — точка, а $(0, d\xi, d\omega) \in T_X^\perp \Omega$ — касательный вектор. Касательный вектор определяет бесконечно малый волновой фронт, проходящий через точку X . Обозначим его образ в момент времени t как $(0, d\xi_t, d\omega_t) = D\Phi^t(0, d\xi, d\omega)$. Напомним, что $|d\xi_t|$ зависит от t непрерывно, а $|d\omega_t|$ остается постоянным между двумя столкновениями и меняется скачком в момент столкновения; см. (3.25) и (3.27).

Предположим, что траектория точки X испытывает два последовательных столкновения с границей $\partial\mathcal{D}$ в моменты времени t и $t + \tau$. Тогда из (3.35) следует

$$\frac{|d\xi_{t+\tau}|}{|d\xi_t|} = |1 + \tau\mathcal{B}^+|,$$

где $\mathcal{B}^+ = d\omega_{t+0}/d\xi_t$ — кривизна волнового фронта сразу же после столкновения (в момент времени t).

Волновой фронт расширяется «от столкновения к столкновению», если $|1 + \tau\mathcal{B}^+| > 1$, что может иметь место в двух случаях:

$$\tau\mathcal{B}^+ > 0 \quad \text{или} \quad \tau\mathcal{B}^+ < -2. \quad (8.1)$$

Первое условие соответствует рассеивающемуся волновому фронту, а второй — фокусирующемуся волновому фронту. Таким образом, фокусирующийся волновой фронт расширяется «от столкновения к столкновению» при условии

$$\mathcal{B}^+ < -2/\tau. \quad (8.2)$$

Напомним, что фокусирующийся волновой фронт с кривизной $\mathcal{B}_t < 0$ проходит через точку фокусировки и дефокусируется в момент времени $t^* = t - 1/\mathcal{B}_t$; см. § 3.8.

УПРАЖНЕНИЕ 8.1. Проверьте, что (8.2) равносильно условию $t^* < t + \tau/2$; то есть фронт должен дефокусироваться до того, как достигнет середины пути до следующего столкновения. Используйте также (3.31), чтобы проверить, что $\mathcal{B}_s > 0$ при $s \in (t + t^*, t + \tau)$; то есть после прохождения точки фокусировки фронт становится и остается рассеивающим.

Геометрически фокусирующийся волновой фронт сжимается между первым столкновением в момент времени t и точкой фокусировки, соответствующей моменту времени t^* ; затем фронт начинает и продолжает расширяться до следующего столкновения в момент времени $t + \tau$. Так как расширение длится дольше, чем сжатие, фронт не только достигает своего первоначального размера, но и несколько увеличивается сверх того. Это явление, проиллюстрированное на рис. 8.1, называется *механизмом дефокусировки*.

Остается убедиться в том, что для определенного класса волновых фронтов механизм дефокусировки будет продолжать работать на протяжении всех столкновений и бильярдное отображение $\mathcal{F}$, таким образом, будет гиперболическим. Это будет сделано в следующем разделе.

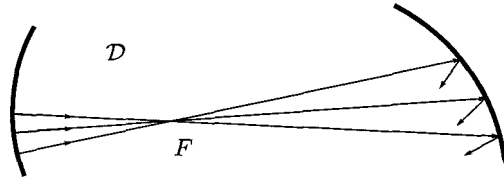


Рис. 8.1. Фокусирующий фронт дефокусируется в точке F и растет вплоть до следующего столкновения

8.3. Столы Бунимовича

С этого момента будем предполагать, что каждый фокусирующий участок границы нашего бильярдного стола D представляет собой дугу окружности, но не целую окружность (также допускается, что ∂D имеет рассеивающие и/или плоские участки).

Пусть $\Gamma_i \subset \partial D$ — фокусирующая дуга радиуса $r > 0$, и пусть волновой фронт совершает несколько последовательных столкновений с границей Γ_i в моменты времени $t_n = t + n\tau$, где $n = 0, 1, \dots, m$. Можно заметить, что угол столкновения φ и время между столкновениями $\tau = 2r \cos \varphi$ остаются постоянными все время в данной серии столкновений; см. рис. 8.2.

Пусть B_n^+ — кривизна нашего волнового фронта сразу же после n -ого столкновения. Согласно (3.33)

$$B_{n+1}^+ = \mathcal{R} + \frac{1}{\tau + 1/B_n^+} = -\frac{2}{r \cos \varphi} + \frac{1}{2r \cos \varphi + 1/B_n^+}$$

(заметим, что кривизна дуги $\mathcal{K} = -1/r$ отрицательна согласно нашим условиям; см. гл. 2.1).

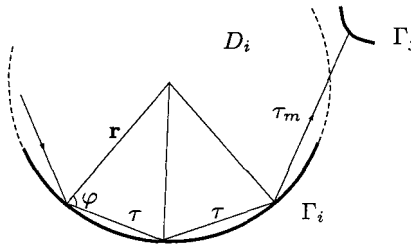


Рис. 8.2. Серия отражений от фокусирующих дуг окружности Γ_i (здесь $m = 2$)

УПРАЖНЕНИЕ 8.2. Предположим, что условие расширения (8.2) выполняется при первом столкновении в момент времени t_0 , то есть $B_0^+ < -2/\tau$. Проверьте, что $B_1^+ < -2/\tau$. Следовательно, по индукции, $B_n^+ < -2/\tau$ для всех $n = 0, 1, \dots, m$.

Таким образом, условие расширения (8.2) автоматически распространяется на всю цепочку последовательных столкновений с фокусирующей дугой окружности.

Далее, предположим, что наш волновой фронт покидает дугу Γ_i в момент времени t_m и направляется к другому участку границы Γ_j . Обозначим через $t_{m+1} > t_m$ время первого столкновения с Γ_j . Тогда условие расширения (8.2) при последнем столкновении с Γ_i будет иметь вид $B_m^+ < -2/\tau_m$, где $\tau_m = t_{m+1} - t_m$ — (новое) время между столкновениями; см. рис. 8.2. Напомним, что $B_m^+ < -2/\tau$ (упр. 8.2). Чтобы гарантировать, что $B_m^+ < -2/\tau_m$, мы должны предположить, что $\tau_m \geq \tau$; то есть точка столкновения с Γ_j лежит вне открытого диска D_i , граница которого содержит дугу Γ_i (см. рис. 8.2).

Если мы хотим построить бильярдный стол с гиперболическим поведением, то свойство, указанное выше, должно выполняться для любой бильярдной траектории, покидающей Γ_i . Таким образом, мы должны предположить, что открытый диск D_i не пересекает никакого другого участка границы ∂D , то есть $D_i \subset D$. Другими словами, дуга Γ_j может быть построена до диска, лежащего в D . Это свойство будет ключевым, характеризующим свойством бильярдов Бунимовича, которое мы будем называть *Б-условием*.

Далее, проверим свойство расширения (8.1) для последующих столкновений (с Γ_j). Если участок Γ_j рассеивающий или плоский, тогда падающий рассеивающийся волновой фронт остается рассеивающимся после столкновения, таким образом, первое условие (8.1) будет выполнено.

Предположим, что Γ_j — снова фокусирующий участок границы; тогда это дуга окружности некоторого радиуса $r' > 0$. При первом столкновении с Γ_j кривизна волнового фронта преобразуется в соответствии с формулой

$$B_{m+1}^+ = -\frac{2}{r' \cos \varphi'} + \frac{1}{\tau_m + 1/B_m^+},$$

где φ' — соответствующий угол столкновения. Условие расширения (8.2) теперь принимает вид $B_{m+1}^+ < -2/\tau_{m+1}$, где $\tau_{m+1} = t_{m+2} - t_{m+1}$ — следующее время между столкновениями.

УПРАЖНЕНИЕ 8.3. Напомним, что (8.2) имеет место для последнего столкновения с Γ_i , то есть $B_m^+ < -2/\tau_m$. Покажите, что если $\tau_m \geq 2r' \cos \varphi'$ и $\tau_{m+1} \geq 2r' \cos \varphi'$, то $B_{m+1}^+ < -2/\tau_{m+1}$.

Это упражнение подтверждает, что условие расширения (8.2) будет распространяться от столкновений с Γ_i к столкновениям со следующей дугой Γ_j , если для последней также выполняется Б-условие.

Определение 8.4. Будем говорить, что $\mathcal{D}$ — *бильiardный стол Бунимовича*, если каждый фокусирующий участок границы $\Gamma_i \subset \partial\mathcal{D}$ является дугой окружности (но не целой окружностью), которая удовлетворяет Б-условию.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.5. Возможна ситуация, когда две или более фокусирующие дуги $\Gamma_i \subset \partial\mathcal{D}$ лежат на одной окружности, но не допускаются, чтобы они покрывали всю окружность.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.6. Если угловая точка стола Бунимовича образуется двумя смежными участками границы и один из них (или оба) являются дугами окружности, то внутренний угол $\geq \pi$.

Примеры столов Бунимовича показаны на рис. 8.3.

8.4. Гиперболичность

В предыдущем разделе, пытаясь придать гиперболические свойства отображению столкновений $\mathcal{F}$, мы определили класс столов с фокусиру-

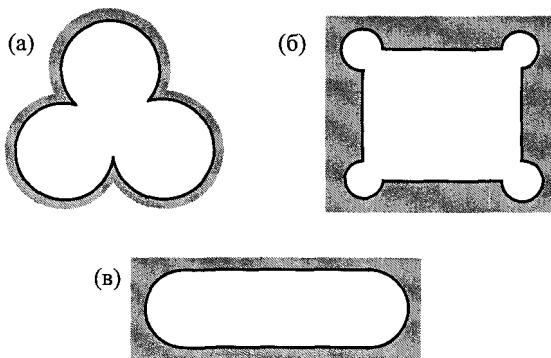


Рис. 8.3. Бильiardные столы Бунимовича: (а) «цветок», (б) «стол с карманами», (в) «стадион»

ющими участками границы, в которых волновые фронты остаются расширяющимися от столкновения к столкновению. Здесь мы докажем, что получающееся билиардное отображение $\mathcal{F}$ на самом деле является гиперболическим.

Удобно заменить (8.1) несколько более сильным условием. Предположим, что бесконечно малый волновой фронт сталкивается с границей $\partial\mathcal{D}$ в точке $x = (r, \varphi)$. Обозначим кривизны фронта до и после столкновения B^- и B^+ соответственно. Фронт порождает касательную линию $L \subset T_x\mathcal{M}$ (см. § 3.10), наклон которой $\mathcal{V} = d\varphi/dr$ выражается с помощью формулы (3.39):

$$\mathcal{V} = B^- \cos \varphi + \mathcal{K} = B^+ \cos \varphi - \mathcal{K}, \quad (8.3)$$

где $\mathcal{K}$ обозначает кривизну границы $\partial\mathcal{D}$ в точке x .

Определение 8.7. Мы говорим, что отражающийся волновой фронт и соответствующий касательный вектор *неустойчивы*, если $B^- > 0$, когда $\mathcal{K} > 0$, и

$$B^- \in \left(0, \frac{1}{r \cos \varphi}\right), \quad (8.4)$$

когда $\mathcal{K} = -1/r < 0$.

Обозначим через $C_x^u \subset T_x\mathcal{M}$ неустойчивый конус в точке $x \in \mathcal{M}$, то есть замыкание множества всех неустойчивых касательных векторов:

$$C_x^u \{(dr, d\varphi) \in T_x\mathcal{M} : \mathcal{K} \leq d\varphi/dr \leq \infty\}$$

для рассеивающих и плоских участков границы и

$$C_x^u \{(dr, d\varphi) \in T_x\mathcal{M} : -1/r \leq d\varphi/dr \leq 0\}$$

для фокусирующих дуг.

УПРАЖНЕНИЕ 8.8. Проверьте, что для билиардных столов Бунимовича неустойчивые волновые фронты удовлетворяют условию расширения (8.1). Другими словами, для рассеивающих и плоских участков границы из условия $B^- > 0$ следует $B^+ > 0$, а для фокусирующих дуг из (8.4) следует (8.2).

Теорема 8.9. Пусть $\mathcal{D}$ — билиардный стол Бунимовича. Тогда семейство C_x^u неустойчивых конусов инвариантно относительно $D\mathcal{F}$. Иначе говоря, неустойчивый волновой фронт остается неустойчивым в течение всей последовательности столкновений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства того, что $D\mathcal{F}(C_x^u) \subset C_{\mathcal{F}(x)}^u$, мы должны рассмотреть четыре случая, так как каждая из точек $x = (r, \varphi)$ и $x_1 = (r_1, \varphi_1)$ может принадлежать как фокусирующей дуге, так и рассеивающему/плоскому участку границы. Мы рассмотрим лишь самый нетривиальный случай, когда обе точки лежат на фокусирующих дугах. Обозначим их радиусы r и r_1 (если они лежат на одной дуге, то $r_1 = r$). Из Б-условия следует, что время между столкновениями τ удовлетворяет условию

$$\tau \geq 2 \max\{r \cos \varphi, r_1 \cos \varphi_1\}. \quad (8.5)$$

Тогда кривизна нашего фронта перед столкновением в точке x_1

$$\mathcal{B}_1^- = \frac{1}{\tau + 1/\mathcal{B}^+} < \frac{1}{\tau - \tau/2} \leq \frac{1}{r_1 \cos \varphi_1},$$

так как $1/\mathcal{B}^+ \in (-\tau/2, 0)$ согласно упр. 8.8. Остальные три случая мы предоставляем читателю. ■

Таким образом, мы имеем семейство конусов, инвариантных относительно $D\mathcal{F}$. Однако отсюда еще не следует гиперболичность. Действительно, сформулированная теорема применима и к круговым билиардам, которые вовсе не являются гиперболическими. Значит, мы можем иметь инвариантное семейство конусов в отсутствие гиперболичности; см. § 3.13. Для гиперболичности требуется, чтобы поле конусов было строго инвариантным, по крайней мере, с некоторого момента времени; см. замечание 3.53.

В билиардах Бунимовича строгая инвариантность неустойчивых конусов, то есть свойство

$$D\mathcal{F}(C_x^u) \subset \text{int } C_{\mathcal{F}(x)}^u, \quad (8.6)$$

имеет место в двух случаях.

Случай 1. Точка x принадлежит рассеивающему участку границы.

Случай 2. Точка x принадлежит фокусирующему участку Γ_i , а ее образ $\mathcal{F}(x)$ принадлежит либо рассеивающему, либо плоскому участку границы, либо фокусирующей дуге Γ_j , которая лежит на окружности, отличной от окружности Γ_i (см. замечание 8.5).

УПРАЖНЕНИЕ 8.10. Проверьте строгую инвариантность в двух названных случаях. Указание: используйте прямую проверку, идущую немного дальше доказательства теоремы 8.9.

Соответственно, мы введем понятие *существенных столкновений*.

Определение 8.11. Столкновение в точке $x \in M$ называется *существенным*, если оно имеет место либо на рассеивающем участке границы, либо на фокусирующей дуге окружности, но в этом случае либо предыдущее столкновение, $\mathcal{F}^{-1}(x)$, либо последующее, $\mathcal{F}(x)$, имеет место на любом участке границы, за исключением дуги на той же окружности.

Теперь необходимо проверить, что почти все траектории бильярдных столов Бунимовича действительно содержат существенные столкновения. Если это так, то мы имеем гиперболичность.

УПРАЖНЕНИЕ 8.12. Покажите, что если почти все траектории содержат существенное столкновение, то для почти всех траекторий существенные столкновения происходят с положительной частотой. Другими словами, если m_n обозначает количество существенных столкновений среди первых n столкновений, то $\liminf_{n \rightarrow \infty} m_n/n > 0$. Указание: используйте функцию «частоты посещения»; см. приложение В.

Простой геометрический анализ показывает, что существует два типа («негиперболических») траекторий, не содержащих существенных столкновений. Мы опишем их ниже.

Тип А. Траектории, которые содержат только отражения от фокусирующих участков, лежащих на одной окружности.

Тип Б. Траектории, которые содержат только столкновения с плоскими участками границы.

УПРАЖНЕНИЕ 8.13. Покажите, что каждая траектория типа А является периодической, а все такие траектории образуют множество меры нуль. Указание: используйте результаты § 1.1.

Относительно траекторий типа Б остается открытой (и требующей решения) задача доказательства того факта, что они образуют множество меры нуль. Конечно, это задача тесно связана с многоугольными бильярдными столами. Частичное решение получено в [GKT95]:

Теорема 8.14. Если ∂D — выпуклый связный многоугольник, то для каждой точки $x \in M$ либо $\mathcal{F}^n(x) = x$ (периодическая траектория), либо замыкание множества $\{\mathcal{F}^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ содержит по крайней мере одну вершину многоугольника.

Хотя мы не знаем, образуют ли в общем случае траектории типа Б множество меры нуль, это условие может быть легко проверено для столов частного вида. Например, дело обстоит так, если бильярдный стол имеет только один плоский участок границы (или не имеет их вовсе);

см. рис. 8.3 (а). То же можно сказать в том случае, если имеется ровно два параллельных плоских участка границы (см. рис. 8.3 (в)) или две взаимоперпендикулярные пары параллельных плоских участков границы (см. рис. 8.3 (б)).

Подведем итог нашему разговору.

Теорема 8.15. Пусть $\mathcal{D}$ — бильярдный стол Бунимовича. Предположим, что траектории типа Б образуют множество меры нуль. Тогда бильярдное отображение $\mathcal{F}$ является гиперболическим.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.16. В отличие от рассеивающих бильярдов, бильярды, имеющие по крайней мере одну фокусирующую дугу, никогда не являются равномерно гиперболическими. В течение длинной серии последовательных несущественных столкновений неустойчивые касательные векторы растут медленно (медленнее, чем экспоненциально), что не согласуется с каким-либо равномерным расширением.

В бильярдах Бунимовича встречаются три типа длинных серий несущественных столкновений (см. иллюстрации на рис. 8.4).

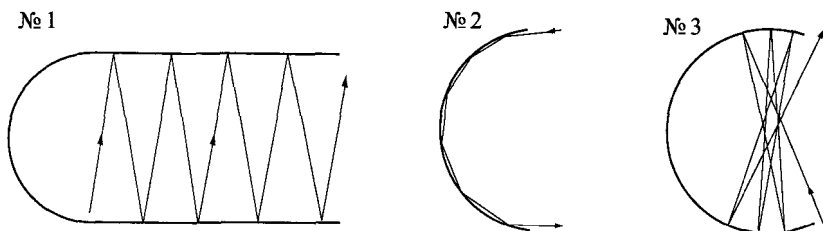


Рис. 8.4. Три типа несущественных столкновений

Тип № 1. Столкновения происходят только на плоских участках границы. Это, по существу, многоугольные траектории.

Тип № 2. Столкновения происходят на одной фокусирующей дуге, и $\varphi \approx \pi/2$. В этом случае траектория почти касается дуги, как будто скользит по ней. Такие серии столкновений называются *скользящими*.

Тип № 3. Столкновения происходят на одной фокусирующей дуге (или нескольких дугах, лежащих на одной окружности), и $|\varphi|$ не близок к $\pi/2$. В этом случае траектория близка к периодической орбите в окружности.

УПРАЖНЕНИЕ 8.17. Покажите, что траектории типа № 3 могут возникать только на фокусирующих дугах, больших половины окружности, или на нескольких фокусирующих дугах, лежащих на одной окружности.

8.5. Неустойчивые волновые фронты и непрерывные дроби

Пусть $X \in \Omega$ — гиперболическая точка (см. опр. 3.2) и $dX^u = (0, d\xi^u, d\omega^u) \in \mathcal{T}_X^\perp \Omega$ — неустойчивый касательный вектор в точке X . Тогда dX^u задает бесконечно малый волновой фронт («росток» неустойчивого многообразия в X). Здесь мы покажем, что кривизна этого фронта, $\mathcal{B}^u(X) = d\omega^u/d\xi^u$, может быть представлена в виде непрерывной дроби. Последняя имеет такую же структуру, как дроби в § 4.7; мы обратим внимание на это ниже.

Обозначим через $x = P^+(X)$ точку первого столкновения на траектории X (ср. (3.17)), и $x_n = (r_n, \varphi_n) = \mathcal{F}^n(x)$, где $n \in \mathbb{Z}$, — все остальные столкновения точки. Пусть $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}(r_n)$ — кривизна $\partial\mathcal{D}$ в точке n -ого столкновения, $\tau_n = \tau(x_n)$ — время свободного пробега и $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}(x_n) = 2\mathcal{K}_n/\cos \varphi_n$ — параметр столкновения. Обозначим также через $\mathcal{B}_t$ кривизну нашего волнового фронта в момент времени t , а через $\mathcal{B}_n^\pm$ — его кривизну до (–) и после (+) n -ого столкновения.

Непрерывная дробь, выражающая значение $\mathcal{B}^u(X)$, имеет вид

$$|t^-(X)| + \frac{1}{\mathcal{R}_{-1} + \frac{1}{\tau_{-2} + \frac{1}{\mathcal{R}_{-2} + \frac{1}{\tau_{-3} + \frac{1}{\ddots}}}}}, \quad (8.7)$$

где $t^-(X)$ — время последнего столкновения; ср. (3.16). Заметим, что в некоторых случаях $\mathcal{B}^u(X) = \infty$, что соответствует точке фокусировки на неустойчивом многообразии.

Дробь (8.7) аналогична дроби, возникшей в (4.42), но ее анализ будет более сложным, так как теперь некоторые $\mathcal{R}_{-n}$ могут быть отрицательными.

Предложение 8.18. Если $X \in \Omega$ — гиперболическая точка, то непрерывная дробь (8.7) сходится, и ее значение равно $\mathcal{B}^u(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы начнем с того же, с чего и в предложении 4.35. Согласно (3.31) достаточно доказать утверждение для точек $X \in \mathcal{M}$, в которых $x = X$ и $|t^-(X)| = \tau_{-1}$, и тогда (8.7) будет выражать кривизну фронта перед столкновением $\mathcal{B}^{u-}(X)$.

Сходимость бесконечной непрерывной дроби означает, что последовательность соответствующих конечных дробей имеет предел. Конечные дроби с четными номерами

$$\mathcal{B}_{-n}^e = \frac{1}{\tau_{-1} + \frac{1}{\mathcal{R}_{-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\mathcal{R}_{-n}}}}}$$

соответствуют волновым фронтам, прообразы которых, существовавшие перед n -ым столкновением в прошлом, были плоскими (то есть $\mathcal{B}_{-n}^- = 0$); вспомним (3.34). Конечные дроби с нечетными номерами

$$\mathcal{B}_{-n}^o = \frac{1}{\tau_{-1} + \frac{1}{\mathcal{R}_{-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\tau_{-n}}}}}$$

соответствуют волновым фронтам, прообразы которых, существовавшие перед n -ым столкновением в прошлом, фокусировались (то есть $\mathcal{B}_{-n}^\pm = \infty$).

Если n -ое столкновение в прошлом происходит на рассеивающем или плоском участке границы ($\mathcal{K}_{-n} \geq 0$), то как $\mathcal{B}_{-n}^e$, так и $\mathcal{B}_{-n}^o$ соответствуют образам неустойчивых волновых фронтов, возникших в далеком прошлом, и, таким образом, они должны стремиться к $\mathcal{B}^u(X)$ при $n \rightarrow \infty$ согласно (3.51).

Если n -ое столкновение происходит на фокусирующей дуге, то волновой фронт, кривизна которого $\mathcal{B}_{-n}^- = \infty$ (что приводит к конечной дроби с нечетным номером), не является неустойчивым, так как не удовлетворяет условию (8.4). Рассмотрим его образ.

Согласно (3.31) и (3.33) мы имеем

$$\mathcal{B}_{-n+1}^- = \mathbb{F}(\mathcal{B}_{-n}^-): = \frac{1}{\tau_{-n} + \frac{1}{\mathcal{R}_{-n} + \mathcal{B}_{-n}^-}}. \quad (8.8)$$

В этой формуле мы рассматриваем τ_{-n} и $\mathcal{R}_{-n}$ как «фиксированные» параметры данного столкновения, а $\mathcal{B}_{-n}^-$ — как «переменную» кривизну произвольного волнового фронта. Формула (8.8) описывает преобразование кривизны фронта.

Предположим, что n -е столкновение происходит на фокусирующей дуге радиуса r_{-n} ; тогда $\mathcal{R}_{-n} = -\frac{2}{r_{-n} \cos \varphi_{-n}}$ и $\tau_{-n} \geq 2r_{-n} \cos \varphi_{-n}$ согласно (8.5). График функции $\mathbb{F}_n(x)$ показан на рисунке 8.5.

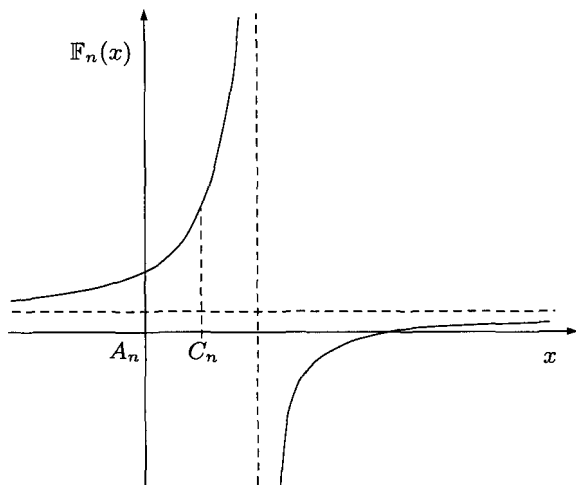


Рис. 8.5. Функция $y = \mathbb{F}_n(x)$, описывающая преобразование кривизны волнового фронта

Итак, конечная дробь с четным номером $\mathcal{B}_{-n}^e$ порождается волновым фронтом с кривизной $\mathcal{B}_{-n}^- = 0$ (отметим точку $A_n = 0$ на горизонтальной оси); конечная дробь с нечетным номером $\mathcal{B}_{-n}^o$ порождается волновым фронтом с кривизной $\mathcal{B}_{-n}^- = \infty$ (положим $B_n = \infty$); все неустойчивые волновые фронты удовлетворяют условию $0 < \mathcal{B}_{-n}^- < \frac{1}{r_{-n} \cos \varphi_{-n}}$ согласно (8.4), поэтому нужно отметить и точку $C_n = \frac{1}{r_{-n} \cos \varphi_{-n}}$. Заметим, что наша функция монотонно возрастает на интервале (A_n, C_n) , содержащем все неустойчивые фронты.

Точки A_n , B_n и C_n отображаются $\mathbb{F}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{n,1} &= \mathbb{F}_n(A_n) = \frac{1}{\tau_{-n} - \mathbf{r}_{-n} \cos \varphi_{-n}/2}, \\ B_{n,1} &= \mathbb{F}_n(B_n) = \frac{1}{\tau_{-n}}, \\ C_{n,1} &= \mathbb{F}_n(C_n) = \frac{1}{\tau_{-n} - \mathbf{r}_{-n} \cos \varphi_{-n}}. \end{aligned}$$

Заметим, что $0 = A_{n-1} < B_{n,1} < A_{n,1} < C_{n,1}$. Следовательно, образ волнового фронта с кривизной $\mathcal{B}_{-n}^- = \infty$ при следующем столкновении будет неустойчивым, таким образом, его будущий образ в момент времени $t = 0$ сойдется к $\mathcal{B}^u(X)$ при $n \rightarrow \infty$. Это завершает доказательство предложения 8.18. ■

8.6. Еще немного непрерывных дробей

Здесь, как и в § 4.7, покажем, что непрерывная дробь (8.7) на самом деле сходится в каждой точке $X \in \Omega$, прошлая полутраектория которой полностью определена.

Продолжим наш анализ преобразования $\mathbb{F}_n: \mathcal{B}_{-n}^- \mapsto \mathcal{B}_{-n+1}^-$, график которого изображен на рис. 8.5. Если $(n-1)$ -ое отражение также происходит на фокусирующей дуге (радиуса $\mathbf{r}_{-n+1}$), то $C_{n,1} \leq C_{n-1} = \frac{1}{\mathbf{r}_{-n+1} \cos \varphi_{-n+1}}$ вследствие инвариантности неустойчивых конусов (заметим, что если n -ое и $(n-1)$ -ое столкновения происходят на одной окружности, то $C_{n,1} = C_{n-1}$). Далее, при $(n-2)$ -ом отражении образы наших точек будут удовлетворять условию

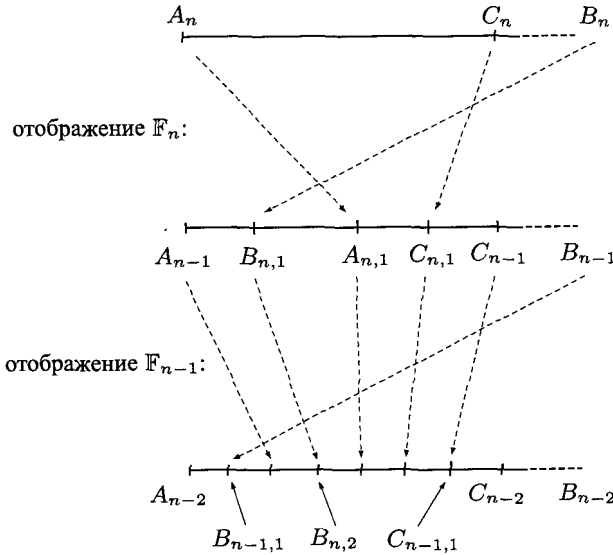
$$0 = A_{n-2} < B_{n-1,1} < A_{n-1,1} < B_{n,2} < A_{n,2} < C_{n,2} \leq C_{n-1,1} \leq C_{n-2},$$

где $B_{n,2} = \mathbb{F}_{n-1}(B_{n,1})$, и т.д.; см. диаграмму на рис. 8.6.

Представим на минуту, что все последующие отражения происходят на фокусирующих дугах. Тогда в точке X мы будем иметь

$$0 = B_{1,1} < A_{1,1} < B_{2,2} < A_{2,2} < \dots < C_{2,2} \leq C_{1,1}, \quad (8.9)$$

где $A_{k,k} = \mathcal{B}_{-k}^e$, $B_{k,k} = \mathcal{B}_{-k}^o$ и $C_{k,k}$ выражает образ волнового фронта, для которого $\mathcal{B}_{-k}^- = \frac{1}{\mathbf{r}_{-k} \cos \varphi_{-k}}$.

Рис. 8.6. Диаграмма точек A_n, B_n, C_n и их образов

Мы видим, что члены с четными и нечетными номерами перемежаются и образуют монотонно возрастающую последовательность, которая обязана сходиться. Ниже мы покажем, что последовательность $\{C_{k,k}\}$ сходится к тому же пределу.

Если прошлая полутраектория точки X содержит столкновения как на фокусирующих, так и на рассеивающих/плоских участках границы, то в результате картина будет иметь вид

$$0 = B_{1,1} < A_{1,1} < B_{2,2} < A_{2,2} < \dots < D_{2,2} \leq D_{1,1}, \quad (8.10)$$

где каждый член $B_{k,k}$ включается в цепочку, только если k -ое столкновение происходит на фокусирующей дуге, и

$$D_{k,k} = \begin{cases} C_{k,k} & \text{для столкновений с фокусирующими дугами,} \\ B_{k,k} & \text{для столкновений с рассеивающими/плоскими участками.} \end{cases}$$

Вывод (8.10) мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Заметим, что эта картина довольно сильно отличается от той, что мы имели для рассеивающих бильярдов; ср. (4.44). Ранее член с чет-

ным номером B_{-n}^e всегда соответствовал *наименее растущему* неустойчивому фронту (изначально плоскому, $B_{-n}^- = 0$), а член с нечетным номером B_{-n}^o всегда соответствовал *наиболее растущему* неустойчивому фронту (изначально представлявшему собой «взрывной» фронт, $B_{-n}^- = \infty$), таким образом, все остальные растущие фронты находились между (согласно упр. 4.13).

Здесь, когда n -ое столкновение происходит на фокусирующей дуге, наименее растущий неустойчивый фронт будет соответствовать $C_{n,n}$, а не $A_{n,n}$ (или $B_{n,n}$), таким образом, интервал $[B_{n,n}, A_{n,n}] = [B_{-n}^o, B_{-n}^e]$ не покрывает весь диапазон неустойчивых фронтов, образующихся при n -ом столкновении, следовательно, мы должны включить $C_{n,n}$ в наш анализ.

Чтобы доказать сходимость дроби (8.7), достаточно показать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{k,k} = \lim_{k \rightarrow \infty} D_{k,k}.$$

Наше доказательство можно назвать «динамическим», и оно отличается от доказательства самого Бунимовича [Bu74a]. Мы докажем аналог леммы 4.36.

Лемма 8.19. *Предположим, что прошлая полутраектория точки X полностью определена (то есть $t_{-n} \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$). Тогда для $n \geq 2$*

$$|A_{n,n} - D_{n,n}| \leq 1/|t_{-n}|. \quad (8.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Величины $A_{n,n}$ и $D_{n,n}$ представляют собой две конечные непрерывные дроби, которые отличаются только последним членом. Как и в доказательстве леммы 4.36,

$$D_{n,n} - A_{n,n} = U_1 V_1 U_2 V_2 \dots U_{n-1} V_{n-1} \left[\frac{1}{\tau_{-n} + 1/B_{-n}^+} - \frac{1}{\tau_{-n} + 1/\mathcal{R}_{-n}} \right],$$

где U_i берутся из разложения $D_{n,n}$:

$$U_i = \frac{1}{1 + \tau_{-i} \left(\mathcal{R}_{-i} + \frac{1}{\tau_{-i-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\tau_{-n} + 1/B_{-n}^+}}} \right)},$$

а V_i берутся из разложения $A_{n,n}$:

$$U_i = \frac{1}{1 + \tau_{-i} \left(\mathcal{R}_{-i} + \frac{1}{\tau_{-i-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\tau_{-n} + 1/\mathcal{R}_{-n}}}} \right)}.$$

Здесь

$$B_{-n}^+ = \begin{cases} \infty, & \text{если } D_{n,n} = B_{n,n}, \\ -\frac{1}{r_{-n} \cos \varphi_{-n}}, & \text{если } D_{n,n} = C_{n,n}. \end{cases}$$

Заметим, что U_i и V_i являются (с точностью до знака) величинами, обратными коэффициентам расширения некоторых неустойчивых волновых фронтов (в r -метрике); следовательно, $|U_i| \leq 1$ и $|V_i| \leq 1$.

Теперь найдем более точную оценку для $|U_i|$. Мы увидели в доказательстве леммы 4.36, что если все столкновения происходят на рассеивающих участках границы, то $1/B_{-n}^+ = 0$ и

$$0 \leq U_i \leq \frac{\tau_{-i-1} + \dots + \tau_{-n}}{\tau_{-i} + \dots + \tau_{-n}}.$$

Это означает, что волновой фронт, изначально представлявший собой «взрывной» фронт ($B_{-n}^+ = \infty$), будет расширяться между $(i+1)$ -ым и i -ым столкновениями, по крайней мере, так же сильно, как волновой фронт, образовавшийся от взрыва в момент времени t_{-n} , не испытывающий столкновений. Последний (воображаемый) волновой фронт в момент времени t_{-i} будет иметь кривизну, равную $1/(\tau_{-i-1} + \dots + \tau_{-n})$.

Аналогичное свойство имеется у билиардов Бунировича, но его вывод несколько сложнее. Введем «среднюю» кривизну при k -ом столкновении:

$$\bar{B}_{-k} = \frac{1}{2} |B_{-k}^+ + B_{-k}^-|.$$

УПРАЖНЕНИЕ 8.20. Покажите, что для неустойчивых волновых фронтов $|1 + \tau_{-k} B_{-k}^+| \geq 1 + \tau_{-k} \bar{B}_{-k}$; то есть неустойчивый волновой фронт расширяется (в r -метрике) между k -ым и $(k+1)$ -ым столкновениями не меньше, чем «воображаемый» волновой фронт, кривизна которого после k -ого столкновения равна $\bar{B}_{-k}$.

Лемма 8.21. Для неустойчивых волновых фронтов мы имеем $\bar{B}_{-k+1}^{-1} \leq \bar{B}_{-k}^{-1} + \tau_{-k}$.

Другими словами, «средняя» кривизна $\bar{B}_{-k}$ неустойчивого фронта уменьшается между столкновениями не более, чем регулярная кривизна волнового фронта. Как и в последнем случае, мы имеем $[B_{-k+1}^-]^{-1} = [B_{-k}^+]^{-1} + \tau_{-k}$ согласно (3.31). Несмотря на прозрачный геометрический смысл этой леммы, ее доказательство не является простым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо рассмотреть четыре случая, так как каждое из двух рассматриваемых столкновений может происходить как на рассеивающем/плоском участке границы, так и на фокусирующей дуге. Здесь мы рассмотрим только наиболее сложный случай, когда оба столкновения происходят на фокусирующих дугах (радиусов r_{-k} и r_{-k+1} соответственно), и оставим три остальных случая читателю в качестве упражнения.

Для удобства обозначим $r_{-k} \cos \varphi_{-k} = s_{-k}$ и $-1/B_{-k}^+ = u_{-k}$ (заметим, что $0 < u_{-k} < s_{-k}$). Тогда неравенство, указанное в лемме, примет вид

$$\frac{1}{\frac{1}{s_{-k+1}} - \frac{1}{\tau_{-k} - u_{-k}}} \leq \frac{1}{\frac{1}{u_{-k}} - \frac{1}{s_{-k}}} + \tau_{-k}.$$

Приведение к общему знаменателю и использование (3.31) и (3.33) дает

$$\tau_{-k}(s_{-k} - u_{-k})(\tau_{-k} - 2s_{-k+1}) + (\tau_{-k} - s_{-k} - s_{-k+1})u_{-k}^2 \geq 0.$$

Это неравенство верно, так как все слагаемые неотрицательны; ср. (8.5). Лемма 8.21 доказана. $\blacksquare$

Вернемся к доказательству леммы 8.19. Во-первых, предположим, что n -ое отражение происходит на рассеивающем или плоском участке границы; тогда $\bar{B}_{-n} = B_{-n}^+ = \infty$ и

$$\left| \frac{1}{\tau_{-n} + 1/B_{-n}^+} - \frac{1}{\tau_{-n} + 1/\mathcal{R}_{-n}} \right| \leq \frac{1}{\tau_{-n}},$$

так как $\mathcal{R}_{-n} \geq 0$. Объединяя результаты приведенных выше упражнения и леммы, мы получаем $\bar{B}_{-i}^{-1} \leq \tau_{-n} + \dots + \tau_{-i-1}$ и

$$\begin{aligned} |U_1 \dots U_{n-1} [\tau_{-n}]^{-1}| &\leq \frac{1}{\tau_{-n}} \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \tau_{-i} \bar{B}_{-i}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\tau_{-n}} \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\tau_{-i-1} + \dots + \tau_{-n}}{\tau_{-i} + \dots + \tau_{-n}} = \frac{1}{\tau_{-i} + \dots + \tau_{-n}} = \frac{1}{|t_{-n}|}. \end{aligned}$$

Во-вторых, предположим, что n -ое отражение происходит на фокусирующей дуге (радиуса r_{-n}); тогда $1/B_{-n}^+ = 2/\mathcal{R}_{-n} = -r_{-n} \cos \varphi_{-n}$.

УПРАЖНЕНИЕ 8.22. Покажите, что

$$\frac{1}{\tau_{-n} - \mathbf{r}_{-n} \cos \varphi_{-n}} - \frac{1}{\tau_{-n} - \frac{1}{2}\mathbf{r}_{-n} \cos \varphi_{-n}} \leq \frac{1}{\tau_{-n} + \mathbf{r}_{-n} \cos \varphi_{-n}}.$$

Указание: вспомните, что $\tau_{-n} \geq 2\mathbf{r}_{-n} \cos \varphi_{-n}$.

Теперь мы оценим V_i . Так как V_i соответствует неустойчивому волновому фронту, изначально плоскому ($\mathcal{B}_{-n}^- = 0$), то $\overline{\mathcal{B}}_{-n}^{-1} = \mathbf{r}_{-n} \cos \varphi_{-n}$; следовательно,

$$\overline{\mathcal{B}}_i^{-1} \leq \mathbf{r}_{-n} \cos \varphi_{-n} + \tau_{-n} + \dots + \tau_{-i-1}$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} \left| \frac{V_1 \dots V_{n-1}}{\tau_{-n} + \mathbf{r}_{-n} \cos \varphi_{-n}} \right| &\leq \frac{1}{\tau_{-n} + \mathbf{r}_{-n} \cos \varphi_{-n}} \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \tau_{-i} \overline{\mathcal{B}}_{-i}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\tau_{-1} + \dots + \tau_{-n} + \mathbf{r}_{-n} \cos \varphi_{-n}} \leq \frac{1}{|t_{-n}|}. \end{aligned}$$

Это доказывает лемму 8.19. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 8.23. Оценка (8.11) точная. Например, если все n столкновений происходят на плоских участках границы (что свойственно бильярдам Бунимовича, включая столы с карманами и стадионы; см. рис. 8.3), то $A_{n,n} = 0$ и $D_{n,n} = 1/|t_{-n}|$. Однако, если n -ое столкновение происходит на фокусирующей дуге, оценка (8.11) может быть улучшена.

Следующее утверждение абсолютно аналогично следствию 4.37.

Следствие 8.24. Пусть $x \in \mathcal{M}$. Предположим, что неустойчивый фронт в x имеет кривизну $\mathcal{B}$ и его прообраз в момент времени t_{-n} n -ого столкновения в прошлом также неустойчив. Тогда $|\mathcal{B} - \mathcal{B}^u(x)| \leq 1/|t_{-n}|$.

Таким образом, так же, как в упр. 4.38, функция $\mathcal{B}^u(X)$ непрерывна на множестве точек $X \in \Omega$, для которых существует прошлая полутраектория X и $\mathcal{B}^u \neq \infty$ (последнее имеет место в точках фокусировки).

Вследствие временной обратимости наклон $\mathcal{B}^s(X)$ устойчивого подпространства E_X^s , $X \in \Omega$, выражается аналогичной непрерывной дробью (4.45), которая определена на множестве точек $X \in \Omega$, имеющих прошлую полутраекторию, и непрерывна там, где $\mathcal{B}^s(X) \neq \infty$.

Неустойчивое и устойчивое подпространства $E_x^{u,s} \subset T_x \mathcal{M}$ имеют наклон $\mathcal{V}^{u,s}(x)$, которые выражаются формулами (4.46) и (4.48). Функции $\mathcal{V}^u(x)$ и $\mathcal{V}^s(x)$ определены и непрерывны на множестве точек $x \in \mathcal{M}$, для которых все прошлые, соответственно, будущие, итерации $\mathcal{F}$ являются гладкими. Заметим, что устойчивые и неустойчивые многообразия никогда не фокусируются в моменты столкновений; следовательно, $|\mathcal{V}^{u,s}(x)| < \infty$.

Мы закончим этот раздел ответом на вопрос, сформулированный в § 3.12.

Предложение 8.25. *Функция $\log^+ |\mathcal{B}^{u+}(x)|$ интегрируема на $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С точками $x \in \mathcal{M}$ на рассеивающих и плоских участках границы можно поступить точно так же, как в доказательстве предложения 4.39. Для точек на фокусирующих дугах мы имеем

$$\log^+ |\mathcal{B}^{u+}(x)| \leq \log^+ [2\mathcal{K}(x) / \cos \varphi(x)];$$

таким образом, предложение следует из интегрируемости функции $|\log \cos \varphi|$ на $\mathcal{M}$; см. (3.8). ■

8.7. Устранение несущественных столкновений

Изучение билиардов Бунимовича во многом аналогично изучению билиардов Синая. Однако в билиярдах с фокусирующими дугами мы встречаемся с новым явлением, которого нет в билиярдах Синая категорий А и В: это неравномерная гиперболичность, описанная в конце § 8.4. В течение длинной серии несущественных столкновений (типов № 1, № 2 и № 3, определенных в § 8.4) расширение и сжатие происходят очень медленно (если происходят вообще); таким образом, такие столкновения «теряются» с точки зрения гиперболичности динамики.

К счастью, отображение $\mathcal{F}$ имеет очень простую структуру (оно практически линейно) в течение серии несущественных столкновений.

УПРАЖНЕНИЕ 8.26. Пусть $x = (r, \varphi)$ и $\mathcal{F}(x) = (r_1, \varphi_1)$ — точки последовательных столкновений, лежащие на двух плоских участках границы ∂D . Найдите явные формулы для отображения $\mathcal{F}$ вблизи x ; в частности, проверьте, что φ_1 — линейная функция φ , а r_1 — линейная функция r .

УПРАЖНЕНИЕ 8.27. Пусть $x = (r, \varphi)$ и $\mathcal{F}(x) = (r_1, \varphi_1)$ — точки последовательных столкновений, лежащие на одной фокусирующей дуге (или на двух фокусирующих дугах, лежащих на одной окружности) радиуса r . Проверьте, что

$$r_1 = r + r(\pi - 2\varphi), \quad \text{если } \varphi > 0,$$

и

$$r_1 = r - r(\pi + 2\varphi), \quad \text{если } \varphi < 0;$$

в частности, r_1 — линейная функция как по r , так и по φ .

Простота отображения $\mathcal{F}$ в течение серии несущественных столкновений позволяет упростить эту серию следующим образом.

Если k -ое столкновение траектории $X \in \Omega$ происходит на плоском участке границы, то $\mathcal{R}_k = 0$, таким образом, соответствующий член в непрерывной дроби $\mathcal{B}^u(X)$, если $k < 0$, или $\mathcal{B}^s(X)$, если $k > 0$, обнуляется. Простой прием

$$\tau_{k-1} + \frac{1}{0 + \frac{1}{\tau_k + \dots}} = \tau_{k-1} + \tau_k + \dots$$

позволяет нам исключить все нули из непрерывных дробей $\mathcal{B}^u(X)$ и $\mathcal{B}^s(X)$, не меняя их значений. Упрощенные таким образом непрерывные дроби соответствуют «воображаемой» бильiardной траектории, которая испытывает такие же столкновения и в те же моменты времени, что и реальная траектория $\Phi^t(X)$, с неплоскими участками границы, но не испытывает столкновений с плоскими участками (которые мы «пропускаем»).

Геометрически такая воображаемая траектория может быть построена с помощью приема, использованного в § 1.1 и 1.2. Каждый раз, когда реальная траектория сталкивается с плоской стороной Γ_j стола $\mathcal{D}$, мы отражаем весь стол относительно Γ_j и позволяем нашей траектории двигаться по прямой внутрь отраженного образа $\mathcal{D}$; см. рис. 8.7 (мы «разворачиваем» траекторию). Новая (воображаемая) траектория затем столкнется с границей нового (воображаемого) стола, и каждый раз, когда она ударяется о плоскую сторону, мы повторяем прием с переворачиванием стола, таким образом получая все больше и больше зеркальных образов области $\mathcal{D}$, где продолжают двигаться воображаемые траектории.

Кроме того, пусть волновой фронт движется вдоль траектории точки X . Тогда прием с переворачиванием стола дает новый воображаемый волновой фронт,двигающийся вдоль «воображаемой копии» траектории $\Phi^t(X)$; см. рис. 8.7. Каждая траектория этого фронта движется прямолинейно сквозь плоские участки границы в зеркальный образ области $\mathcal{D}$. Очевидно, геометрические характеристики воображаемого фронта (его кривизна и протяженность) в любой момент времени будут идентичны характеристикам реального волнового фронта (сравните это наблюдение с упр. 3.33).

УПРАЖНЕНИЕ 8.28. Проверьте (8.12). Указание: используйте индукцию по k ; также см. (1.3).

Приведенная дробь в правой части (8.12) соответствует воображаемой бильiardной траектории, эволюционирующей следующим образом: в момент времени t_n , когда реальная траектория совершает свое первое столкновение нашей серии, воображаемая траектория отражается от окружности удвоенного радиуса $2r$; затем она движется в обратном направлении без столкновений в течение $k\tau$ единиц времени (это в точности время, которое реальная траектория проводит между первым и последним столкновениями в серии); и в момент времени $t_{n+k} = t_n + k\tau$, когда реальная траектория совершает свое последнее столкновение, воображаемая траектория снова отражается от окружности радиуса $2r$; см. рис. 8.8.

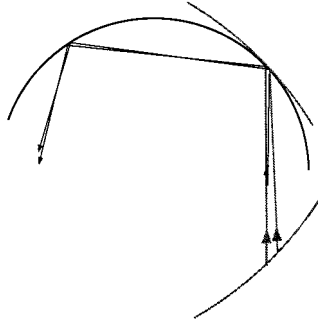


Рис. 8.8. Воображаемые траектории («толстые» серые), движущиеся «в обратном направлении» после столкновения с окружностью удвоенного радиуса

Теперь пусть бесконечно малый волновой фронт движется вдоль траектории X и испытывает $k + 1$ последовательное столкновение с нашей фокусирующей дугой. Обозначим через $\mathcal{B}_n^-$ его кривизну перед первым столкновением. Тогда расширение фронта в r -метрике в течение всей серии выражается формулой

$$\mathcal{J} = \prod_{i=0}^{k-1} \left| 1 + \tau(-4/\tau + \mathcal{B}_{n+i}^-) \right|.$$

Каждая траектория нашего фронта имеет воображаемую копию, построенную выше, таким образом, мы получаем воображаемый волновой фронт, эволюционирующий между двумя столкновениями с окружностями радиу-

са 2г. Его расширение между двумя столкновениями в p -метрике имеет вид

$$\mathcal{I}_{\text{im}} = |1 - k\tau(-2/\tau + \mathcal{B}_n^-)|$$

согласно (8.12).

УПРАЖНЕНИЕ 8.29. Докажите, что $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\text{im}}$, то есть воображаемый фронт расширяется точно так же, как и реальный волновой фронт. Указание: вспомните, что $-4/\tau + \tau\mathcal{B}_{n+i}^-$ имеет форму, записанную в левой части (8.12); таким образом, это выражение может быть заменено приведенной дробью, аналогичной дроби в правой части (8.12).

Следовательно, геометрические характеристики воображаемого фронта (его кривизна и протяженность) будут идентичны характеристикам реального волнового фронта в моменты первого и последнего столкновений нашей серии. Вся серия столкновений с фокусирующей дугой может быть заменена двумя столкновениями с воображаемыми дугами удвоенного радиуса. Это влечет за собой два «побочных эффекта»: интервал между двумя столкновениями (реальными или воображаемыми) дугами больше не может быть сколь угодно малым (см. упражнение ниже), а кривизна фронта после первого столкновения с дугой отличается от кривизны реального волнового фронта.

Заметим, что если волновой фронт неустойчив, то есть $\mathcal{B}^-$ удовлетворяет условию (8.4), то $-2/\tau + \mathcal{B}^- < 0$; следовательно, воображаемый волновой фронт становится фокусирующимся после первого столкновения. Но так как он движется в обратном направлении, он будет монотонно расширяться без прохождения точек фокусировки; см. рис. 8.8. Это делает динамику фронта аналогичной той, что мы видели в рассеивающих бильярдах.

УПРАЖНЕНИЕ 8.30. Покажите, что для любой фокусирующей дуги Γ_i существует положительная константа $c_i > 0$ такая, что в любой серии из $k+1 \geq 2$ последовательных столкновений с Γ_i интервал ($= k\tau$) между первым и последним столкновениями всегда превосходит c_i .

8.8. Стадионы

Устранение серии несущественных столкновений дает возможность установить близкую аналогию между бильярдами Бунимовича и рассеивающими бильярдами категорий А и В. Большая часть фактов, установленных нами в главах 4 и 5, также распространяются на бильярды Бунимовича: гладкость устойчивых и неустойчивых кривых, свойства особых кривых, конструкция устойчивых и неустойчивых многообразий, формулы для u -SRB плотности, ограничения на искажения, абсолютная непрерывность.

На рассеивающих (и плоских) участках границы основные свойства обычно принимают тот же вид, что и в случае бильярдов Синая, но на фокусирующих дугах они имеют иную форму и требуют отдельного рассмотрения. Напомним, что в определении 8.7 мы должны были говорить о рассеивающих участках и фокусирующих дугах отдельно; в соответствии с этим мы имели две различные формулы для неустойчивых конусов. Каждый раз, когда рассматриваются два последовательных столкновения, мы должны анализировать четыре различные комбинации типов столкновений (вспомним наши доказательства теоремы 8.9 и леммы 8.21).

Как результат, доказательства многих основных фактов для бильярдов Бунимовича, даже если они аналогичны по духу доказательствам, построенным для столов Синая, неминуемо длиннее и технически сложнее. (Например, сравните наш разговор о непрерывных дробях в § 4.7 для бильярдов Синая и в § 8.5 и 8.6 для столов Бунимовича.) По этой причине мы ограничим наш анализ некоторым классом бильярдов Бунимовича — стадионами.

Стадион показан на рисунке 8.3 (в); это стол, ограниченный двумя равными отрезками параллельных прямых и двумя равными полуокружностями (граница принадлежит классу C^1 , но не C^2). Стадион был рассмотрен Бунимовичем в 1974 году [Bu74b], но стал популярной темой в 1979 году после публикации других статей [Bu79]. Эта модель привлекала внимание многих физиков в 1980-х, они были удивлены, увидев такой простой пример абсолютно хаотического бильярда. Он остается хаотическим, насколько бы короткими ни являлись параллельные отрезки, но если они исчезают, стадион превращается в диск, где бильярд является полностью интегрируемым (§ 1.1). Таким образом, мы имеем непрерывное семейство бильярдных столов, где переход от абсолютно регулярного режима к полному хаосу происходит мгновенно. Физики провели массу компьютерных экспериментов, исследуя это удивительное превращение, и опубликовали множество работ, посвященных стадионам.

В дальнейшем мы ограничим наш анализ стадионами. Таким образом, мы больше не будем рассматривать рассеивающие участки границы, а плоские стороны будут полностью удалены с помощью приема с перемещением стола; см. ниже. Это позволит нам избежать излишних трудностей, возникающих вследствие присутствия столкновений разных типов, и, в то же самое время, схватить все существенные особенности общего случая бильярдов Бунимовича с фокусирующими дугами. Аналогичное исследование может быть применено и к другим моделям, например к цветкам, изображенным на рис. 8.3 (а), или к столам с карманами, изображенным на рис. 8.3 (б); мы оставляем эти задачи для заинтересованного читателя.

Прием с переворачиванием стола был описан в предыдущем разделе и проиллюстрирован на рис. 8.7. Заметим, что благодаря естественной симметрии образ отражения стадиона $\mathcal{D}$ относительно его плоской стороны идентичен $\mathcal{D}$. Последующие образы образуют бесконечный ряд идентичных стадионов с общими плоскими сторонами; см. рис. 8.9. Таким образом, мы получаем неограниченный бильярдный стол $\mathcal{D}_\infty$, граница которого состоит из двух рядов идентичных смежных полуокружностей. Это эквивалентно тому, что мы отождествляем противоположные плоские стороны исходного стадиона и получаем стол $\mathcal{D}_0$ на двумерном торе; так будет устроена фундаментальная область периодического стола $\mathcal{D}_\infty$. Обратите внимание, что ни $\mathcal{D}_\infty$, ни $\mathcal{D}_0$ не имеют плоских участков границы. Все столкновения происходят только на полуокружностях.

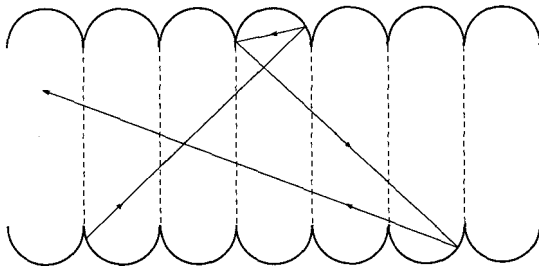
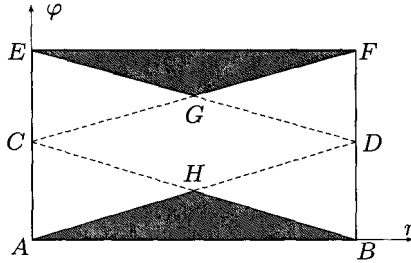


Рис. 8.9. Бесконечный стол, составленный из идентичных стадионов с общими плоскими сторонами

Более того, процедура устранения несущественных столкновений, описанная в предыдущем разделе, подразумевает, что мы можем переопределить отображение $\mathcal{F}$ таким образом, что в каждой серии столкновений с фокусирующей дугой будут учитываться только первое и последнее из них. Соответственно определим подмножество $M_\diamond \subset M$, состоящее из точек $x = (q, v)$ таких, что q принадлежит фокусирующей дуге, и либо образ точки $\mathcal{F}(x)$, либо ее прообраз $\mathcal{F}^{-1}(x)$ не лежит на той же дуге. Также рассмотрим отображение возвращения $\mathcal{F}_\diamond: M_\diamond \rightarrow M_\diamond$; то есть $\mathcal{F}_\diamond(x) = \mathcal{F}^{n(x)}(x)$, где $n(x) = \min\{n > 0 : \mathcal{F}(x) \in M_\diamond\}$. Отображение $\mathcal{F}_\diamond$ сохраняет меру μ , индуцированную на $M_\diamond$, которую мы обозначим $\mu_\diamond = [\mu(M_\diamond)]^{-1}\mu$.

Множество $M_\diamond$ состоит из двух одинаковых шестиугольников (соответствующих двум одинаковым полуокружностям); один из них изображен на рис. 8.10. Этот белый невыпуклый шестиугольник $AHBFGE$ является

Рис. 8.10. Множество $\mathcal{M}_\diamond$

объединением двух параллелограммов: $CBDE$, который содержит все точки *первых* столкновений с полуокружностью, и $ACFD$, который содержит все точки *последних* столкновений с полуокружностью (их пересечение, ромб $CHGD$, состоит из точек *единичных* столкновений с полуокружностью). Два черных треугольника содержат точки промежуточных столкновений, и поэтому они не входят в $\mathcal{M}_\diamond$.

УПРАЖНЕНИЕ 8.31. Проверьте, что множество $\mathcal{M}_\diamond$ действительно имеет описанную структуру.

Отображение $\mathcal{F}_\diamond$ переводит треугольник CEG в треугольник DFG ; аналогично, треугольник BHD переводится в ACH . Оно преобразует параллелограмм $ACFD$ в параллелограмм, аналогичный $CBDE$, но лежащий внутри другого шестиугольника (соответствующего противоположной полуокружности).

Далее, опишем действие $\mathcal{F}_\diamond$ на верхнем левом треугольнике CEG . На большем треугольнике CEF , где $\varphi > 0$, исходное отображение $\mathcal{F}$ действует по правилу

$$(r, \varphi) \mapsto (r + r(\pi - 2\varphi), \varphi); \quad (8.13)$$

см. упр. 8.27. Если билиардная траектория совершает k последовательных столкновений с полуокружностью (в течение которых координата φ остается постоянной), то

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \text{следовательно,} \quad \cos \varphi = \frac{\pi}{2k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (8.14)$$

Теперь новое отображение $\mathcal{F}_\diamond$ действует по правилу

$$r \mapsto r + k r(\pi - 2\varphi). \quad (8.15)$$

Это отображение линейно в каждой области, где k постоянно, но в $CBDE$ таких областей, соответствующих различным k , счетное количество; они разделяются линиями, состоящими из траекторий, ударяющихся о концевые точки нашей полуокружности при последнем столкновении с ней. Таким образом, новое отображение $\mathcal{F}_\diamond$ кусочно-линейно и имеет счетное количество линий разрыва (особых линий).

Действие $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_\diamond$ в прямоугольнике $EFDC$ (где $\varphi > 0$) иллюстрирует рис. 8.11. Он разделяется двумя семействами прямых линий, каждое из которых сходится в одной из верхних вершин шестиугольника, на счетное количество четырехугольников, образующих шахматную конфигурацию. Исходное билиардное отображение $\mathcal{F}$ преобразует каждый четырехугольник (линейно) в стоящий справа от него в том же горизонтальном ряду. Новое отображение $\mathcal{F}_\diamond$ отправляет крайний левый четырехугольник в крайний правый в том же ряду. Это можно проиллюстрировать следующей диаграммой (см. рис. 8.11):

$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}_\diamond$
$U \mapsto V$	$U \mapsto V$
$a \mapsto b \mapsto c$	$a \mapsto c$
$1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4$	$1 \mapsto 4$

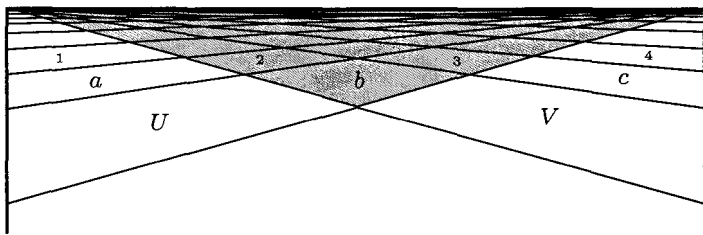


Рис. 8.11. Действие $\mathcal{F}$

Заметим, что линии в треугольнике CEG являются линиями разрыва для отображения $\mathcal{F}_\diamond$, в то время как линии в DFG являются линиями разрыва для обратного отображения $\mathcal{F}_\diamond^{-1}$. Количество четырехугольников в каждом ряду равно k (количеству последовательных столкновений с полуокружностью).

Нижний четырехугольник $ACDB$ (где $\varphi < 0$) делится на четырехугольники аналогичным образом, но отображения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_\diamond$ двигают их справа налево.

УПРАЖНЕНИЕ 8.32. Проверьте, что отображения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_\diamond$ описаны правильно.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.33. Данное описание отображения $\mathcal{F}$ (и «приведенного» отображения $\mathcal{F}_\diamond$) применимо к любой фокусирующей дуге бильярдного стола Бунимовича до тех пор, пока дуга не превышает полуокружности. Если дуга больше полуокружности, то в игру вступают несущественные столкновения типа № 3. Мы оставляем этот случай читателю в качестве упражнения.

Отображение $\mathcal{F}_\diamond$ имеет и другие особенности, лежащие в параллелограмме $ACFD$; они соответствуют траекториям, направляющимся к концевым точкам противоположной полуокружности.

УПРАЖНЕНИЕ 8.34. Покажите, что особенности, о которых говорится выше, состоят из двух счетных (симметричных) семейств возрастающих кривых, которые аккумулируются вблизи вершин C и D ; см. рис. 8.12.

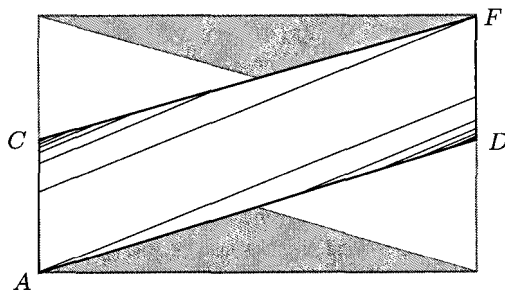


Рис. 8.12. Особенности $\mathcal{F}_\diamond$ (черные линии) в параллелограмме $ACFD$

8.9. Равномерная гиперболичность

В этом разделе мы докажем, что для любого стадиона отображение возвращения $\mathcal{F}_\diamond: \mathcal{M}_\diamond \rightarrow \mathcal{M}_\diamond$ равномерно гиперболическое. Воспользуемся стандартными обозначениями (привязав их к отображению $\mathcal{F}_\diamond$): возьмем точку $x = (r, \varphi) \in \mathcal{M}_\diamond$, обозначим через $x_n = (r_n, \varphi_n) = \mathcal{F}_\diamond^n(x)$ ее образы, а $\mathcal{R}_n$, τ_n и т. д. — соответствующие параметры в x_n . Заметим, что n здесь нумерует только существенные столкновения.

Зададим касательный вектор $dx = (dr, d\varphi) \in T_x \mathcal{M}_\diamond$, обозначим $dx_n = (dr_n, d\varphi_n) = D_x \mathcal{F}_\diamond^n(dx)$ его образ, а $\mathcal{V}_n = d\varphi_n/dr_n$ — его наклон, через $\mathcal{B}_n^\pm$ обозначим кривизну соответствующего волнового фронта до и по-

сле столкновения; напомним соотношение (8.3). Обозначим также $\|dx_n\| = [(dr_n)^2 + (d\varphi_n)^2]^{1/2}$ евклидову норму и $\|dx_n\|_p = |\cos \varphi_n dr_n|$ p -норму этих касательных векторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.35. Мы применим нашу схему приведения из § 8.7 к каждой серии последовательных скользящих столкновений; таким образом, соответствующие τ_n станут отрицательными. Важно тем не менее, что расширение в p -метрике всегда определяется формулой

$$\frac{\|dx_{n+1}\|_p}{\|dx_n\|_p} = |1 + \tau_n B_n^+| = \frac{|B_n^+|}{|B_{n+1}^-|} \quad (8.16)$$

как при $\tau_n > 0$, так и при $\tau_n < 0$ (сравните с (8.12)).

Свободный пробег между (существенными) столкновениями равномерно отделен от нуля: $|\tau_n| \geq \tau_{\min} > 0$ (см. упр. 8.30). Однако ограничения сверху нет. (Почему?)

Тангенс угла наклона $\mathcal{V} = d\varphi/dr$ неустойчивого вектора $(dr, d\varphi)$ всегда отрицателен; на самом деле $-1/r \leq \mathcal{V} < 0$ (см. (8.3) и (8.4)). В дальнейшем будем предполагать, что прообраз $(dr_{-1}, d\varphi_{-1})$ также является неустойчивым вектором.

Предположим, что x и x_{-1} принадлежат противоположным полуокружностям. Так как обе полуокружности отвечают Б-условию, точка фокусировки волнового фронта, соответствующего нашим касательным векторам, лежит ближе к x_{-1} , чем к x , и делит интервал τ_{-1} между x_{-1} и x в отношении $\rho \leq 1 - c_0$, где $c_0 = c_0(\mathcal{D}) > 0$ — некоторая константа. Отсюда следует

$$\frac{\|dx\|_p}{\|dx_{-1}\|_p} = \frac{|B_{-1}^+|}{|B^-|} = \rho^{-1} \geq (1 - c_0)^{-1} > 1.$$

Заметим также, что $0 \leq B^- \leq 2/\tau_{\min} = \text{const}$, и

$$B^- \leq \frac{1 - c_1}{r \cos \varphi}, \quad (8.17)$$

где $c_1 = c_1(\mathcal{D}) > 0$ — константа. Так как наклон касательного вектора выражается формулой $\mathcal{V} = \mathcal{K} + B^- \cos \varphi$ и $\mathcal{K} = -1/r = \text{const}$, то мы имеем $-1/r \leq \mathcal{V} \leq -c_1/r$. Это можно выразить так: $\mathcal{V} \asymp -1$. (Напомним, что $F \asymp G$ означает $0 < C_1 < F/G < C_2 < \infty$ при некоторых положительных константах C_1, C_2 , зависящих только от $\mathcal{D}$; см. § 4.3.)

Далее, пусть x и x_{-1} принадлежат одной полуокружности (они могут быть разделены другими несущественными, скользящими столкновениями). В этом случае предполагается, что второй прообраз нашего касательного вектора $(dr_{-2}, d\varphi_{-2})$ также неустойчив, тогда можно применить к x_{-1} неравенство (8.17). Получаем

$$\mathcal{B}_{-1}^+ = -\frac{1}{r \cos \varphi_{-1}} + \mathcal{B}_{-1}^- \leq -\frac{c_1}{r \cos \varphi_{-1}}$$

согласно (8.12). Так как $\tau_{-1} \leq -\tau_{\min} < 0$, то мы имеем

$$\frac{\|dx\|_p}{\|dx_{-1}\|_p} = |1 + \tau_{-1}\mathcal{B}_{-1}^+| \geq 1 + \frac{c_1\tau_{\min}}{r \cos \varphi_{-1}},$$

что является величиной, отделенной от 1. Также в этом случае время τ_{-1} имеет ограничение снизу $\tau_{-1} \geq -\tau_{\max} > -\infty$, и мы имеем

$$-\frac{1}{\tau_{\min}} \leq \mathcal{B}^- \leq -\frac{1}{\tau_{\max} + c_1/r},$$

то есть $\mathcal{B}^- \asymp -1$. Если количество k скользящих столкновений между точками x_{-1} и x велико, то $\cos \varphi \asymp 1/k$ в соответствии с (8.14) и

$$\mathcal{B}^+ = -\frac{1}{r \cos \varphi} + \mathcal{B}^- \asymp -k.$$

Для наклона $\mathcal{V}$ имеем

$$\mathcal{V} = -\mathcal{K} + \mathcal{B}^+ \cos \varphi = \mathcal{B}^- \cos \varphi \asymp -1/k$$

(это также может быть установлено напрямую из (8.14)–(8.15)).

Подведем итог рассуждений. Тангенс угла наклона неустойчивых векторов всегда ограничен снизу

$$-\infty < \text{const} \leq \mathcal{V} < 0. \quad (8.18)$$

Растяжение неустойчивых векторов в p -метрике всегда равномерно:

$$\frac{\|dx_{n+1}\|_p}{\|dx_n\|_p} = |1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+| \geq \Lambda > 1, \quad (8.19)$$

где $\Lambda = \Lambda(\mathcal{D}) > 1$ — некоторая константа. Более того, когда $\cos \varphi_n$ мало, оценку можно улучшить:

$$\frac{\|dx_{n+1}\|_p}{\|dx_n\|_p} = |1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+| \asymp \frac{1}{\cos \varphi_n}. \quad (8.20)$$

Для растяжения в евклидовой метрике мы имеем, как и в (4.18),

$$\frac{\|dx_n\|}{\|dx_0\|} = \frac{\|dx_n\|_p \cos \varphi_0 \sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}}{\|dx_0\|_p \cos \varphi_n \sqrt{1 + \mathcal{V}_0^2}}. \quad (8.21)$$

Последняя дробь равномерно отделена от нуля и бесконечности согласно (8.18). Для работы со средней дробью мы используем (8.20), положив $n = 0$, и получим

$$\frac{\|dx_n\|}{\|dx_0\|} \geq \text{const} \times \frac{\|dx_n\|_p}{\|dx_1\|_p} \geq \hat{c} \Lambda^n, \quad (8.22)$$

где $\hat{c} = \hat{c}(\mathcal{D}) > 0$ также является константой. Таким образом, гиперболичность также равномерна в евклидовой метрике. Заметим, однако, что растяжение неустойчивых векторов всегда монотонно в p -метрике, но в евклидовой метрике это правило может нарушаться.

Заметим также, что

$$\frac{\|dx_{n+1}\|}{\|dx_n\|} = \frac{\|dx_{n+1}\|_p \cos \varphi_n \sqrt{1 + \mathcal{V}_{n+1}^2}}{\|dx_n\|_p \cos \varphi_{n+1} \sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}} \asymp \frac{1}{\cos \varphi_{n+1}}; \quad (8.23)$$

эта формула полезна при $\cos \varphi_{n+1} \approx 0$.

В приведенном пространстве столкновений $\mathcal{M}_\diamond$ имеется три «проблемных» области, в которых величины, с которыми мы работаем, стремятся к нулю или бесконечности. Это первое и последнее столкновения в длинной серии из $k \gg 1$ скользящих столкновений с полуокружностью. Также сюда относятся столкновения, предшествующие длинной серии из $m \gg 1$ отражений от плоских сторон исходного стадиона. Такие точки располагаются вблизи вершин E , F и C , D соответственно, в шестиугольнике, изображенном на рис. 8.10.

Таблица 8.1 описывает асимптотическое поведение (в смысле $\asymp$) различных величин в трех случаях «проблемных» столкновений (например, при первом скользящем столкновении $\tau \asymp -1$, $\cos \varphi \asymp 1/k$, и т.д.). Все формулы в таблице немедленно следуют из нашего предыдущего анализа или друг из друга.

Последняя строка в таблице 8.1 описывает растяжение неустойчивых кривых в p -метрике, а сейчас опишем его в евклидовой метрике. Если $x \in \mathcal{M}_\diamond$ — первое скользящее столкновение, то $\cos \varphi = \cos \varphi_1 (\asymp 1/k)$; следовательно, $\|dx_1\|/\|dx\| \asymp k \asymp \|dx_1\|_p/\|dx\|_p$.

Таблица 8.1. Асимптотики различных величин в трех типах «проблемных» столкновений

Типы столкновений	В серии из k столкновений		Перед серией из m отражений от плоских сторон
	первое	последнее	
τ	-1	1	m
$\cos \varphi$	$1/k$	$1/k$	1
$\mathcal{B}^-$	1	-1	$1/m$
$\mathcal{R}$	$-k$	$-k$	-1
$\mathcal{B}^+$	$-k$	$-k$	-1
$\mathcal{V} = d\varphi/dr$	-1	$-1/k$	-1
$ 1 + \tau \mathcal{B}^+ $	k	k	m

Пусть $x \in \mathcal{M}_\diamond$ — последнее столкновение в длинной серии из $k \gg 1$ скользящих столкновений с полуокружностью. Очевидно, $\mathcal{F}_\diamond(x)$ является первым столкновением в другой длинной серии из $k_1 \gg 1$ скользящих столкновений с противоположной полуокружностью.

УПРАЖНЕНИЕ 8.36. Покажите, что для некоторых констант $c, C > 0$ имеет место двойное неравенство $c\sqrt{k} \leq k_1 \leq Ck^2$. (Здесь ситуация аналогична случаю рассеивающих бильярдных столов типа В; ср. § 4.10.)

Так как $\cos \varphi_1 \asymp 1/k_1$, то мы получаем, согласно (8.23),

$$c\sqrt{k} \leq \|dx_1\|/\|dx\| \leq Ck^2 \quad (8.24)$$

для некоторых констант $c, C > 0$. Наконец, пусть $x \in \mathcal{M}_\diamond$ предшествует длинной серии из $m \gg 1$ отражений от плоских сторон исходного стадиона. Тогда $\mathcal{F}_\diamond(x)$ также предшествует другой длинной серии из $m_1 \gg 1$ отражений от плоских сторон.

УПРАЖНЕНИЕ 8.37. Покажите, что для некоторых констант $c, C > 0$ имеет место двойное неравенство $cm \leq m_1 \leq Cm$. На самом деле границы можно указать точнее: $m/3 \leq +o(m) \leq m_1 \leq 3m + o(m)$. Мы убедимся в этом с помощью другого подхода в разделе 8.14.

В результате $\|dx_1\|/\|dx\| \asymp m \asymp \|dx_1\|_p/\|dx\|_p$.

8.10. Устойчивые и неустойчивые кривые

Ниже мы рассмотрим устойчивые и неустойчивые кривые в приведенном пространстве столкновений стадиона $\mathcal{M}_\diamond$. Устойчивые кривые имеют

положительный наклон, а неустойчивые — отрицательный (в случае рассеивающих билиардов все наоборот!). Эти кривые не имеют самопересечений. Их длины (как в метрике $|\cdot|$, так и в $|\cdot|_p$) равномерно ограничены. Если W^u — неустойчивая кривая, а W^s — устойчивая, то их пересечение $W^u \cap W^s$ трансверсально и состоит не более чем из одной точки.

Мы видим, что линии разрыва отображения $\mathcal{F}_\diamond$ являются возрастающими (устойчивыми) кривыми (ср. § 8.8), таким образом, любая неустойчивая кривая пересекает каждую линию разрыва не более чем в одной точке. Следовательно, образ $\mathcal{F}_\diamond(W)$ любой неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}_\diamond$ является конечным или счетным объединением неустойчивых кривых, которые мы будем называть *компонентами* $\mathcal{F}_\diamond(W)$.

Теперь мы установим C^2 -гладкость этих кривых, а также равномерную ограниченность их вторых производных, в том же смысле, который использовался в § 4.5 для рассеивающих билиардов (здесь мы не идем дальше второй производной, чтобы избежать излишних сложностей). Как и в § 4.5, наши кривые содержат концевые точки, и гладкость в этих точках всегда распространяется на односторонние производные в этих точках.

Предложение 8.38. *Для каждой C^2 -гладкой неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}_\diamond$ существует такое $n_W \geq 1$, что для всех $n \geq n_W$ каждая гладкая компонента $W' \subset \mathcal{F}_\diamond^n(W)$ имеет равномерно ограниченную вторую производную*

$$|d^2\varphi_n/dr_n^2| \leq C \quad (8.25)$$

на W' , где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости опустим индекс n . Пусть $(r, \varphi(r))$ обозначает точку на W' . Дифференцирование (8.3) (где $\mathcal{K} \equiv \text{const}$) дает

$$d^2\varphi/dr^2 = -B^-\mathcal{V} \sin \varphi + \cos \varphi dB^-/dr. \quad (8.26)$$

Первый член равномерно ограничен; следовательно, вторая производная будет ограничена, если мы докажем следующее утверждение.

Лемма 8.39. *Для каждой C^2 -гладкой неустойчивой кривой $W \subset \mathcal{M}_\diamond$ существует такое $n_W \geq 1$, что для всех $n > n_W$ каждая гладкая компонента $W' \subset \mathcal{F}_\diamond^n(W)$ удовлетворяет неравенству*

$$|dB^-/dr| \leq C'$$

на W' , где $C' = C'(\mathcal{D}) > 0$ — некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как W — C^2 -гладкая кривая, то $\sup_W |d^2\varphi/dr^2| < \infty$; следовательно,

$$\sup_W |\cos \varphi d\mathcal{B}^-/dr| < \infty \quad (8.27)$$

согласно (8.26). В наших стандартных обозначениях мы имеем при $n \geq 1$

$$\mathcal{B}_n^- = \frac{1}{\tau_{n-1} + \frac{1}{\mathcal{R}_{n-1} + \mathcal{B}_{n-1}^-}};$$

следовательно, используя (3.31) и (3.33), получим

$$\frac{d\mathcal{B}_n^-}{dr_n} = [\mathcal{B}_n^-]^2 \frac{d\tau_{n-1}}{dr_n} + \frac{1}{[1 + \tau_{n-1}\mathcal{B}_{n-1}^+]^2} \left(\frac{d\mathcal{R}_{n-1}}{dr_n} + \frac{d\mathcal{B}_{n-1}^-}{dr_n} \right). \quad (8.28)$$

Сначала проверим, что

$$|d\tau_{n-1}/dr_n| \asymp 1, \quad (8.29)$$

что очевидно в случае полетов без столкновений (вспомним доказательство леммы 4.44). В ином случае x_{n-1} — первое столкновение в серии из k скользящих столкновений с полуокружностью. Тогда $\tau_{n-1} = 2(k-1)r \cos \varphi_n$; следовательно, $|d\tau_{n-1}/d\varphi_n| \asymp k$, то есть неограничено. Но $|dr_n/d\varphi_n| = 1/|\mathcal{V}_n| \asymp k$, таким образом, два k сокращаются, что и доказывает (8.29). Следовательно, первое слагаемое в (8.28) равномерно ограничено.

Далее,

$$\frac{d\mathcal{R}_{n-1}}{dr_n} = \frac{d\mathcal{R}_{n-1}}{dr_{n-1}} \times \frac{dr_{n-1}}{dr_n} = -\frac{2\mathcal{V}_{n-1} \sin \varphi_{n-1}}{r \cos^2 \varphi_{n-1}} \times \frac{dr_{n-1}}{dr_n}.$$

Заметим, что $|dr_n| = \|dx_n\|/\sqrt{1+\mathcal{V}_n^2} \asymp \|dx_n\|$; следовательно, $|dr_{n-1}/dr_n| \asymp \|dx_{n-1}\|/\|dx_n\|$, что является величиной, равномерно ограниченной вследствие равномерной гиперболичности (8.22). Малая величина $\cos^2 \varphi_{n-1}$ в знаменателе поглощается множителем $[1 + \tau_{n-1}\mathcal{B}_{n-1}^+]^2$ в соответствии с (8.20); таким образом,

$$\frac{1}{[1 + \tau_{n-1}\mathcal{B}_{n-1}^+]^2} \left| \frac{d\mathcal{R}_{n-1}}{dr_n} \right| \leq \text{const.}$$

Далее, представим $|dr_{n-1}dr_n|$ в виде

$$\left| \frac{dr_{n-1}}{dr_n} \right| = \frac{\|dx_{n-1}\|_p}{\|dx_n\|_p} \times \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_{n-1}} = \frac{\theta_n \omega_n}{\omega_{n-1}},$$

где

$$\theta_n = |1 + \tau_n B_n^+|^{-1} = \|dx_n\|_p / \|dx_{n+1}\|_p$$

и

$$\omega_n = \theta_n^{-1} \cos \varphi_n = |1 + \tau_n B_n^+| \cos \varphi_n.$$

Заметим, что $\theta_n \leq \Lambda^{-1} < 1$, и ω_n ограничено сверху и снизу согласно (8.20), то есть

$$0 < \omega_{\min} \leq \omega_n \leq \omega_{\max} < \infty.$$

Комбинируя эти оценки и (8.28), получим

$$\left| \frac{dB_n^-}{dr_n} \right| \leq C'' + \theta_{n-1}^2 \theta_n \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \left| \frac{dB_{n-1}^-}{dr_{n-1}} \right|, \quad (8.30)$$

где $C'' = C''(\mathcal{D}) > 0$ — константа. Простое рекурсивное применение оценок (8.30) дает

$$\left| \frac{dB_n^-}{dr_n} \right| \leq \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} \left(\frac{C''}{1 - \Lambda^{-3}} + \Lambda^{-3n+1} \theta_0 \left| \frac{dB^-}{dr} \right| \right).$$

Наконец, заметим, что, согласно (8.27) и (8.20), мы имеем $\sup_W \theta_0 |dB^-/dr| < \infty$, что завершает доказательство леммы 8.39. ■

Предложение 8.38 теперь доказано. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 8.40. Заметим, что наши рассуждения довольно сильно отличаются от доказательства соответствующего предложения 4.29 для случая рассеивающих бильярдных потоков: там использовался бильярдный поток, в то время как здесь мы работаем только с отображением столкновений. Причина заключается в том, что между столкновениями неустойчивые волновые фронты проходят через точки фокусировки, в которых кривизна обращается в бесконечность, что затрудняет анализ. Напротив, в предложении 4.29 мы решили использовать бильярдный поток потому, что анализ был достаточно простым, и нам удалось получить несколько более точные оценки.

Вследствие обратимости времени все устойчивые кривые имеют аналогичные (дуальные) свойства.

Далее, опишем особенности отображения $\mathcal{F}_\diamond$. Положим $\widehat{S}_0 = \partial\mathcal{M}_\diamond$ и обозначим через $\widehat{S}_n$ особенности отображения $\mathcal{F}_\diamond^n$. Мы увидели в § 8.8, что кривые разрыва отображения $\mathcal{F}_\diamond$ устойчивы, а кривые разрыва $\mathcal{F}_\diamond^{-1}$ неустойчивы. Легко убедиться напрямую в том, что эти кривые имеют равномерно ограниченную кривизну (некоторые из них на самом деле являются прямыми линиями!). Таким образом, все кривые в $\widehat{S}_n \setminus \widehat{S}_0$, где $n \geq 1$, устойчивы и имеют равномерно ограниченную кривизну, а все кривые в $\widehat{S}_{-n} \setminus \widehat{S}_0$, где $n \geq 1$, неустойчивы и также имеют равномерно ограниченную кривизну.

Легко видеть, что особенности отображения $\mathcal{F}_\diamond$ имеют такие же общие свойства, что и отображения в рассеивающих билиардах. В частности, имеет место выравнивание линий разрыва (см. § 4.8), что следует из следствия 8.24 (нашего аналога следствия 4.37). Далее, линии разрыва продолжаемы в том смысле, который использовался в § 4.9. Особые линии из $\widehat{S}_{-n} \cup \widehat{S}_m$ для любых $m, n > 0$ делят пространство $\mathcal{M}_\diamond$ на криволинейные многоугольники, внутренние углы которых не превосходят π («выпуклость»); см. снова § 4.9 (упр. 4.49).

Заметим, что множества $\widehat{S}_\infty$ и $\widehat{S}_{-\infty}$ (ср. (4.53)) плотны в $\mathcal{M}_\diamond$ вследствие гиперболичности отображения $\mathcal{F}_\diamond$ (ср. § 4.11).

8.11. Конструкция устойчивых и неустойчивых многообразий

Свойства кривых разрыва, описанные в предыдущем разделе, позволяют нам построить устойчивые и неустойчивые многообразия для стадионов таким же образом, как это сделано в § 4.11.

Пусть $x \in \mathcal{M}_\diamond \setminus \widehat{S}_{-\infty}$. Для любого $n \geq 1$ обозначим $\mathcal{Q}_{-n}(x)$ связную компоненту открытого множества $\mathcal{M}_\diamond \setminus \widehat{S}_{-n}$, содержащую x . Пересечение их замыканий

$$\widetilde{W}^u(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}_{-n}(x)}$$

является замкнутой непрерывной монотонно возрастающей кривой. Неустойчивое многообразие $W^u(x)$ представляет собой кривую $\widetilde{W}^u(x)$ без концевых точек. Ее наклон в каждой точке $y \in W^u(x)$ равен $\mathcal{V}^u(y) = \mathcal{K} + B^{u-}(y) \cos \varphi$, где $B^{u-}(y)$ определяется выражением (8.7). Отображение $\mathcal{F}_\diamond^{-n}$ является гладким на $W^u(x)$ при всех $n \geq 1$, а прообразы $W^u(x)$ сжимаются под действием $\mathcal{F}_\diamond^{-1}$ равномерно и экспоненциально во времени.

Предложение 8.38 показывает, что неустойчивые многообразия принадлежат классу C^2 и имеют равномерно ограниченные производные.

Устойчивые многообразия $W^s(x)$, где $x \in \mathcal{M}_\diamond$, устроены подобным же образом и имеют аналогичные (дуальные) свойства.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.41. Мы ограничим наш анализ классом гладкости C^2 , так как этого достаточно для обоснований эргодических и статистических свойств стадионов. Однако, так как граница стадионов является кусочно бесконечно-гладкой, мы можем ожидать, что устойчивые и неустойчивые многообразия, так же, как и особые линии, являются бесконечно дифференцируемыми и k -я производная равномерно ограничена константой $C_k(\mathcal{D}) > 0$ для каждого $k \geq 1$ (ср. предложения 4.29 и 4.43). Это может быть доказано путем обобщения предложения 8.38 на старшие производные, и мы оставляем это в качестве упражнения для читателя.

Далее обсудим размер неустойчивых многообразий. Точка $x \in \mathcal{M}_\diamond$ делит $W^u(x)$ на две части, и мы обозначим через $r^u(x)$ длину (в евклидовой метрике) меньшей из них. Если $W^u(x)$ пусто, то положим $r^u(x) = 0$.

Теорема 8.42. Для почти всех $x \in \mathcal{M}_\diamond$ неустойчивое многообразие $W^u(x)$ существует (то есть $r^u(x) > 0$). Более того,

$$\mu_\diamond \{x \in \mathcal{M}_\diamond : r^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon \quad (8.31)$$

для некоторой константы $C = C(\mathcal{D}) > 0$ и любого $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения очень похожи на наши доказательства теоремы 4.66 и оценки (4.59) в теореме 4.75; мы опишем только два шага, в которых состоит отличие.

Во-первых, мы определим кусочно-постоянную функцию $E_u(x)$ на $\mathcal{M}_\diamond$ следующим образом: при первом скользящем столкновении в серии длины k мы положим $E_u(x) = k$ и при последнем столкновении в этой серии положим $E_u(x) = \sqrt{k}$; при столкновении перед длинной серией из m столкновений с плоскими сторонами положим $E_u(x) = m$. Тогда из наших оценок в конце раздела 8.9 следует, что существует малая константа $\tilde{c} = \tilde{c}(\mathcal{D}) > 0$ такая, что $\tilde{c}E_u(x)$ является оценкой снизу для коэффициента растяжения неустойчивых векторов $dx \in \mathcal{T}_x\mathcal{M}_\diamond$ для всех $x \in \mathcal{M}_\diamond$, то есть $\|D_x\mathcal{F}_\diamond(x)\| \geq \tilde{c}E_u(x)\|dx\|$.

Во-вторых, мы должны доказать аналог (4.62); то есть

$$\mu_\diamond \left(\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon^u(\hat{\mathcal{S}}_1) \right) < C\varepsilon, \quad (8.32)$$

где

$$\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon^u(\hat{\mathcal{S}}_1) = \left\{ x \in \mathcal{M}_\diamond : E_u(x)d^u(x, \hat{\mathcal{S}}_1) < \varepsilon \right\}$$

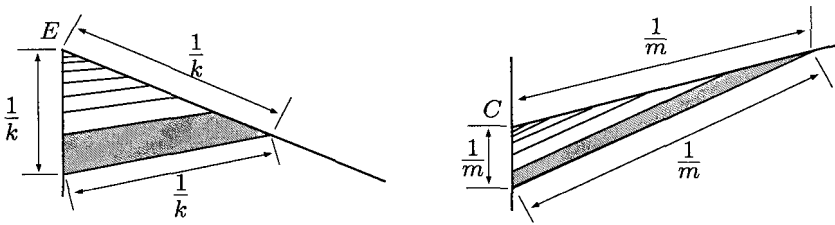


Рис. 8.13. Линии разрыва

и $d^u(x, \hat{S}_1)$ — длина самой короткой неустойчивой кривой, которая соединяет x с множеством $\hat{S}_1$.

Здесь требуется детальный анализ особенностей вблизи точек, где аккумулируются особые линии, то есть вблизи точек E, B, C, D шестиугольника, изображенного на рис. 8.10. Крупный план окрестностей точек E и C показан на рис. 8.13; картина вблизи точек B и D симметрична.

Точки первых столкновений в длинной серии из k скользящих столкновений заполняют серый четырехугольник слева (вблизи E); точки, предшествующие серии из m отражений от плоских сторон, заполняют серый четырехугольник справа (вблизи C).

УПРАЖНЕНИЕ 8.43. Покажите, что размеры этих областей, в смысле $\asymp$, такие, как указано на рис. 8.13. Таким образом, левый четырехугольник имеет размеры $k^{-1} \times k^{-2}$, а правый — $m^{-1} \times m^{-2}$.

Пересечение $\tilde{U}_\varepsilon^u$ с левым четырехугольником лежит в окрестности его границы толщиной $ck^{-1/2}\varepsilon$, а пересечение $\tilde{U}_\varepsilon^u$ с правым четырехугольником лежит в окрестности его границы толщиной $cm^{-1}\varepsilon$, где $c > 0$ — константа.

Теперь

$$\mu_\diamond \left(\tilde{U}_\varepsilon^u(\hat{S}_1) \right) < c \sum_k k^{-5/2} \varepsilon + c \sum_m m^{-2} \varepsilon < C\varepsilon \quad (8.33)$$

для некоторых констант $c, C > 0$ (заметим, что дополнительный множитель k^{-1} здесь учитывает плотность $\cos \varphi \asymp 1/k$ меры $\mu_\diamond$). ■

УПРАЖНЕНИЕ 8.44. Докажите линейную оценку для остатка, аналогичную (8.31), в p -метрике:

$$\mu_\diamond \{x \in \mathcal{M}_\diamond : p^u(x) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon,$$

где $p^u(x)$ — расстояние в p -метрике от x до ближайшей концевой точки $W^u(x)$. Указание: вспомните доказательство формулы (4.60) в § 4.14; функция $E_u(x)$ может быть определена так же, как выше. Положим

$$\tilde{U}_{p,\varepsilon}^u(\hat{S}_1) = \left\{ x \in \mathcal{M}_\diamond : E_u(x) d_p^u(x, \hat{S}_1) < \varepsilon \right\},$$

где $d_p^u(x, \hat{S}_1)$ обозначает длину (в p -метрике) кратчайшей неустойчивой кривой, соединяющей x со множеством $\hat{S}_1$. Теперь покажите, что $\mu_\diamond(\tilde{U}_\varepsilon^u(\hat{S}_1)) < C\varepsilon$. Заметим, что (8.33) требует лишь незначительных поправок:

$$\mu_\diamond(\tilde{U}_\varepsilon^u(\hat{S}_1)) < c \sum_k k^{-3/2} \varepsilon + c \sum_m m^{-2} \varepsilon < C\varepsilon.$$

Следующее утверждение представляет собой аналог упражнения 4.50.

Лемма 8.45. Пусть $W \subset \mathcal{M}_\diamond$ — неустойчивая кривая, на которой $\mathcal{F}_\diamond$ гладко. Тогда $|\mathcal{F}_\diamond(W)| \leq C\sqrt{|W|}$, где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $x = (r, \varphi)$ точки на кривой W , а через $x_1 = (r_1, \varphi_1)$ — точки на ее образе $\mathcal{F}_\diamond(W)$. Утверждение не тривиально, только если $\cos \varphi_1 \approx 0$ (ср. (8.23)), таким образом, нужно рассмотреть два случая. Во-первых, если W состоит из первых столкновений длинной серии из k скользящих столкновений, то $|W| \leq \text{const} \cdot k^{-2}$ согласно упражнению 8.43; и, следовательно

$$|\mathcal{F}_\diamond(W)| \asymp k|W| \leq \text{const} \cdot |W|^{1/2}.$$

Более трудным будет случай, когда W состоит из последних столкновений в длинной серии из k скользящих столкновений. Тогда $\mathcal{F}_\diamond(W)$ состоит из *первых* столкновений следующей серии (на противоположной полуокружности); таким образом, $\|dx_1\| \asymp dr_1 \asymp d\varphi_1$ на $\mathcal{F}_\diamond(W)$. Введем новую переменную $s = \cos \varphi_1$ на $\mathcal{F}_\diamond(W)$ и обозначим через $s_{\min}$ и $s_{\max}$ ее экстремальные значения на этой кривой. Тогда $\|dx_1\| \asymp ds$ на $\mathcal{F}_\diamond(W)$ и $|\mathcal{F}_\diamond(W)| \asymp s_{\max} - s_{\min}$. Величина $\|dx_1\|/\|dx\| \asymp s$ представляет собой (локальный) коэффициент сжатия кривой $\mathcal{F}_\diamond(W)$ при действии отображения $\mathcal{F}_\diamond^{-1}$; ср. (8.23). Теперь

$$|W| = \int_W \|dx\| \asymp \int_{\mathcal{F}_\diamond(W)} s \|dx_1\| \asymp \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} s ds \asymp s_{\max}^2 - s_{\min}^2.$$

Тогда утверждение нашей леммы следует из очевидного неравенства: $(s_{\max} - s_{\min})^2 \leq s_{\max}^2 - s_{\min}^2$. ■

УПРАЖНЕНИЕ 8.46. Покажите, что если последовательность неустойчивых многообразий $\{W_i^u\}$ сходится при $i \rightarrow \infty$ к кривой W (в метрике C^0), то W (взятая без концевых точек) сама является неустойчивым многообразием. (Вспомните упр. 4.71.)

УПРАЖНЕНИЕ 8.47. Покажите, что почти для всех относительно меры $\mu_\diamond$ точек $x \in M_\diamond$ обе концевые точки $W^u(x)$ принадлежат $\hat{S}_{-\infty}$. (Вспомните упр. 4.73.)

Мы построили и описали устойчивые и неустойчивые многообразия для отображения возвращения $\mathcal{F}_\diamond : M_\diamond \rightarrow M_\diamond$. Конечно, они совпадают с устойчивыми и неустойчивыми многообразиями для исходного отображения $\mathcal{F}$ на $M_\diamond$. При помощи итераций отображения $\mathcal{F}$, переводящих их в область $M \setminus M_\diamond$, мы сразу же получаем устойчивые и неустойчивые многообразия для отображения $\mathcal{F}$ в полном пространстве столкновений M .

8.12. u-SRB плотности и ограничения на искажения

Здесь мы перенесем основные результаты § 5.1–5.6 на стадионы. Начнем с двух общих фактов.

Во-первых, два измеримых разбиения ξ^u и ξ^s приведенного пространства $M_\diamond$ (так же, как и целое пространство M) могут быть построены точно так же, как в § 5.1 (слово в слово). Во-вторых, условные меры неустойчивых многообразий $W = W^u(x)$ являются абсолютно непрерывными и их плотности ρ_W (u-SRB плотности) удовлетворяют фундаментальной формуле, аналогичной (5.4):

$$\frac{\rho_W(y)}{\rho_W(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{J}_W \mathcal{F}_\diamond^{-n}(y)}{\mathcal{J}_W \mathcal{F}_\diamond^{-n}(z)} \quad (8.34)$$

для всех $y, z \in W$. Здесь $\mathcal{J}_W \mathcal{F}_\diamond^{-n}(x) = \|D_x \mathcal{F}_\diamond^{-n}(dx)\| / \|dx\|$, где dx — ненулевой касательный вектор к W в точке x .

Существование этого предела для типичных неустойчивых многообразий W может быть доказано практически так же, как в § 5.2, но с двумя важными поправками. Во-первых, возьмем логарифм и используем правило дифференцирования сложной функции, чтобы свести задачу к сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_\diamond^{-1}(y_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_\diamond^{-1}(z_n)), \quad (8.35)$$

где $W_n = \mathcal{F}_\diamond^{-n}(W)$ и $y_n = \mathcal{F}_\diamond^{-n}(y)$ (то же для z_n). Точно так же, как в § 5.2, возьмем точку $x \in W$ и обозначим $x_n = \mathcal{F}_\diamond^{-n}(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_\diamond^{-1} &= \frac{1}{|1 + \tau_{n+1} \mathcal{B}_{n+1}^+|} \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_{n+1}} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{V}_{n+1}^2}}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}} = \\ &= \frac{\cos \varphi_n}{|2\mathcal{K}_{n+1}\tau_{n+1} + \cos \varphi_{n+1} (1 + \tau_{n+1} \mathcal{B}_{n+1}^-)|} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{V}_{n+1}^2}}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}}, \end{aligned}$$

что отличается от (5.6) только двумя символами абсолютного значения. Таким образом,

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_\diamond^{-1}(x_n) &= \ln \cos \varphi_n + \frac{1}{2} \ln (1 + \mathcal{V}_{n+1}^2) - \frac{1}{2} \ln (1 + \mathcal{V}_n^2) - \\ &\quad - \ln |2\mathcal{K}_{n+1}\tau_{n+1} + \cos \varphi_{n+1} (1 + \tau_{n+1} \mathcal{B}_{n+1}^-)|, \end{aligned} \quad (8.36)$$

что отличается от (5.7) еще одним символом абсолютного значения. И снова, благодаря равномерной гиперболичности $\mathcal{F}_\diamond$, мы получаем

$$|\ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_\diamond^{-1}(y_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_\diamond^{-1}(z_n)| \leq \widehat{C} \Lambda^{-n} \max \left| \frac{d}{dx_n} \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_\diamond^{-1}(x_n) \right|,$$

где максимум берется по всем $x_n \in W_n$, а d/dx_n обозначает производную по евклидовой длине на W_n . Дальнейшие рассуждения, аналогичные рассуждениям § 5.2, говорят, что производные всех слагаемых в правой части (8.36), за исключением первого, равномерно ограничены. Производная первого слагаемого имеет вид

$$\left| \frac{d}{dx_n} \ln \cos \varphi_n \right| = \left| -\frac{\sin \varphi_n}{\cos \varphi_n} \frac{d\varphi_n}{dr_n} \frac{dr_n}{dx_n} \right| \leq \frac{\text{const} \cdot |\mathcal{V}_n|}{\cos \varphi_n}.$$

Для рассеивающих билиардов $\mathcal{V}_n \asymp 1$, и, таким образом, мы получали (5.8), но здесь мы можем сделать нечто большее: а именно,

$$\frac{d}{dx_n} \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_\diamond^{-1}(x_n) = P_n(x_n) + \frac{|\mathcal{V}_n|}{\cos \varphi_n} Q_n(x_n), \quad (8.37)$$

где P_n и Q_n — равномерно ограниченные функции x_n (в отличие от случая, рассмотренного в § 5.2, здесь нам не нужны их производные). Это улучшение (5.8) будет иметь значение ниже, при рассмотрении ограничений на искажения. Окончание доказательства сходимости ряда (8.35) аналогично последней части доказательства в § 5.2, поэтому мы не будем его повторять.

Далее, определим ограничения на искажения. Как и в § 5.6, положим, что W — неустойчивая кривая такая, что $W_n = \mathcal{F}_\diamond^{-n}(W)$ при $0 \leq n \leq N-1$ также является неустойчивой кривой. Кроме того, мы предположим, что $W \cap \hat{S}_1 = \emptyset$. Для каждой точки $x \in W$ положим $x_n = \mathcal{F}_\diamond^{-n}(x)$ и обозначим $\mathcal{J}_W \mathcal{F}_\diamond^{-n}(x)$ коэффициент сжатия W при действии отображения $\mathcal{F}_\diamond^{-n}$ в точке x . Следующее утверждение является аналогом леммы 5.27.

Лемма 8.48. *Для любых $x, y \in W$ и каждого $1 \leq n \leq N$ мы имеем*

$$C_d^{-1} \leq e^{-C|W|^{1/2}} \leq \frac{\mathcal{J}_W \mathcal{F}_\diamond^{-n}(y)}{\mathcal{J}_W \mathcal{F}_\diamond^{-n}(z)} \leq e^{C|W|^{1/2}} \leq C_d,$$

где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ и $C_d = C_d(\mathcal{D}) > 0$ — некоторые константы.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.49. Здесь нет необходимости в полосах однородности, построенных в § 5.3 для рассеивающих билиардов, — ограничения на искажения определяются для всех неустойчивых кривых при условии, что они не пересекают $\hat{S}_1$. Причина заключается в том, что особые линии $\hat{S}_1$ уже делят «опасную» область, где $\cos \varphi \approx 0$, на достаточно узкие полосы (см. рис. (8.13)), что гарантирует однородность неустойчивых кривых в каждой полосе.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.50. Ограничения в лемме 8.48, очевидно, уже, чем в лемме 5.27, так как $|W|^{1/2} < |W|^{1/3}$. Это не означает, однако, что билиарды в стадионах являются «более регулярными», чем рассеивающие билиарды: степень $1/3$ была искусственным показателем нашего скорее случайного выбора полос однородности; в действительности мы легко можем модифицировать построение для того, чтобы изменить показатель $1/3$ на $1/2$, однако здесь в этом нет необходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Взятие логарифма и использование правила дифференцирования сложной функции дает

$$\begin{aligned} |\ln \mathcal{J}_W \mathcal{F}_\diamond^{-n}(y) - \ln \mathcal{J}_W \mathcal{F}_\diamond^{-n}(z)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |\ln \mathcal{J}_{W_i} \mathcal{F}_\diamond^{-1}(y_i) - \ln \mathcal{J}_{W_i} \mathcal{F}_\diamond^{-1}(z_i)| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |W_i| \max \left| \frac{d}{dx_i} \ln \mathcal{J}_{W_i} \mathcal{F}_\diamond^{-1}(x_i) \right| \leq \text{const} \sum_{i=0}^{n-1} |W_i| (1 + |\mathcal{V}_i| / \cos \varphi_i), \end{aligned}$$

где на последнем шаге мы использовали (8.37). Теперь покажем

$$|W_i| |\mathcal{V}_i| / \cos \varphi_i \leq \text{const} |W_i|^{1/2}. \quad (8.38)$$

Это тривиально, покуда $\cos \varphi_i$ не мало, что происходит только при первом и последнем столкновениях в длинной серии скользящих столкновений. При первом скользящем столкновении $|W_i| \asymp k^{-2}$ (см. упр. 8.43), $\cos \varphi_i \asymp k^{-1}$ и $|\mathcal{V}_i| \asymp 1$ (здесь k — количество столкновений в серии), откуда следует (8.38). В момент последнего столкновения $|W_i| \asymp k^{-1}$ и $\cos \varphi_i \asymp k^{-1}$, но мы также знаем, что $|\mathcal{V}_i| \asymp k^{-1}$ (см. таблицу 8.1), и это завершает доказательство (8.38). Следовательно,

$$|\ln \mathcal{J}_W \mathcal{F}_{\diamond}^{-n}(y) - \ln \mathcal{J}_W \mathcal{F}_{\diamond}^{-n}(z)| \leq \text{const} \sum_{i=0}^{n-1} |W_i|^{1/2} \leq \text{const} |W|^{1/2},$$

где на последнем шаге мы использовали равномерную гиперболичность $\mathcal{F}_{\diamond}$. Теперь лемма 8.48 доказана. ■

Следствие 8.51. Для каждой точки $x \in W$ и всех $1 \leq n \leq N$

$$C_d^{-1} \leq \frac{\mathcal{J}_W \mathcal{F}_{\diamond}^{-n}(x)}{|W_n|/|W|} \leq C_d.$$

Следующее утверждение является аналогом теоремы 5.29.

Теорема 8.52 (ограничения на искажения). Для каждого неустойчивого многообразия $W \subset \mathcal{M}_{\diamond}$, не пересекающегося с $\hat{S}_1$,

$$\left| \frac{d}{dx} \ln \rho_W(x) \right| \leq \frac{C}{|W|^{1/2}},$$

где $C = C(\mathcal{D})$ — некоторая константа.

Заметим снова, что ограничения в теореме 8.52 уже, чем в теореме 5.29, так как $|W|^{1/2} < |W|^{1/3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве теоремы 5.29, зафиксируем точку $\bar{x} \in W$. Тогда, согласно (8.34) и правилу дифференцирования сложной функции,

$$\ln \rho_W(x) = \ln \rho_W(\bar{x}) + \sum_{n=0}^{\infty} (\ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_{\diamond}^{-1}(x_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_{\diamond}^{-1}(\bar{x}_n));$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \ln \rho_W(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_{\diamond}^{-1}(x_n) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dx_n}{dx} \frac{d}{dx} \ln \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_{\diamond}^{-1}(x_n) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_{\diamond}^{-n}(x) \left[P_n(x_n) + \frac{|\mathcal{V}_n| Q_n(x_n)}{\cos \varphi_n} \right],
 \end{aligned}$$

где P_n и Q_n являются равномерно ограниченными функциями x_n из (8.37). Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{d}{dx} \ln \rho_W(x) \right| &\leq \text{const} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}_{\diamond}^{-n}(x) [1 + \mathcal{V}_n / \cos \varphi_n] \leq \\
 &\leq \text{const} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|W_n|/|W|}{|W_n|^{1/2}} \leq \\
 &\leq \text{const} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^{-n/2}}{|W_n|^{1/2}},
 \end{aligned}$$

где мы использовали (8.38), следствие 8.51 и равномерную гиперболичность $\mathcal{F}_{\diamond}$; ср. (8.22). Теорема 8.52 доказана. ■

Следствие 8.53. Для всех $x, y \in W$

$$C_d^{-1} \leq e^{-C|W|^{1/2}} \leq \frac{\rho_W(x)}{\rho_W(y)} \leq e^{C|W|^{1/2}} \leq C_d,$$

где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — некоторая константа.

Таким образом, мы описали все основные ограничения на искажения для стадионов, следуя § 5.6. Мы не будем здесь оценивать производные более высоких порядков, чтобы избежать излишних сложностей.

8.13. Абсолютная непрерывность

Здесь мы оценим якобиан отображения голономии (за общими определениями и дискуссиями отсылаем читателя к § 5.7). Пусть $W^1, W^2 \subset \mathcal{M}_{\diamond}$ — две неустойчивые кривые. Обозначим

$$W_*^i = \{x \in W^i : W^s(x) \cap W^{3-i} \neq \emptyset\},$$

где $i = 1, 2$. Отображение голономии $\mathbf{h} : W_*^1 \rightarrow W_*^2$ переводит точку $x \in W_*^1$ в $\bar{x} = W^s(x) \cap W^2$. Якобиан отображения $\mathbf{h}$ относительно меры Лебега на W^1 и W^2 удовлетворяет основной формуле, аналогичной (5.21):

$$\mathcal{J}\mathbf{h}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{J}_{W^1} \mathcal{F}_{\diamond}^n(x)}{\mathcal{J}_{W^2} \mathcal{F}_{\diamond}^n(\mathbf{h}(x))}. \quad (8.39)$$

Хотя общая теория гиперболических отображений [KS86] утверждает, что почти для всех точек $x \in W_*^1$ якобиан положителен и конечен, важно иметь для него определенные оценки.

Предположим, что W^1 и W^2 являются C^2 -гладкими кривыми с равномерно ограниченными первыми и вторыми производными (тогда, согласно предложению 8.38, их будущие образы также будут иметь равномерно ограниченные производные).

Пусть $x \in W_*^1$ и $\bar{x} = \mathbf{h}(x) \in W_*^2$. Предположим, что сегмент $W^s(x)$, лежащий между точками x и $\bar{x}$, не пересекает $\hat{S}_{-1}$ (это условие будет заменять предположение об однородности $W^s(x)$, которое мы должны были сделать для рассеивающих билиардов в § 5.8; в соответствии с замечанием 8.49). Положим $\delta = \text{dist}(x, \bar{x})$ и обозначим через $\gamma = |\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(\bar{x})|$ «угол» между касательными векторами к кривым W^1 и W^2 в точках x и $\bar{x}$ соответственно.

Следующее утверждение является аналогом теоремы 5.42.

Теорема 8.54. *Якобиан отображения голономии $\mathbf{h}$ равномерно ограничен,*

$$C^{-1} \leq \mathcal{J}\mathbf{h}(x) \leq C,$$

для всех $x \in W_*^1$; здесь $C = C(\mathcal{D}) > 1$ — константа. Более того,

$$A^{-\gamma - \delta^{1/2}} \leq \mathcal{J}\mathbf{h}(x) \leq A^{\gamma + \delta^{1/2}}, \quad (8.40)$$

где $A = A(\mathcal{D}) > 1$ — некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наши рассуждения следуют доказательству теоремы 5.42. Обозначим $W_n^i = \mathcal{F}_{\diamond}^n(W^i)$, где $i = 1, 2$ и $n \geq 1$. Обозначим также $x_n = \mathcal{F}_{\diamond}^n(x)$ и $\bar{x}_n = \mathcal{F}_{\diamond}^n(\bar{x})$ и положим $\delta_n = \text{dist}(x_n, \bar{x}_n)$. Вследствие равномерной гиперболичности $\mathcal{F}_{\diamond}$ (ср. (8.22)) $\delta_n \leq \hat{C} \delta \Lambda^{-n}$, где $\hat{C} = 1/\hat{c}$.

Возьмем логарифм выражения (8.39) и используем правило дифференцирования сложной функции

$$\ln \mathcal{J}\mathbf{h}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\ln \mathcal{J}_{W_n^1} \mathcal{F}_{\diamond}(x_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n^2} \mathcal{F}_{\diamond}(\bar{x}_n)). \quad (8.41)$$

Согласно (8.21), (8.16) и (8.3),

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{W_n^1} \mathcal{F}_\diamond(x_n) &= |1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+| \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_{n+1}} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{V}_{n+1}^2}}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}} = \\ &= \frac{|\cos \varphi_n + \tau_n (\mathcal{K}_n + \mathcal{V}_n)|}{\cos \varphi_{n+1}} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{V}_{n+1}^2}}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}},\end{aligned}$$

где, как обычно, $\tau_n = \tau(x_n)$ и $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{K}_n$ и т. д. берутся в точке x_n . Следовательно,

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{J}_{W_n^1} \mathcal{F}_\diamond(x_n) &= -\ln \cos \varphi_{n+1} + \frac{1}{2} \ln (1 + \mathcal{V}_{n+1}^2) - \\ &- \frac{1}{2} \ln (1 + \mathcal{V}_n^2) + \ln |\cos \varphi_n + \tau_n (\mathcal{K}_n + \mathcal{V}_n)|.\end{aligned}\quad (8.42)$$

Используя аналогичные обозначения, в точке $\bar{x}_n$ мы имеем

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{J}_{W_n^2} \mathcal{F}_\diamond(\bar{x}_n) &= -\ln \cos \bar{\varphi}_{n+1} + \frac{1}{2} \ln (1 + \bar{\mathcal{V}}_{n+1}^2) - \\ &- \frac{1}{2} \ln (1 + \bar{\mathcal{V}}_n^2) + \ln |\cos \bar{\varphi}_n + \bar{\tau}_n (\mathcal{K}_n + \bar{\mathcal{V}}_n)|.\end{aligned}\quad (8.43)$$

(Заметим, что $\mathcal{K}_n$ одинаково в точках x_n и $\bar{x}_n$.) Сравнение первых слагаемых в этих выражениях дает

$$|\ln \cos \varphi_{n+1} - \ln \cos \bar{\varphi}_{n+1}| \leq \frac{\text{const } |\varphi_{n+1} - \bar{\varphi}_{n+1}|}{\cos \varphi_{n+1}} \leq \text{const } \delta_{n+1}^{1/2},$$

где мы использовали оценку (8.38), точнее ее представление для «обратного хода времени». Все остальные слагаемые в (8.42) и (8.43) равномерно ограничены и дифференцируемы; отсюда легко получить

$$|\ln \mathcal{J}_{W_n^1} \mathcal{F}_\diamond(x_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n^2} \mathcal{F}_\diamond(\bar{x}_n)| \leq C \left(\delta_{n+1}^{1/2} + \gamma_n + \gamma_{n+1} + \delta_n \right), \quad (8.44)$$

где $C > 0$ — константа, а $\gamma_n = |\Delta \mathcal{V}_n| = |\mathcal{V}_n - \bar{\mathcal{V}}_n|$ обозначает «угол» между касательными векторами к кривым W_n^1 и W_n^2 в точках x_n и $\bar{x}_n$ соответственно (заметим, что $\gamma_0 = \gamma$).

Согласно лемме 8.45 (или, точнее, ее аналогу в «обратном времени»), имеем $\delta_n \leq C \delta_{n+1}^{1/2}$; таким образом, член δ_n в (8.44) может быть отброшен.

Остается оценить γ_n при всех $n \geq 0$. Для краткости обозначим $\Delta B_n^- = B_n^- - \bar{B}_n^-$, $\Delta \tau_n = \tau_n - \bar{\tau}_n$ и т. д. Во-первых, мы оценим ΔB_{n+1}^- , используя для этого (3.31):

$$\begin{aligned} \Delta B_{n+1}^- &= \frac{1}{\tau_n + 1/B_n^+} - \frac{1}{\bar{\tau}_n + 1/\bar{B}_n^+} = \\ &= -\frac{1}{\tau_n + 1/B_n^+} \frac{1}{\bar{\tau}_n + 1/\bar{B}_n^+} \left(\Delta \tau_n + \frac{1}{B_n^+} - \frac{1}{\bar{B}_n^+} \right) = \\ &= -\frac{\Delta \tau_n}{(\tau_n + 1/B_n^+)(\bar{\tau}_n + 1/\bar{B}_n^+)} + \frac{\Delta \mathcal{R}_n + \Delta B_n^-}{(1 + \tau_n B_n^+)(1 + \bar{\tau}_n \bar{B}_n^+)} \end{aligned} \quad (8.45)$$

(напомним, что $B_n^+ = \mathcal{R}_n + B_n^-$).

УПРАЖНЕНИЕ 8.55. Покажите, что $|\tau_n + 1/B_n^+| \geq \tau_{\min}/2$. Указание: если точки x_n и x_{n+1} принадлежат противоположным полуокружностям, используйте (8.2). Для столкновений на одной полуокружности ситуация аналогична рассеивающим билиардам, так как может быть реализована наша схема приведения из § 8.7.

Далее, первый член в (8.45) ограничен величиной

$$\text{const } \Delta \tau_n \leq \text{const } (\delta_n + \delta_{n+1}) \leq \text{const } \delta_n.$$

Затем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathcal{R}_n}{(1 + \tau_n B_n^+)(1 + \bar{\tau}_n \bar{B}_n^+)} &\leq \\ &\leq \frac{2\mathcal{K}_n \cos \bar{\varphi}_n - 2\mathcal{K}_n \cos \varphi_n}{(\cos \varphi_n + \tau_n(\mathcal{K}_n + \mathcal{V}_n))(\cos \bar{\varphi}_n + \bar{\tau}_n(\mathcal{K}_n + \bar{\mathcal{V}}_n))}. \end{aligned}$$

Так как знаменатель отделен от нуля согласно (8.20), то абсолютное значение дроби можно оценить как $\mathcal{O}(\delta_n)$; таким образом, (8.45) сводится к

$$\Delta B_{n+1}^- = \tilde{Q}_n^{(1)} + \frac{\Delta B_n^-}{(1 + \tau_n B_n^+)(1 + \bar{\tau}_n \bar{B}_n^+)},$$

где $|\tilde{Q}_n^{(1)}| \leq \text{const } \delta_n$. Далее, согласно (8.3)

$$\Delta \mathcal{V}_{n+1} = B_{n+1}^- \cos \varphi_{n+1} - \bar{B}_{n+1}^- \cos \bar{\varphi}_{n+1} = \tilde{Q}_{n+1}^{(2)} + \cos \varphi_{n+1} \Delta B_{n+1}^-,$$

где $|\tilde{Q}_{n+1}^{(2)}| \leq \text{const } \delta_{n+1}$. Комбинируя две последние оценки, получаем

$$\Delta \mathcal{V}_{n+1} = \tilde{Q}_n^{(3)} + \frac{\cos \varphi_{n+1}}{\cos \varphi_n} \frac{\Delta \mathcal{V}_n}{(1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+) (1 + \bar{\tau}_n \bar{\mathcal{B}}_n^+)},$$

где $|\tilde{Q}_n^{(3)}| \leq \text{const } \delta_n$. Теперь рассмотрим дробь

$$u_n := \frac{\cos \varphi_{n+1}}{\cos \varphi_n (1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+) (1 + \bar{\tau}_n \bar{\mathcal{B}}_n^+)}.$$

Легко проверить, так же, как в упражнениях 5.43 и 5.44, что при всех $0 \leq k \leq n$

$$|u_n u_{n-1} \dots u_k| \leq C / \Lambda^{n-k},$$

где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — некоторая константа, и

$$\begin{aligned} \gamma_n = |\Delta \mathcal{V}_n| &\leq \text{const} \left(\sum_{k=0}^n \delta_k / \Lambda^{n-k} + \gamma / \Lambda^n \right) \leq \\ &\leq \text{const} (\delta n / \Lambda^n + \gamma / \Lambda^n). \end{aligned} \quad (8.46)$$

Комбинируя (8.46) и (8.44), получаем

$$|\ln \mathcal{J}_{W_n^1} \mathcal{F}_\diamond(x_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n^2} \mathcal{F}_\diamond(\bar{x}_n)| \leq C \left(\frac{\delta^{1/2}}{\Lambda^{n/3}} + \frac{\delta n}{\Lambda^n} + \frac{\gamma}{\Lambda^n} \right), \quad (8.47)$$

где $C = C(\mathcal{D}) > 0$ — константа. Суммируем по n и получаем

$$|\ln \mathcal{J} \mathbf{h}(x)| \leq \text{const} \left(\gamma + \delta^{1/2} \right),$$

что завершает доказательство теоремы. ■

Как и в разделе 5.8, оценка (8.40) может быть улучшена до

$$A^{-\delta^{1/2}} \leq \mathcal{J} \mathbf{h}(x) \leq A^{\delta^{1/2}},$$

если кривые W^1 и W^2 не пересекаются и продолжаются за точки x и $\bar{x}$ на расстояние не меньше $D\delta^{1/2}$, где $D = D(\mathcal{D}) > 0$ — большая константа.

Наконец, покажем, как и в § 5.8, что якобиан $Jh(x)$, как функция точки $x \in W_*^1$, является «динамически непрерывным по Гельдеру». Пусть $Q_n(x)$ снова обозначает открытую связную компоненту множества $M_\diamond \setminus \widehat{S}_n$, содержащую точку x . Для двух точек $x, y \in M_\diamond$ обозначим через

$$s_+(x, y) = \min\{n \geq 0 : y \notin Q_n(x)\} \quad (8.48)$$

«разделяющее время».

Предложение 8.56. *Существуют константы $C > 0$ и $\theta \in (0, 1)$ такие, что*

$$|\ln Jh(x) - \ln Jh(y)| \leq C\theta^{s_+(x, y)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения $\bar{x} = h(x)$ и $\bar{y} = h(y)$. Заметим, что $s_+(\bar{x}, \bar{y}) = s_+(x, y)$; это следует из свойства продолжаемости особых линий (§ 8.10). Используя обозначения (8.41) и неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} \Delta &:= |\ln Jh(x) - \ln Jh(y)| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \ln \mathcal{J}_{W_n^1 \mathcal{F}_\diamond}(x_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n^2 \mathcal{F}_\diamond}(\bar{x}_n) - \ln \mathcal{J}_{W_n^1 \mathcal{F}_\diamond}(y_n) + \right. \\ &\quad \left. + \ln \mathcal{J}_{W_n^2 \mathcal{F}_\diamond}(\bar{x}_n) \right|. \end{aligned}$$

Пусть $m = s_+(x, y)/2$. Применим оценку (8.47) ко всем $n > m$ и лемму 8.48 (об ограничениях на искажения) ко всем $n \leq m$. Это доказывает наше утверждение при $\theta = \Lambda^{-1/4}$. ■

8.14. Леммы о росте

В предыдущих разделах мы перенесли большое количество конструкций, построенных ранее (в главах 4 и 5) для рассеивающих бильярдов, на случай стадионов Бунимовича, включая оценки размеров устойчивых и неустойчивых многообразий, их равномерную C^2 -гладкость, ограничения на искажения, абсолютную непрерывность и регулярность отображения гомотопии.

Как отмечалось ранее, все эти основные результаты могут быть перенесены также на другие классы бильярдных столов Бунимовича, но здесь мы удержимся от этого, чтобы оставить наше изложение достаточно коротким.

Однако именно сейчас мы находимся на важнейшем этапе. В соответствии с нашей программой изучения, разработанной для рассеивающих билиардов в главах 4–7, нам требуется аналог первой леммы о росте (теорема 5.52), которая является важнейшим элементом во всех наших рассуждениях в конце главы 5, а также в главах 6 и 7.

Например, вторая и третья леммы о росте (теоремы 5.53 и 5.61) следуют из первой стандартным образом (см. доказательства в главе 5). Теоремы 5.66 и 5.67, а также фундаментальная теорема 5.70 после этого могут быть легко перенесены на случай билиардов Бунимовича, так как их доказательства основаны на леммах о росте и других основных фактах, установленных ранее (хотя некоторые технические детали должны быть модифицированы для нового класса билиардов). Тогда мы будем иметь удобную позицию для изучения эргодических и статистических свойств столов Бунимовича за счет использования наших рассуждений из глав 6 и 7.

Однако первая лемма о росте представляет собой серьезную задачу. В отличие от основных фактов, доказанных ранее, эта лемма является очень тонкой и чувствительной к деталям динамики. Перед тем как перейти к ее доказательству, мы должны обсудить различные аспекты этой леммы в контексте билиардов Бунимовича.

Во-первых, лемма о росте сконструирована для равномерно гиперболических отображений согласно § 5.9. Она просто не работает для неравномерно гиперболических систем, даже если они не содержат особенностей.

УПРАЖНЕНИЕ 8.57. Пусть $F: M \rightarrow M$ — гладкое гиперболическое отображение на двумерном многообразии. Предположим, что существует константа $C > 0$ такая, что для каждого $\delta > 0$ и $n \geq 1$ существует неустойчивая кривая W длины $|W| < \delta$, удовлетворяющая условию $|F^n(W)| < C|W|$. Предположим также, что имеют место ограничения на искажения, указанные в лемме 8.48. Покажите, что аналог теоремы 5.52 для такого отображения не имеет места. Указание: рассмотрите $\varepsilon \ll |W|$ и выберите n таким образом, что $c_1 \vartheta_1^n < 1/C$. Заметим также, что в соответствии с ограничениями на искажения отображение F^n становится почти линейным на W при $\delta \rightarrow 0$.

Таким образом, первая лемма о росте не может быть справедливой для исходного билиардного отображения $\mathcal{F}$ для столов Бунимовича, поэтому мы снова вынуждены использовать приведенное отображение $\mathcal{F}_\diamond$. Оно является равномерно гиперболическим, но тут на пути леммы о росте возникают другие преграды.

Рассмотрим маленькую неустойчивую кривую W в «проблемной» зоне $M_\diamond$, в которой аккумулируются особые линии. Например, пусть W

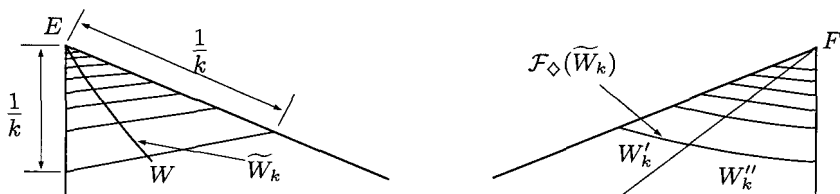


Рис. 8.14. Неустойчивая кривая W (слева) и ее образы $\mathcal{F}_\diamond(W)$ (справа)

заканчивается в вершине E шестиугольника $AHBFGE$ (соответствующий уголок $\mathcal{M}_\diamond$ показан на рис. 8.13 и слева на рис. 8.14). Тогда W делится на кусочки длины $\asymp 1/k^2$, где $k_1 < k < \infty$, а $k_1 \asymp 1/|W|$; каждый кусочек растягивается отображением $\mathcal{F}_\diamond$ с коэффициентом $\asymp k$.

УПРАЖНЕНИЕ 8.58. Проверьте, что в обозначениях теоремы 5.52

$$\mathbf{m}_W(r_1(x) < \varepsilon) \asymp \varepsilon |\ln \varepsilon|$$

для всех $\varepsilon \ll |W|$; следовательно, оценка, о которой говорится в теореме, должна нарушаться.

Причина несостоятельности первой леммы о росте для отображения $\mathcal{F}_\diamond$ станет ясна, если мы вспомним ее доказательство (для рассеивающих бильярдов) в § 5.10: ключевой элемент этого доказательства состоял в лемме 5.56, в неравенстве (5.38). В терминах $\mathcal{F}_\diamond$ она утверждает следующее: возьмем неустойчивую кривую $W \subset \mathcal{M}_\diamond$, обозначим W_k все гладкие компоненты $\mathcal{F}_\diamond(W)$ и положим

$$\lambda(W_k) = \max_{y \in W_k} \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}_\diamond^{-1}(y).$$

Тогда аналог (5.38) будет иметь вид

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \sup_{W: |W| < \delta} \sum_k \lambda(W_k) < 1. \quad (8.49)$$

Это свойство в общем случае не выполняется для стадионов. Действительно, для неустойчивых кривых W , заканчивающихся в вершине E шестиугольника $AHBFGE$ (см. выше), их образ $\mathcal{F}_\diamond(W)$ имеет счетное количество компонент $\{W_k\}$, $k \geq \mathcal{O}(1/|W|)$, для которых $\lambda(W_k) \sim \text{const}/k$. Таким образом, ряд в (8.49) на самом деле расходится!

Другими словами, даже если отображение $\mathcal{F}_\diamond$ является равномерно гиперболическим, его гиперболичность «недостаточно сильна» для преодоления дробления, связанного с наличием особенностей, что необходимо для первой леммы о росте. Чтобы исправить положение, в дальнейшем мы уменьшим пространство $\mathcal{M}_\diamond$ таким образом, чтобы усилить гиперболичность отображения возвращения.

Пусть $\mathcal{M}_\clubsuit \subset \mathcal{M}_\diamond$ состоит только из *первых* отражений от фокусирующих дуг. Таким образом, шестиугольники превращаются в параллелограммы: пространство $\mathcal{M}_\clubsuit$ будет представлять собой объединение параллелограмма $ECBD$ (рис. 8.10) и аналогичного параллелограмма, соответствующего противоположной полуокружности. Сформулируем два простых факта, имеющих отношение к отображению возвращения $\mathcal{F}_\clubsuit: \mathcal{M}_\clubsuit \rightarrow \mathcal{M}_\clubsuit$.

- 1) Неустойчивые кривые и неустойчивые многообразия для отображения $\mathcal{F}_\clubsuit$ автоматически являются неустойчивыми кривыми/многообразиями для отображения $\mathcal{F}_\diamond$.
- 2) Для всех $x \in \mathcal{M}_\clubsuit$ мы имеем $\mathcal{F}_\clubsuit^n(x) = \mathcal{F}_\diamond^{n'}(x)$ при некотором $n \leq n' \leq 2n$.

Основываясь на этих фактах, нетрудно перенести все наши предыдущие результаты с $\mathcal{F}_\diamond$ на $\mathcal{F}_\clubsuit$. Вернемся к проверке ключевого неравенства (8.49) для нового отображения $\mathcal{F}_\clubsuit$.

Пусть снова неустойчивая кривая $W \subset \mathcal{M}_\clubsuit$ заканчивается в вершине E (параллелограмма $ECBD$). Как мы заметили, неустойчивая кривая W будет разрезана особенностями отображения $\mathcal{F}_\diamond$ на счетное количество кусочков; обозначим их $\{\widetilde{W}_k\}$, где $k \geq k_W \sim 1/|W|$. Образ $\mathcal{F}_\diamond(\widetilde{W}_k)$ каждого кусочка будет лежать вблизи вершины F ; см. рис. 8.14. Здесь он будет разрезан отображением $\mathcal{F}_\diamond$ на две подкривые вдоль особой линии $\mathcal{F}_\diamond$, протянувшейся вниз и влево от вершины F (эта линия изображена на рис. 8.12), и мы обозначим эти подкривые W'_k и W''_k .

Заметим, что $\mathcal{F}_\clubsuit = \mathcal{F}_\diamond^2$ на W . Первая итерация $\mathcal{F}_\diamond$ растягивает каждый кусочек $\widetilde{W}_k$ кривой W с коэффициентом $\asymp k$, а вторая итерация $\mathcal{F}_\diamond$ растягивает подкривые W'_k и W''_k с коэффициентом $\geq \text{const} \sqrt{k}$ согласно (8.24). Следовательно, если мы обозначим $W_k^{(1)} = \mathcal{F}_\diamond(W'_k)$ и $W_k^{(2)} = \mathcal{F}_\diamond(W''_k)$, где $k \geq k_W$ ($k_W \sim 1/|W|$), все компоненты $\mathcal{F}_\clubsuit(W)$, то $\lambda(W_k^{(i)}) \leq \text{const} k^{-3/2}$, где $i = 1, 2$. Таким образом, ряд в (8.49) будет сходиться и его сумма будет равна $\mathcal{O}(k_W^{-1/2}) = \mathcal{O}(|W|^{1/2})$. Теперь малость W гарантирует, что сумма будет меньше единицы.

Существует и другая проблемная зона, в которой аккумулируются особые линии: окрестность точки C ; ср. рис. 8.10. Особые линии отображения $\mathcal{F}_\diamond$ вблизи C показаны на рис. 8.12. Новое отображение $\mathcal{F}_\clubsuit$ имеет большее количество линий разрыва вблизи C ; они показаны на рис. 8.15 (сравните рисунок с рис. 8.13). Здесь присутствуют особые линии двух типов: старые особые линии ниже линии CF и новые — выше линии CF . Причина появления второго множества особых линий следующая: точки ниже линии CF отображаются исходным бильярдным отображением $\mathcal{F}$ непосредственно к плоской стороне стадиона, в то время как траектории точек выше CF испытывают еще одно столкновение с той же полуокружностью, после чего начинается длинная серия отражений от плоских сторон стадиона (пример такой траектории показан на рис. 8.16).

Особые линии отображения $\mathcal{F}_\clubsuit$ делят окрестность точки C в пространстве $\mathcal{M}_\clubsuit$ на клетки двух типов: $D_{1,m}$ (лежащие ниже CD) и $D_{2,m}$ (лежащие выше CF), где $m \geq 1$ — количество последовательных отражений от плоских сторон стадиона вдоль траекторий точек $x \in D_{i,m}$, $i = 1, 2$, перед тем, как они достигают противоположной полуокружности. Эти клетки показаны на рис. 8.17; также указаны координаты их вершин (с точностью до главного члена, так что d/m означает $d/m + o(1/m)$ и т.д.). Здесь d обозначает длину плоских сторон стадиона; см. рис. 8.7.

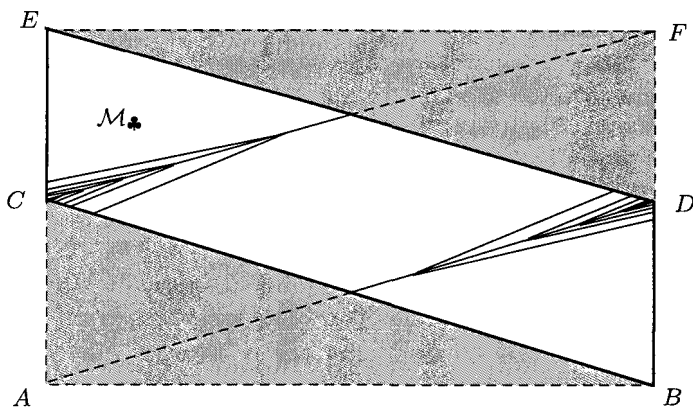


Рис. 8.15. Параллелограмм $ECBD$ множества $\mathcal{M}_\clubsuit$ и его особые линии вблизи вершин C и D

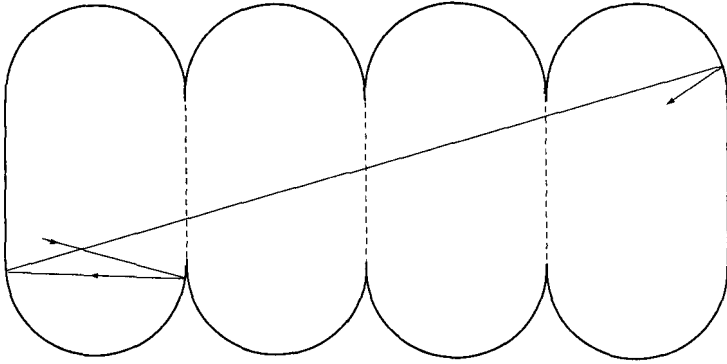


Рис. 8.16. Траектория, отражающаяся от полуокружности перед длинной серией «плоских столкновений»

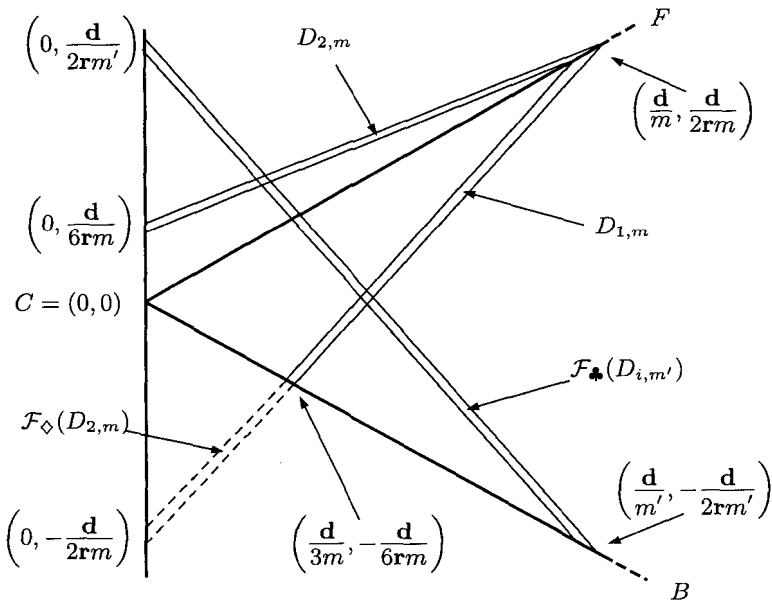


Рис. 8.17. Клетки $D_{1,m}$ и $D_{2,m}$ и образ $F_\clubsuit(D_{i,m'})$ вблизи вершины C . Вершина C имеет координаты $r = 0$ и $\varphi = 0$; другие координаты указаны в порядке возрастания

УПРАЖНЕНИЕ 8.59. Проверьте сформулированные выше утверждения. Проверьте также значения координат вершин клеток. Указание: проверку следует проводить прямым путем, не используя ничего, кроме элементарной геометрии.

Далее, предположим, что W — неустойчивая кривая «второго поколения»; то есть ее прообраз $W_{-1} = \mathcal{F}_{\clubsuit}^{-1}(W)$ также является неустойчивой кривой. Тогда сама кривая W_{-1} лежит в клетке $D_{i,m'}$ с некоторыми $i = 1, 2$ и $m' \geq 1$ (конечно, W_{-1} лежит на противоположной полуокружности $\partial\mathcal{D}$, но соответствующая клеточная структура здесь аналогична).

Рис. 8.17 изображает образ $\mathcal{F}_{\clubsuit}(D_{i,m'})$ клетки $D_{i,m'}$, наложенный на особые кривые отображения $\mathcal{F}_{\clubsuit}$. Область $\mathcal{F}_{\clubsuit}(D_{i,m'})$ состоит из точек, попадающих на полуокружность после m' последовательных отражений от плоских сторон стадиона. Относительно инволюции (§ 2.14) точки $(r, \varphi) \in \mathcal{F}_{\clubsuit}(D_{i,m'})$ соответствуют $(r, -\varphi) \in D_{1,m'} \cup \mathcal{F}_{\diamond}(D_{2,m'})$; см. рис. 8.17 (заметим, что $\mathcal{F}_{\diamond}(D_{2,m'})$ является продолжением $D_{1,m'}$ вниз от линии CB). Таким образом, область $\mathcal{F}_{\clubsuit}(D_{i,m'})$ симметрична области $D_{1,m'} \cup \mathcal{F}_{\diamond}(D_{2,m'})$ относительно горизонтальной линии $\varphi = 0$. Заметим также, что образы $\mathcal{F}_{\clubsuit}(D_{i,m'})$ при $i = 1$ и $i = 2$ выглядят одинаково; на самом деле они примыкают друг к другу.

Нетрудно видеть, что область $\mathcal{F}_{\clubsuit}(D_{i,m'})$ (а следовательно, и кривая W , лежащая в ней) может пересекать только такие клетки $D_{i,m}$, где

$$m'/3 + o(m') \leq m \leq 3m' + o(m') \quad (8.50)$$

(это другое решение для упражнения 8.37). Коэффициенты $1/3$ и 3 здесь имеют значение для наших следующих оценок.

Лемма 8.60. Пусть $W_{-1} \subset D_{i,m'}$ — неустойчивая кривая с некоторым большим значением $m' \gg 1$ и $i = 1, 2$. Положим $W = \mathcal{F}_{\clubsuit}(W_{-1}) \subset \subset \mathcal{F}_{\clubsuit}(D_{i,m'})$. Тогда подкривая $W \cap D_{1,m}$ растягивается под действием отображения $\mathcal{F}_{\clubsuit}$ с коэффициентом $4m + o(m)$, а подкривая $W \cap D_{2,m}$ растягивается под действием отображения $\mathcal{F}_{\clubsuit}$ с коэффициентом $8m + o(m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кривая W имеет наклон $d\varphi/dr = -1/r + o(1)$, как видно из рисунка 8.17. Этот факт можно обосновать так: вспомним, что $d\varphi/dr = \mathcal{V} = \mathcal{K} + \mathcal{B}^- \cos \varphi$ согласно (8.3), где $\mathcal{K} = -1/r$ и $\mathcal{B} = \mathcal{O}(1/m')$. Далее, геометрические параметры клеток, показанные на рис. 8.17, говорят, что пересечение $W \cap D_{1,m}$ имеет размеры

$$|\Delta r| = \frac{d}{4m^2} + o(1/m^2) \quad \text{и} \quad |\Delta \varphi| = \frac{d}{4rm^2} + o(1/m^2).$$

Отображение $\mathcal{F}_\clubsuit$ растягивает эту кривую всюду в области $\mathcal{F}_\clubsuit(D_{i,m})$; ее образ имеет размеры

$$|\Delta r| = \frac{d}{m} + o(1/m) \quad \text{и} \quad |\Delta \varphi| = \frac{d}{rm} + o(1/m). \quad (8.51)$$

Таким образом, коэффициент растяжения кривой $W \cap D_{1,m}$ под действием отображения $\mathcal{F}_\clubsuit$ равен $4m + o(m)$.

Аналогично, пересечение $W \cap D_{2,m}$ имеет размеры

$$|\Delta r| = \frac{d}{8m^2} + o(1/m^2) \quad \text{и} \quad |\Delta \varphi| = \frac{d}{8rm^2} + o(1/m^2).$$

Отображение $\mathcal{F}_\clubsuit$ растягивает эту кривую всюду в области $\mathcal{F}_\clubsuit(D_{2,m})$; ее образ имеет размеры, указанные в (8.51). Таким образом, коэффициент растяжения кривой $W \cap D_{2,m}$ под действием отображения $\mathcal{F}_\clubsuit$ равен $8m + o(m)$. Наши рассуждения несколько схематичны и ссылаются на рисунок 8.17 в ключевых местах, разобраться с деталями предоставляется читателю. ■

Подводя итог полученным оценкам, мы можем сделать вывод, что достаточно маленькая неустойчивая кривая $W \subset \mathcal{M}_\clubsuit$ в окрестности вершины C преобразуется отображением $\mathcal{F}_\clubsuit$ в кусочки $W_{i,m} = \mathcal{F}_\clubsuit(W \cap D_{i,m})$, где $i = 1, 2$ и $m'/3 + o(m') \leq m \leq 3m' + o(m')$ для некоторого $m' \geq 1$. Если мы проигнорируем члены второго порядка в наших оценках, то (8.49) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{m=m'/3}^{3m'} [\lambda(W_{1,m}) + \lambda(W_{2,m})] &= \\ &= \sum_{m=m'/3}^{3m'} \left(\frac{1}{4m} + \frac{1}{8m} \right) \leq \frac{3}{8} \ln 9 + o(1) < 1. \end{aligned} \quad (8.52)$$

УПРАЖНЕНИЕ 8.61. Проверьте, что члены второго порядка (как по низшим и высшим индексам суммирования, так и в коэффициентах растяжения) не влияют на финальный вывод: сумма остается $< 1 - \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших m' .

Удивительно, насколько тонко устроен наш анализ; незначительное изменение численных значений коэффициентов $(3, 1/3, 4, 8)$ может поставить под вопрос финальный вывод (то есть сумма может превысить единицу). Это показывает, насколько чувствительна к деталям отображения первая лемма о росте.

Замечание: мы могли бы определить пространство $M_{\clubsuit}$ таким образом, чтобы оно состояло из *последних* (а не *первых*) столкновений с фокусирующими дугами (тогда его представлял бы параллелограмм $ACFD$, изображенный на рис. 8.15). Это определение действительно было использовано в [BSC91, Mar04]. В этом случае первая лемма о росте была бы технически неверна (!), но, к счастью, она могла бы быть модифицирована и спасена за счет некоторой дополнительной работы [Mar04].

ЗАМЕЧАНИЕ 8.62. Однако первая лемма о росте на самом деле не верна для некоторых типов бильярдов Бунимовича, о чем говорится в [CZ05, глава 10]. Это происходит в случае столов Бунимовича общего вида, границы которых содержат дуги, большие полуокружности. Также нарушение имеет место в модифицированных стадионах, ограниченных двумя равными параллельными линиями и двумя одинаковыми дугами, каждая из которых *меньше* полуокружности. В обоих случаях соответствующая сумма в (8.49) расходится для любой степени отображения $F_{\clubsuit}$. Не так очевидно, могут ли (и каким образом) леммы о росте быть модифицированы и приспособлены к этим случаям.

Вернемся к стадиону; доказательство ключевой оценки (8.49) теперь почти закончено. Мы проверили ее для неустойчивых кривых во всех «проблемных» областях, в которых аккумулируются особые линии. Однако другие участки $M_{\clubsuit}$ тоже могут, что довольно удивительно, вызывать трудности. Предположим, что неустойчивая кривая W пересекает только одну особую линию S и соответствующие два кусочка W растягиваются с коэффициентами 1.8 и 1.9 (что представляет собой весьма сильное растяжение!). Тогда (8.49), очевидно, нарушается, так как $(1.8)^{-1} + (1.9)^{-1} > 1$.

Ситуация, описанная выше, не является совершенно исключительной, и она имеет место во многих бильярдах Бунимовича, включая стадионы. Это снова показывает, насколько тонко устроена оценка (8.49) и насколько легко она может быть испорчена.

Для работы с этой новой трудностью вспомним наши общие рассуждения в разделе 5.9. Они показывают, что одна линия разрыва S (делящая маленькие неустойчивые кривые на два кусочка) действительно может приводить к нарушению, если образы W соответствующим образом пересекают S при каждой итерации отображения. Однако, если образы W не испытывают дробления в течение некоторого времени, они могут снова набирать длину, и накопленный коэффициент растяжения может стать достаточно большим, чтобы (8.49) оставалось в силе.

Это наблюдение предполагает рассмотрение высоких итераций отображения $F_{\clubsuit}$. Коэффициент растяжения отображения $F_{\clubsuit}^n$ растет с n экспоненциально в соответствии со свойствами равномерной гиперболичности. Конечно, количество особых линий тоже растет экспоненциально, и их струк-

тура становится все сложнее. Но нам интересна только *локальная сложность* особых линий, которая определяется ниже, так как нам нужно работать только с малыми неустойчивыми кривыми; вспомним, что $\delta \rightarrow 0$ в (8.49).

Определим локальную сложность особенностей. Возьмем маленькое $\varepsilon > 0$, обозначим через $\mathcal{M}_{\clubsuit}^{\varepsilon}$ часть пространства $\mathcal{M}_{\clubsuit}$ с выброшенными ε -окрестностями вершин E, C, B, D , где аккумулируется бесконечное количество особых линий и где мы уже проверили ключевую оценку (8.49). Возьмем $n \geq 1$ и неустойчивую кривую W , обозначим через $K(W, n)$ количество кусочков, на которое разбивается W особыми линиями отображения $\mathcal{F}_{\clubsuit}^n$. Тогда локальная сложность особенностей определяется следующим образом:

$$K_n(\mathcal{M}_{\clubsuit}^{\varepsilon}) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \sup_{W \subset \mathcal{M}_{\clubsuit}^{\varepsilon} : |W| < \delta} K(W, n).$$

Понятие локальной сложности связано с множественностью пересечений особых линий. Предположим, что не более чем $K'_n(\mathcal{M}_{\clubsuit}^{\varepsilon})$ особых линий отображения $\mathcal{F}_{\clubsuit}^n$ пересекаются (встречаются) в произвольной точке $x \in \mathcal{M}_{\clubsuit}^{\varepsilon}$.

УПРАЖНЕНИЕ 8.63. Проверьте, что $K_n(\mathcal{M}_{\clubsuit}^{\varepsilon}) \leq K'_n(\mathcal{M}_{\clubsuit}^{\varepsilon}) + 1$. Указание: каждая особая линия может пересекать неустойчивую кривую W только один раз. Используйте также компактность особых линий.

Теперь ясно, что локальная сложность не должна расти слишком быстро с ростом n . Например, если множественных пересечений нет (скажем, не более чем две или три особые линии пересекаются в произвольной точке $x \in \mathcal{M}_{\clubsuit}^{\varepsilon}$), то K_n является константой!

Для многих бильярдов локальная сложность особенностей растет не быстрее чем по линейному закону; см. [BSC90, глава 8], или [CY00, стр. 110–112], или [Ch01, глава 5]. Оказывается, линейный рост имеет место каждый раз, когда бильярдный поток Φ^t непрерывен (хотя и не обязательно дифференцируем); стадион является одним из таких случаев. Однако доказательство этого линейного ограничения довольно сложное, поэтому мы его опустим. Сформулируем без доказательства следующий факт.

Предложение 8.64 ([CZ05]). Для произвольного стадиона существуют константы $a, b > 0$ такие, что $K_n(\mathcal{M}_{\clubsuit}^{\varepsilon}) \leq a + bn$ для любого $\varepsilon > 0$.

Теперь мы закончим доказательство (8.49) для отображения $\mathcal{F}_{\clubsuit}^n$ при некотором n . Объединяя предыдущее предложение и свойство равномерной гиперболичности (8.21), мы получаем, что соответствующая сумма

в (8.49) меньше, чем $K_n(\mathcal{M}_\clubsuit^\epsilon) \widehat{c}^{-1} \Lambda^{-n} \leq (a + bn) \widehat{c}^{-1} \Lambda^{-n}$. Если n достаточно велико, то это произведение меньше единицы.

Таким образом, мы доказали (8.49) для отображения $\mathcal{F}_\clubsuit^n$ с достаточно большим n . Зафиксируем это значение n . Теперь первая лемма о росте (для отображения $\mathcal{F}_\clubsuit^n$) может быть получена тем же путем, как в § 5.10.

Этот раздел снова демонстрирует, насколько сложны бильярды Бунимовича, если проводить все доказательства строго. Нам пришлось приложить значительное усилие, чтобы доказать первую лемму о росте для стадионов (опустив при этом некоторые части, как, например, доказательство предложения 8.64), и сделать это удалось только после дополнительного приведения пространства столкновений и замены отображения возвращения достаточно высокой его степенью. Мы также заметили, что первая лемма о росте нарушается для некоторых типов бильярдов Бунимовича.

8.15. Эргодичность и статистические свойства

Что дальше? Дальнейший анализ стадионов (без упоминания о других столах Бунимовича) мог бы потребовать одной или двух дополнительных глав, но тогда книга потеряет пропорциональность. Поэтому с этого момента мы только обзорно познакомимся с существующими результатами и только наметим методы доказательств.

При разговоре о стадионах была доказана первая лемма о росте. Как упоминалось раньше, вторая и третья леммы о росте и теоремы 5.66, 5.67 и 5.70 (все для отображения $\mathcal{F}_\clubsuit^n$) в этом случае можно получить как следствия.

Анализ главы 6 может быть применен к отображению $\mathcal{F}_\clubsuit^n$, и мы можем установить его эргодичность. Следовательно, отображение $\mathcal{F}_\clubsuit$ также является эргодическим. Так как $\mathcal{F}_\clubsuit$ — отображение возвращения, полученное из исходного бильярдного отображения $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, последнее также будет эргодическим. Перемешивание и свойства Бернулли могут быть установлены с помощью относительно небольшой дополнительной работы, как в главе 6.

Доказательство свойства Бернулли для бильярдного потока требует использования 4-петель, как и в главе 6. Ключевой элемент заключается в неинтегрируемости устойчивого и неустойчивого многообразий, которая может быть проверена геометрически, так как соответствующие волновые фронты имеют кривизну противоположных знаков (ср. § 6.11). Заметим, однако, что последнее свойство имеет место только тогда, когда бильярдная частица находится достаточно далеко от фокусирующих дуг; вблизи этих дуг оба волновых фронта имеют кривизну одного знака.

Статистические свойства отображения $\mathcal{F}_\clubsuit: \mathcal{M}_\clubsuit \rightarrow \mathcal{M}_\clubsuit$ могут быть проанализированы в той же последовательности, что и в главе 7. В конечном счете мы можем установить экспоненциальное убывание корреляций и весь букет предельных теорем для отображения $\mathcal{F}_\clubsuit$ (и непрерывных по Гельдеру функций на $\mathcal{M}_\clubsuit$).

В отличие от эргодичности, однако, статистические свойства не переносятся с отображения возвращения $\mathcal{F}_\clubsuit$ на исходное отображение столкновений $\mathcal{F}$. Действительно, всего несколько итераций $\mathcal{F}_\clubsuit$ могут соответствовать произвольному числу итераций $\mathcal{F}$; таким образом, скорости перемешивания $\mathcal{F}$ могут быть значительно ниже скоростей перемешивания $\mathcal{F}_\clubsuit$.

Уже давно предсказывалось (на основании эвристических рассуждений), что корреляционная функция $C_{f,g}(n)$ (см. (7.5)) для непрерывных по Гельдеру наблюдаемых f и g в стадионах должна затухать как $\sim 1/n$. И так как ряд $\sum_n 1/n$ расходится, то ожидалось, что центральная предельная теорема (ЦПТ) должна нарушаться в соответствии с нашим замечанием после (7.9).

Только недавно эти гипотезы были (по крайней мере отчасти) доказаны. Несколько более слабая, чем $1/n$, оценка была установлена в [Mar04, CZ05]:

$$|C_{f,g}(n)| \leq \frac{\text{const} \cdot \ln^2 n}{n}.$$

Оказалось, что рассуждения в [Mar04, CZ05] могут быть усовершенствованы таким образом, чтобы получить более точную оценку (близкую к ожидаемому const/n), и эта работа в настоящий момент идет полным ходом.

ЦПТ, в ее классической формулировке приведенная в § 7.2, была опровергнута в книге [BG06]. Вместо нее была получена довольно удивительная неклассическая ЦПТ для частичных сумм S_n (см. (7.2)). Пусть стадион ограничен двумя полуокружностями радиуса $r = 1$ и двумя линейными участками Γ_1 и Γ_2 длины $d > 0$ каждый. Возьмем непрерывную по Гельдеру наблюдаемую функцию $f(r, \varphi)$ в пространстве столкновений $\mathcal{M}$, обозначим через

$$\mathbf{I}_f = \frac{1}{2d} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(r, 0) dr$$

ее среднее значение на множестве нормальных векторов, выходящих из Γ_1 и Γ_2 (именно эти нормальные вектора порождают негиперболические траектории, которые никогда не достигают полуокружностей).

Теорема 8.65 ([BG06]). Если $I_f \neq 0$, то $S_n/\sqrt{n \ln n} \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$, где

$$\sigma_f^2 = \frac{4 + 3 \ln 3}{4 - 3 \ln 3} \times \frac{d^2 I_f^2}{4(\pi + d)}.$$

Если $I_f = 0$, то $S_n/\sqrt{n} \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$ при некотором $\sigma_f^2 \geq 0$.

Здесь мы наблюдаем неклассическую асимптотику $\sqrt{n \ln n}$ в главном случае $I_f \neq 0$; это аналогично сверхрассеиванию газов Лоренца вне диапазонов (ср. замечание 7.70).

Оценки для корреляционных функций были недавно получены для некоторых новых классов билиардов Бунимовича [CZ05], но статус ЦПТ и других предельных теорем ограничен приведенным замечательным результатом.

В то время как статистические свойства для некоторых билиардов Бунимовича были получены совсем недавно, эргодические и перемешивающие свойства для *всех* классов гиперболических билиардов Бунимовича уже долгое время принимаются за факт [Bu74a, Bu74b, Bu79]; см. также [Bu90]. Мы увидели, однако, что разработанная Синаем схема для доказательства эргодичности с помощью «фундаментальной теоремы» (наша теорема 5.70) здесь может сесть на мель, так как она основана на первой лемме о росте (или ее аналоге), которая имеет тенденцию нарушаться в некоторых случаях.

Вместо этого эргодичность (и перемешивание) может быть получена с помощью альтернативной схемы, которая представляется работающей для всех билиардов Бунимовича. Она была разработана в середине 1980-х Синаем и его школой [Sin79, SC87] для тяжелых газов (значительно более сложных, чем любой плоский билиард, рассмотренный в этой книге). Затем она была модифицирована и обобщена в [KSS90, Ch93, Mar93a, LW95]. Благодаря своей гибкости она вскоре была применена к различным классам плоских хаотических билиардов с неравномерной гиперболическостью [Sz92, Mar93b, DM01, DMM03].

Эта новая схема основана на скрупулезном сооружении «регулярных накрытий» в окрестности гиперболических фазовых точек. Она довольно сложна, и ее полное описание с доказательствами могли бы составить главу, более обширную, чем глава 6. С другой стороны, она требует минимального объема информации о базовом отображении. Последнее должно лишь быть гиперболическим отображением с особенностями и иметь гладкую инвариантную меру. Наряду с тем, что стандартная абсолютная непрерывность обеспечивается общей теорией Песина и Катка – Стрельцина [Pes77a, KS86],

специальные ограничения для якобиана отображения голономии, специальные ограничения на искажения и леммы о росте не требуются. Метод «регулярных накрытий» требует довольно сильных предположений об особенностях отображения, которые, тем не менее, легко могут быть проверены почти для всех классов плоских хаотических бильярдов.

Мы опишем метод «регулярных накрытий» в разделе 9.11. За полезными комментариями к этому методу отсылаем читателя к [KSS90, LW95, Va92].

ГЛАВА 9

Фокусирующие хаотические бильярды общего вида

Эта глава по большей части является обзором последних результатов в области изучения плоских бильярдов с фокусирующими участками границы. Полные доказательства могут быть найдены в оригинальных работах [Wo86, Mar88, Don91, Bu92], которые написаны ясным языком и легко доступны; смотрите также предыдущую книгу авторов [CM03].

После исследования Бунимовичем механизма дефокусировки в бильярдах с фокусирующими дугами [Bu74a] в 1974 году (и особенно после того, как была опубликована работа, посвященная стадионам [Bu79], после 1979 года) многие математики пытались построить новые хаотические бильярды с фокусирующими участками границы. Это было непросто, потому что окружность — слишком жесткая фигура, свойства которой играют важнейшую роль в вычислениях Бунимовича.

Только в середине 1980-х Войтковский [Wo86] и Маркарян [Mar88] построили новые классы гиперболических бильярдов с фокусирующими границами другого вида, нежели дуги окружности. Позднее Донней [Don91] и Бунимович [Bu92] подвели итог этим конструкциям и представили единую теорию для класса фокусирующих кривых общего вида (названных абсолютно фокусирующими дугами Бунимовича). Все эти недавние результаты были получены с использованием либо техники инвариантных конусов, либо техники квадратичных форм; см. § 3.13 и первые три раздела здесь (оба метода, по существу, эквивалентны).

Однако наши знания относительно хаотических бильярдов с фокусирующими границами ограничиваются главным образом гиперболичностью. В некоторых случаях были установлены эргодичность и перемешивание [Sz92, Mar93b, DM01, DMM03], но эти результаты далеки от общих. (Все доказательства эргодичности использовали понятие «регулярных накрытий», упоминавшееся в предыдущем разделе.)

Дальнейшие свойства бильярдов с фокусирующими границами остаются фактически неисследованными. Ни одной технической оценки, ана-

логичной оценкам главы 5 (об ограничениях на искажения, оценках якобиана отображения голономии, размеров инвариантных многообразий и т. д.), не получено. Ничего не известно о статистических свойствах таких билиардов (хотя довольно очевидно, что перемешивание должно быть достаточно медленным).

Настоящая глава состоит из двух больших частей. Первая (разделы 9.1–9.7) посвящена гиперболичности, в ней приводятся все основные результаты в этом направлении, их взаимосвязь и большое количество примеров. Вторая часть (разделы 9.8–9.11) посвящена эргодичности. Первые три раздела (9.8–9.10) дают необходимые технические понятия, а раздел 9.11 описывает готовые к применению программы доказательства эргодичности наряду со всеми существующими приложениями.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями; ср. (2.5) и (2.17):

$$\mathcal{M}_+ = \bigcup_{\Gamma_i \subset \Gamma_+} \mathcal{M}_i, \quad \mathcal{M}_- = \bigcup_{\Gamma_i \subset \Gamma_-} \mathcal{M}_i, \quad \mathcal{M}_0 = \bigcup_{\Gamma_i \subset \Gamma_0} \mathcal{M}_i. \quad (9.1)$$

9.1. Доказательство гиперболичности с помощью техники конусов

Эти методы очень хорошо объяснены в работах Войтковского [Wo86] и Доннея [Don91]. Они содержат детальные исследования эволюции волновых фронтов, отражающихся от фокусирующих границ билиардного стола. Основным моментом является проверка того, что эти фронты после отражения становятся фокусирующимися, затем дефокусируются и приходят к следующему столкновению в виде рассеивающихся фронтов (ср. § 8.2).

Войтковский доказал гиперболичность билиардов с фокусирующими границами, удовлетворяющими общему условию (смотри ниже (9.11)), с помощью явного геометрического построения инвариантных конусов. Позже гиперболичность была доказана для более общего класса билиардных столов с использованием более сложных конусных полей (см. § 9.6).

Ниже мы будем использовать обозначения и результаты раздела 3.7.

9.1.1. Время фокусировки

Введем понятие времен фокусировки для бесконечно малых семейств траекторий, которые будут использоваться в качестве проективных координат.

Вариация $\eta(\alpha)$ есть однопараметрическое гладкое семейство линий в $\mathbb{R}^2$. Пусть $z \in \mathcal{M}$, $u \in \mathcal{T}_z\mathcal{M}$ и $\xi: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ — кривая такая,

что $\xi(0) = z$ и $\xi'(0) = u$. Свяжем с u вариацию

$$\eta_+(\alpha) = \{q(a) + tv(a), t \in \mathbb{R}, |\alpha| < \varepsilon\};$$

здесь $\xi(\alpha) = (q(\alpha), v(\alpha))$. Будем говорить, что $\eta_+(\alpha)$ *фокусируется в момент времени* f^+ , если существует $f^+ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} t(\alpha)$, где $t(\alpha)$ определяется пересечением линий $\eta_+(\alpha)$ и $\eta_+(0) = q(0) + tv(0)$. Также рассмотрим вариацию

$$\eta_-(\alpha) = q(a) + t\tilde{v}(a), t \in \mathbb{R},$$

где вектор $\tilde{v}(a)$ получается отражением вектора $v(a)$ относительно касательной линии к $\partial\mathcal{D}$ в точке $q(a) \in \partial\mathcal{D}$. Определим время *фокусировки* f^- вариации $\eta_-(\alpha)$, следуя описанному выше способу.

Хотя для каждого вектора $u \in \mathcal{T}_z\mathcal{M}$ мы можем построить бесконечно много различных вариаций $\eta_+(\alpha)$ ($\eta_-(\alpha)$), каждая из них будет фокусироваться в одно и то же время f^+ (соответственно f^-). Альтернативное определение времен фокусировки заключается в следующем: $\eta_+(\alpha)$ фокусируется, если вектор $\partial\eta_+/\partial\alpha|_{\alpha=0}$ параллелен u при некотором $t = f^+ \in \mathbb{R}$. Мы говорим, что вектор u фокусируется в будущем (в прошлом), если вариация $\eta_+(\alpha)$ (соответственно $\eta_-(\alpha)$) фокусируется.

Рассмотрим два векторных поля $X_r = \partial/\partial r$ и $X_\varphi = \partial/\partial\varphi$ на $\mathcal{M}$. Если $z = (r, \varphi) \in \mathcal{M}$ и вектор $u = u_r\partial/\partial r + u_\varphi\partial/\partial\varphi \in \mathcal{T}_z\mathcal{M}$, где $u_r, u_\varphi \in \mathbb{R}$, то *будущее* и *прошлое* времена фокусировки $f^+(u)$, $f^-(u)$ вектора u определяются формулой (см. [Wo86])

$$f^\pm(u) = \begin{cases} \frac{-\cos\varphi}{\mathcal{K}(r) \pm m(u)}, & \text{если } u_r \neq 0, \\ 0, & \text{если } u_r = 0, \end{cases} \quad (9.2)$$

где $m(u) = u_\varphi/u_r$ — наклон u .

Мы говорим, что u является *дивергентным* (*конвергентным*), если $f^+(u)$ отрицательно (положительно), и u — *плоский*, если $f^+(u) = \infty$. Позднее, когда мы будем рассматривать поля конусов, мы будем использовать обозначение $f^\pm(z, u)$ вместо $f^\pm(u)$, чтобы указать на зависимость от точки z .

9.1.2. Закон отражения

Пусть $z = (r, \varphi) \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_1$ — такая точка, что определена точка $\mathcal{F}z = (r_1, \varphi_1)$. Для любого $u \in \mathcal{T}_z\mathcal{M}$ положим $f_0 = f^+(u)$ и $f_1 = f^+(D_z\mathcal{F}u)$.

Тогда зеркальное уравнение (3.33) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{\tau(z) - f_0} = \frac{-2\mathcal{K}(r_1)}{\cos \varphi_1}. \quad (9.3)$$

Кривизна $\mathcal{B} = -1/f^+$ меняет знак $-$ на $+$, когда соответствующий волновой фронт фокусируется. Если конвергентный волновой фронт приходит на рассеивающий участок, то есть если $\mathcal{K}(r_1) > 0$, то после отражения он станет или «менее конвергентным» (его время фокусировки будет короче, чем в том случае, если бы столкновения не было), или дивергентным.

При подходящих условиях время фокусировки f имеет важное свойство порядка, которое будет играть важную роль при доказательстве гиперболичности билиардных отображений.

Лемма 9.1 (свойство порядка). Пусть $z \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_1$ и $u, w \in T_z \mathcal{M}$. Предположим, что $0 < f^+(z, w) < \tau(z)$ и $0 < f^+(\mathcal{F}z, D_z \mathcal{F}w)$. Тогда

$$0 \leq f^+(z, u) \leq f^+(z, w) \Rightarrow 0 < f^+(\mathcal{F}z, D_z \mathcal{F}u) \leq f^+(\mathcal{F}z, D_z \mathcal{F}w).$$

Импликация также верна, если мы заменим неравенства строгими неравенствами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (9.3) мы имеем $1/f^+(D_z \mathcal{F}w) < 1/f^+(D_z \mathcal{F}u)$. ■

Мы сразу же можем видеть, что f^+ является проективной координатой в $T_z \mathcal{M}$. Конус $\mathcal{C}(z) \subset T_z \mathcal{M}$ может быть отождествлен с замкнутым интервалом значений f^+ :

$$\mathcal{C}(z) = \{u \in T_z \mathcal{M} : f_1 \leq f^+(u) \leq f_2\}$$

для некоторых вещественных чисел f_1, f_2 таких, что $-\infty \leq f_1 < f_2 \leq +\infty$.

Определение 9.2. Пусть $\mathcal{C}(z)$ — конусное поле на $\mathcal{M}_-$ и $\mathcal{C}'(z)$ — дополнение конусного поля. Для каждого $z \in \mathcal{M}_-$ определим

$$f^+(z) = \sup_{u \in \mathcal{C}(z)} f^+(z, u), \quad f^-(z) = \sup_{u \in \mathcal{C}'(z)} f^-(z, u).$$

Следующий результат дает простой критерий, который помогает проверить, является ли конусное поле на $\mathcal{M}_-$ инвариантным. Впервые этот факт был доказан в [Don91].

Лемма 9.3 (лемма о фокусировке [Don91]). Пусть $z \in \mathcal{M}_- \setminus \mathcal{S}_1$ — такая точка, что $\mathcal{F}z \in \mathcal{M}_-$. Предположим, что $0 \leq f^+(z, u) \leq \tau(z)$ для каждого $u \in \mathcal{C}(z)$ и $0 < f^-(\mathcal{F}z) \leq \tau(z)$. Тогда

$$0 < f^+(z) + f^-(\mathcal{F}z) \leq \tau(z) \Rightarrow D_z \mathcal{F} \mathcal{C}(z) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{F}z),$$

и если неравенство в левой части строгое, то мы имеем строгую инвариантность $D_z \mathcal{F} \mathcal{C}(z) \subset \text{int}(\mathcal{C}(\mathcal{F}z))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w_1 \in \mathcal{C}(\mathcal{F}z)$ — такой вектор, что $f^+(\mathcal{F}z, w_1) = f^+(\mathcal{F}z)$; другими словами, w_1 принадлежит одной из граней $\mathcal{C}(\mathcal{F}z)$. Если $w = D_{\mathcal{F}z} \mathcal{F}^{-1} w_1$, то $f^+(z, w) = \tau - f^-(\mathcal{F}z)$. Теперь, если $u \in \mathcal{C}(z)$, то $f^+(z, u) \leq f^+(z)$. По предположению мы имеем $f^+ \leq (<) \tau - f^-(\mathcal{F}z) = f^+(z, w)$, поэтому $f^+(z, u) \leq (<) f^+(z, w)$. Для завершения доказательства применим лемму 9.1. ■

Теперь мы сформулируем разновидность леммы о фокусировке для траекторий, которые ударяются о нефокусирующие участки границы.

Пусть $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ — фокусирующие дуги $\partial \mathcal{D}$ (они не обязаны быть различными). Предположим, что траектория точки z покидает $\tilde{\gamma}_1$ и возвращается к фокусирующей части $\partial \mathcal{D}$ в момент времени $n \geq 1$ в точке $z' = (q', v')$, $q' \in \tilde{\gamma}_2$. Другими словами, рассмотрим орбиту $\{z, \mathcal{F}z, \dots, \mathcal{F}^n z\}$, $n \geq 1$, такую, что $\pi_q(z) \in \tilde{\gamma}_1$, $\pi_q(\mathcal{F}^k z) \notin \mathcal{M}_-$ при $k = 1, \dots, n-1$ и $\pi_q(\mathcal{F}^n z) = z' \in \tilde{\gamma}_2$ (проекция π_q была введена в § 2.5). Обозначим через $\lambda(z)$ длину участка траектории между z и z' , то есть $\lambda(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \tau(\mathcal{F}^i z)$.

Лемма 9.4. При описанных условиях, если $u \in \mathcal{C}(z)$, $u' = D_z \mathcal{F}^n u$ и $w \in \mathcal{C}(z')$, то

$$0 < f^+(z) + f^-(z') \leq \lambda(z) \Rightarrow m(u') > m(w),$$

где $m(u)$ снова обозначает наклон вектора u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из оригинального доказательства леммы 1.6 в [Don91] и замечаний, идущих сразу после нашей формулы (9.3). ■

9.2. Доказательство гиперболичности с помощью квадратичных форм

Здесь мы сформулируем другой набор достаточных условий для гиперболичности гладких отображений с особенностями. В то время как техника

конусов имеет сильный геометрический привкус, эти условия являются более аналитическими. По-прежнему они достаточно просты для проверки, и они успешно применялись при изучении многих физически интересных моделей, включая бильярды (см. замечание 3.54).

9.2.1. Гладкие отображения с особенностями

Как и в § 3.1, положим M — гладкое риманово многообразие (возможно, с границей и углами), $N \subset M$ — открытое и плотное подмножество и $F: N \rightarrow M$ — диффеоморфизм N на $F(N)$ класса C^r (где $r \geq 2$). Заметим, что все итерации F определены на множестве

$$\tilde{N} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(N).$$

Предположим, что F сохраняет вероятностную меру μ на M и $\mu(\tilde{N}) = 1$.

Обозначим через $S_1 = \partial N$ множество особенностей для отображения F и через $S_{-1} = \partial F(N)$ — множество особенностей для отображения F^{-1} . Для $n \geq 1$ положим $S_n = S_1 \cup F^{-1}(S_1) \cup \dots \cup F^{-n+1}(S_1)$, множество особенностей для F^n , и, аналогично, $S_{-n} = S_{-1} \cup F(S_{-1}) \cup \dots \cup F^{n-1}(S_{-1})$, множество особенностей для F^{-n} .

9.2.2. Квадратичные формы

Напомним, что квадратичная форма Q в $\mathbb{R}^d$ представляет собой функцию $Q: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $Q(u) = Q_2(u, u)$, где Q_2 — билинейная симметричная функция на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. По эквивалентному определению, $Q: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ является квадратичной формой, если существует симметричная матрица A такая, что $Q(u) = u^T A u$ при $u \in \mathbb{R}^d$ (здесь u^T обозначает транспонирование вектор-столбца u).

Квадратичная форма Q на M — это функция $Q: TM \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что ограничение Q_x на $T_x M$ почти в каждой относительно меры μ точке $x \in M$ является квадратичной формой в обычном смысле.

Мы говорим, что квадратичная форма Q является *невыврожденной* в x , если для каждого ненулевого вектора $u \in T_x M$ существует $v \in T_x M$ такой, что $Q_2(v, u) \neq 0$ (это эквивалентно условию $\det A \neq 0$ для соответствующей симметричной матрицы A). Мы говорим, что Q является *положительной* (неотрицательной), если в каждой точке x форма Q_x положительно определена (положительно полуопределена); то есть $Q_x(u) > 0$ (соответственно $Q_x(u) \geq 0$) для всех $0 \neq u \in T_x M$. Для формы Q и точки $x \in M$

положим $K_Q(x)$ — количество положительных собственных значений матрицы, определяющей форму Q_x (то есть максимальная размерность подпространства $T_x M$, на котором форма является положительной).

Обозначим через $F^\# Q$ (возврат Q с помощью F) функцию, определенную по правилу $(F^\# Q)_{x^*} u = Q_{F(x)}(D_x F u)$. Легко убедиться в том, что $F^\# Q$ также является квадратичной формой и что $F^\# Q$ не вырождена в x , если и только если Q не вырождена в $F(x)$. Заметим, что $P = F^\# Q - Q$ также является квадратичной формой.

Для квадратичной формы Q , определенной на орбите точки x , мы положим

$$\begin{aligned} S_x &:= \{u \in T_x M : Q(D_x F^n u) < 0, \forall n \geq 0\}, \\ U_x &:= \{u \in T_x M : Q(D_x F^n u) > 0, \forall n \leq 0\}. \end{aligned}$$

9.2.3. Область Песина

Множество гиперболических точек в $\tilde{N}$ часто называют *областью Песина* отображения F :

$$\Sigma(F) = \{x \in \tilde{N} : \lambda_i(x) \neq 0, \text{ для всех } i\},$$

где $\lambda_i(x)$ — показатели Ляпунова для отображения F в точке x . Заметим, что область Песина $\Sigma(F)$ инвариантна относительно F .

Теорема 9.5 ([Mar94]). Пусть $Q: TM \rightarrow \mathbb{R}$ — невырожденная квадратичная форма такая, что:

- (i) Q_x измеримо зависит от x ;
- (ii) для каждой точки $x \in \tilde{N}$ мы имеем $0 < K_Q(x) < \dim M$ и $K_Q(F^n(x)) = K_Q(x)$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$;
- (iii) $P_x = (F^\# Q - Q)_x$ положительна для каждого $x \in \tilde{N}$.

Тогда $\mu(\Sigma(F)) = 1$. Более того, для каждой точки $x \in \Sigma(F)$ мы имеем $S_x = E_x^s$ и $U_x = E_x^u$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.6. Условие (iii) может быть несколько ослаблено: достаточно потребовать $P \geq 0$ и положительность P с некоторого момента; то есть почти для всех $x \in M$ существует $k = k(x) \in \mathbb{N}$ такое, что $Q(D_x F^{k+1} u) - Q(D_x F^k u) > 0$ для каждого ненулевого вектора $u \in T_x M$.

Заметим, что требование $K_Q(F^n(x)) = K_Q(x)$ в предположении (ii) автоматически выполняется в двух важных случаях:

- (а) M имеет размерность 2; в этом случае $K_Q(x) = 1$ при всех $x \in \tilde{N}$;
 (б) Q непрерывна на M , и M связно; в этом случае $K_Q(x)$ является непрерывной интегральной функцией на M ; следовательно, она постоянна.

Если квадратичная форма Q непрерывна на M , то пространства E_x^u и E_x^s зависят от x непрерывно. В этом случае теорема была доказана в [Mar88]. Заметим, что обратное также верно.

Теорема 9.7 ([Mar94]). Если $\mu(\Sigma(F)) = 1$, то существует квадратичная форма $Q: TM \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что условия (i)–(iii) теоремы 9.5 выполняются.

9.3. Квадратичные формы в билиардах

Здесь мы разработаем общий аппарат, который применим практически к каждому хаотическому билиарду и позволяет нам устанавливать гиперболичность.

Пусть $x = (q, v) \in \mathcal{M}$ — точка с координатами (r, φ) и $v = (dr, d\varphi) \in T_x \mathcal{M}$ — касательный вектор. Введем новые координаты (U, V) в касательном пространстве $T_x \mathcal{M}$ с помощью ортогональной проекции $(dr, d\varphi)$ на подпространство, перпендикулярное v :

$$U = \cos \varphi dr \quad \text{и} \quad V = \mathcal{K}dr + d\varphi.$$

U является ограничением на $\mathcal{M}$ трансверсального поля Якоби вдоль билиардной траектории, а V — его производная. По этой причине U иногда обозначается J , а $V = J'$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.8. Пусть $u = (U, V)$. Покажите, что время (будущей) фокусировки $f^+(u) = -U/V$. Указание: воспользуйтесь формулой (9.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 9.9. Рассмотрим риманову метрику ρ , заданную формой $U^2 + V^2$ на касательном расслоении к $\mathcal{M}$. Можно доказать, что симплектическая форма $\omega = \cos \varphi dr \wedge d\varphi$ принимает вид $U \wedge V$ в координатах U, V , таким образом, форма объема, порожденная метрикой ρ , совпадает с симплектической формой ω .

Эволюция (U, V) вдоль сегмента траектории длины τ между двумя последовательными столкновениями (в точках (r, φ) и (r_1, φ_1)), а также в момент столкновения в точке (r_1, φ_1) определяется соответственно как

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2\mathcal{K}(r_1)}{\cos \varphi_1} & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.4)$$

Тогда производная $\mathcal{F}$ в $x = (r, \varphi)$ в координатах U, V имеет вид

$$D_x \mathcal{F} = - \left(\frac{1}{\cos \varphi_1} \frac{\tau}{\cos \varphi_1} \frac{2\tau \mathcal{K}(r_1)}{\cos \varphi_1} + 1 \right). \quad (9.5)$$

УПРАЖНЕНИЕ 9.10. Докажите формулы (9.4) и (9.5). Указание: используйте формулу (2.26).

Теперь, если $D_x \mathcal{F}(U, V) = (U_1, V_1) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}_x} \mathcal{M}$ — образ нашего вектора (U, V) , где $U_1 = \cos \varphi_1 dr_1$ и $V_1 = \mathcal{K}_1 dr_1 + d\varphi_1$, простые вычисления показывают, что

$$U = -(\tau \mathcal{K}_1 + \cos \varphi_1) dr_1 + \tau d\varphi_1 \quad \text{и} \quad V = \mathcal{K}_1 dr_1 - d\varphi_1.$$

Теперь определим измеримую невырожденную квадратичную форму

$$Q_x(U, V) = aU^2 + 2bUV + cV^2, \quad (9.6)$$

где a, b, c являются измеримыми функциями x (ниже мы будем выбирать их кусочно-непрерывными) и $ac - b^2 \neq 0$. Коэффициенты a, b, c должны удовлетворять условию (iii) теоремы 9.5 (см. также замечание 9.6). Вычислим

$$\begin{aligned} P_x(U, V) &= (\mathcal{F}^\# Q - Q)_x(U, V) = \\ &= a_1 U_1^2 + 2b_1 U_1 V_1 + c_1 V_1^2 - (aU^2 + 2bUV + cV^2). \end{aligned}$$

Обозначим $\varphi'_1 = d\varphi_1/dr_1$. Тогда

$$\begin{aligned} P_x(U, V) &= (dr_1)^2 [(a_1 - a) \cos^2 \varphi_1 + 2(b_1 - b)(\mathcal{K}_1 + \varphi'_1)(\cos \varphi_1) + \\ &\quad + (c_1 - c)(\mathcal{K}_1 + \varphi'_1)^2 + a(2\tau \cos \varphi_1(\mathcal{K}_1 + \varphi'_1) - \tau^2(\mathcal{K}_1 - \varphi'_1)^2) + \\ &\quad + 2b(-2\mathcal{K}_1 \cos \varphi_1 + \tau(\mathcal{K}_1 - \varphi'_1)^2) + 4c\mathcal{K}_1 \varphi'_1]. \end{aligned}$$

Тогда знак P зависит от следующего квадратного многочлена (по φ'_1):

$$\begin{aligned} &(c_1 - c - a\tau^2 + 2b\tau)(\varphi'_1)^2 + \\ &\quad + 2[(b_1 - b) \cos \varphi_1 + \mathcal{K}_1(c_1 - c) + a\tau \cos \varphi_1 + a\tau^2 \mathcal{K}_1 - \\ &\quad - 2b\tau \mathcal{K}_1 + 2c\mathcal{K}_1] \varphi'_1 + (a_1 - a) \cos^2 \varphi_1 + \\ &\quad + 2(b_1 - b) \mathcal{K}_1 \cos \varphi_1 + (c_1 - c) \mathcal{K}_1^2 - 2a\tau \mathcal{K}_1 \cos \varphi_1 - \\ &\quad - a\tau^2 \mathcal{K}_1^2 + 4b\mathcal{K}_1 \cos \varphi_1 + 2b\tau \mathcal{K}_1^2. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Положим $b = b_1 = 1$ для того, чтобы было легче контролировать невырожденность Q .

УПРАЖНЕНИЕ 9.11. Пусть $\mathcal{K}_1 \neq 0$ и $E = -2\mathcal{K}_1^{-1} \cos \varphi$. Показать, что $P > 0$ при каждом значении φ'_1 , если и только если выполняются два условия:

$$c_1 - c - a\tau^2 + 2\tau > 0 \quad (9.8)$$

и

$$(c - 2\tau + a\tau^2)[4c_1 - 2E + (a_1 - a)E^2/4] + c_1 E [2 - 2a\tau - (a_1 - a)E/4] + a^2\tau^2 E^2/4 < 0. \quad (9.9)$$

Соглашение. Для каждого фокусирующего участка Γ и $q \in \Gamma$ обозначим $R = 1/|\mathcal{K}(q)|$ радиус кривизны Γ в q . Окружность радиуса R , касающаяся Γ в q «изнутри» $\mathcal{D}$, называется окружностью кривизны, или соприкасающейся окружностью. Аналогичная окружность радиуса $R/2$ будет называться *окружностью половинной кривизны*. Обозначим $L = 2R \cos \varphi$ длину участка бильярдной траектории, выходящей из q под углом φ внутрь окружности кривизны.

В частности, если участок границы, содержащий точку следующего столкновения q_1 , также является фокусирующим (то есть если $\mathcal{K}_1 < 0$), то $E = L_1 = 2R_1 \cos \varphi_1$ является временем, которое траектория, прибывшая в (или покидающая) q_1 , проводит внутри окружности кривизны к $\partial\mathcal{D}$ в q_1 .

УПРАЖНЕНИЕ 9.12. Покажите, что в случае $\mathcal{K}_1 = 0$ условие (9.9) принимает вид

$$(a_1 - a)(c - c_1 - 2\tau) + aa_1\tau^2 < 0. \quad (9.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.13. Наш формализм дает еще одно доказательство гиперболичности для рассеивающих бильярдов, а также для бильярдов, имеющих и рассеивающие, и плоские границы (при условии, что множество точек, траектории которых никогда не попадают на рассеивающий участок, имеет меру нуль). Действительно, если мы возьмем $a \equiv c \equiv 0$, то (9.9) будет иметь место для рассеивающих границ (так как $\mathcal{K} > 0$). На нейтральных участках мы рассмотрим аналогичную квадратичную форму Q ; тогда $P_x \geq 0$ (в действительности она положительна на $T_x\mathcal{M}$, за исключением одного направления). Кроме того, P становится строго положительной каждый раз, когда траектория ударяется о рассеивающий участок.

9.4. Построение гиперболических бильярдов

Начнем с интересного вопроса, сформулированного в [Wo86, Mar88, Don91]: если взять некоторую выпуклую кривую $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, может ли она

быть фокусирующим участком для хаотического (гиперболического) биллиарда? Другими словами, можно ли «построить» хаотический биллиардный стол, используя заданную фокусирующую дугу Γ ? Мы найдем геометрические условия на кривую Γ , при которых ответ будет положительным.

Сначала мы исследуем локальные условия, которым должна удовлетворять фокусирующая дуга Γ для того, чтобы с ее помощью можно было построить гиперболический биллиард. Следующие эвристические наблюдения будут иметь большое значение. Посмотрим на поведение выражений (9.8) и (9.9) во время длинной серии последовательных (почти скользящих) отражений от Γ , где $\varphi \approx \pm\pi/2$. Тогда ясно, что $L \approx \tau \approx 0$ и a , c непрерывны в окрестности точек $(q_1, \pm\pi/2)$. Теперь, если $c \gg \tau$, дискриминант Δ квадратного многочлена в (9.7) удовлетворяет условию $\Delta \approx 4cc_1 \approx 4c_1^2$. Так как нам требуется $\Delta < 0$, мы делаем вывод, что $\lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi/2} c = 0$. Если $c \ll \tau$, то мы имеем $\Delta \approx 4\tau E \approx 4\tau^2$. В заключение мы должны рассмотреть $c \approx \tau$; это определяет наш выбор $c = \tau$ (или L).

Если $a \equiv 0$, $c = L$ и $c_1 = L_1$, то (9.9) немедленно приводит к

$$L + L_1 < 2\tau. \quad (9.11)$$

Если кривая Γ имеет класс C^4 , то условие (9.11) эквивалентно условию

$$\frac{d^2 R}{dr^2} < 0, \quad (9.12)$$

где r — наша обычная координата на Γ , выражающая длину дуги, и $R = -1/|K|$ — радиус кривизны кривой.

УПРАЖНЕНИЕ 9.14. Докажите, что условия (9.11) и (9.12) на фокусирующую C^4 -дугу Γ действительно эквивалентны. Указание (см. [Wo86]): пусть q_0, q_1 — различные точки Γ , выберем декартовы координаты (x, y) на плоскости таким образом, что ось x проходит через q_0 и q_1 , причем q_0 — ее начало, а q_1 имеет положительную x -координату, и положим, что дуга $q_0 q_1$ кривой Γ лежит ниже оси x (то есть $y \leq 0$). Если $\Gamma(r) = (x(r), y(r))$ параметризована длиной дуги, то обозначим $\theta(r)$ угол, который касательная линия к Γ в точке r образует с осью x . Заметим, что радиус кривизны кривой Γ равен $R = dr/d\theta$. Пусть $\tau = |q_0 q_1|$. Тогда

$$L = \int_a^b \frac{dx}{dr} dr = R(b) \sin \theta(b) - R(a) \sin \theta(a) - \int_a^b \sin \theta \frac{dR}{dr} dr$$

и

$$2\tau - L - L_1 = \int_a^b y(r) \frac{d^2 R}{dr^2} dr.$$

Это завершает наше указание к упражнению 9.14.

Далее, если $a \equiv 0$, $c = \tau$ и $c_1 = \tau_1$, то мы получаем условие

$$L_1(\tau + \tau_1) < 2\tau\tau_1. \quad (9.13)$$

Условие, сформулированное выше, «локально эквивалентно» [Mar88] условию

$$\frac{d^2 R^{1/3}}{dr^2} > 0. \quad (9.14)$$

Под локальной эквивалентностью мы понимаем то, что оба условия эквивалентны при достаточно малых τ и τ_1 . (Эта эквивалентность слабее, чем эквивалентность между (9.11) и (9.12).)

УПРАЖНЕНИЕ 9.15. Докажите, что условия (9.13) и (9.14) на фокусирующую C^4 -дугу Γ являются «локально» эквивалентными. Указание (см. [Mar88]): пусть $\psi = \pi/2 - \varphi$ и $\Gamma(\psi) = \rho(\psi)\Gamma'(0)e^{i\psi}$, где $\rho(0) = 0$, задают уравнение, определяющее кривую Γ в окрестности точки столкновения $\Gamma(0)$. Используйте разложение в ряд Тейлора для τ_1 , τ при малых значениях ψ . Напомним выражение для кривизны в полярных координатах: $\mathcal{K}_1(\psi) = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$. Далее, докажите, что (9.13) эквивалентно условию $3\rho''(0)^2\mathcal{K}_1 < 4[\rho'(0) + \rho'''(0)]$, что, в свою очередь, эквивалентно условию $3\mathcal{K}_1\mathcal{K}_1'' < 2\mathcal{K}_1'^2$, которое эквивалентно (9.14).

УПРАЖНЕНИЕ 9.16. Докажите, что эпициклоида, гипоциклоида и циклоида удовлетворяют условию (9.12). В частности, последнее имеет место для кардиоиды (замкнутой кривой, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $r(t) = 1 + \cos t$, $-\pi \leq t \leq \pi$). Дуга эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $b^2 > a^2$, где $-\pi/4 < t < \pi/4$, также удовлетворяет (9.12); см. [Wo86].

УПРАЖНЕНИЕ 9.17. Рассмотрим эллипс $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $b^2 > a^2$, $0 \leq t < 2\pi$. Докажите, что (а) дуга $-\pi/4 < t < \pi/4$ удовлетворяет условию (9.12) и (б) дуга, определяемая неравенством $\sin^2 t > b^2/(b^2 + a^2)$, удовлетворяет (9.13). Любопытно, что дуги в частях (а) и (б) не пересекаются! (См. [Mar88].)

9.4.1. Короткие фокусирующие кривые

Следующий удивительный результат был получен Доннеем [Don91] для дуг класса C^6 и независимо Маркаряном [Mar94] для дуг класса C^4 .

Теорема 9.18 ([Mar94]). Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 - C^4$ выпуклая кривая и $q \in \Gamma$. Тогда существует окрестность $U(q)$ точки q такая, что более короткая кривая $\Gamma \cap U(q)$ может быть участком границы гиперболического бильярда.

Назовем указанные выше сегменты $\Gamma \cap U(q)$ короткими фокусирующими дугами. Данная теорема дает еще один способ, в дополнение к (9.11) и (9.13), построения фокусирующих дуг, пригодных для включения в гиперболические столы.

9.4.2. Построение гиперболических бильярдных столов

Мы описали классы фокусирующих дуг, которые могут быть использованы для построения гиперболических бильярдных столов. Это не означает, конечно же, что любой бильярдный стол, составленный из таких дуг, является гиперболическим. Здесь мы опишем, как собрать куски границы различных видов для того, чтобы создать гиперболический бильярдный стол. Должны быть соблюдены некоторые простые правила («строительный кодекс»). Мы должны проверить условия на внутренние углы, образованные смежными участками, расстояния между различными участками и т. д. Следующая теорема говорит о том, как построить плоские бильярды с гиперболическим поведением, границы которых имеют произвольный вид и отвечают только одному требованию, а именно: фокусирующие участки удовлетворяют либо условию (9.11), либо (9.13).

Теорема 9.19 ([Wo86, Mar88, CM03]). Гиперболические бильярды с участками границы класса C^3 могут быть построены с помощью одной из двух следующих стратегий.

- (i) Фокусирующие участки границы удовлетворяют условию (9.11). Окружности половинной кривизны в любой точке каждого фокусирующего участка не должны содержать точек других участков или окружностей половинной кривизны других фокусирующих участков. Смежные фокусирующие участки должны образовывать внутренние углы, большие π . Фокусирующие и рассеивающие смежные участки должны образовывать внутренние углы, не меньшие π . Фокусирующие и нейтральные смежные участки должны образовывать внутренние углы, большие $\pi/2$.

- (ii) Фокусирующие участки границы удовлетворяют (9.13). Окружности кривизны фокусирующих участков не должны содержать точек других участков границы. Условия на смежные дуги аналогичны условиям пункта (i).

Кроме того, множество траекторий, которые ударяются только о плоские участки границы, должно иметь меру нуль.

Условия (9.11) и (9.13) содержат строгие неравенства. Для дуг окружности эти неравенства превращаются в тождества; таким образом, дуги окружности не допускаются приведенной выше теоремой. Это исключает из нашей общей теоремы случай бильярдов Бунимовича, поэтому мы несколько расширим ее, чтобы охватить бильярды Бунимовича.

Предложение 9.20. *В теореме, приведенной выше, мы можем допустить равенства в условиях (9.11) и (9.13). В этом случае, однако, мы должны потребовать, чтобы почти каждая траектория отражалась по крайней мере от двух различных участков границы.*

Последнее требование включено для того, чтобы отбросить некоторые тривиальные примеры, такие как, например, круглый бильярд (§ 1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 9.21. Мы видим, что условия в теореме 9.19 открыты в метрике C^3 . Следовательно, неплоские участки границы таких бильярдов могут быть возмущены в топологии C^3 и гиперболичность сохранится. Если допускаются равенства, как в предложении 9.20, то возмущения могут нарушить гиперболическое поведение в новых бильярдных столах. Это возможно в том случае, когда часть границы образуют дуги окружностей. Если дуги окружности возмущаются, условия (9.11) и (9.13) могут быть нарушены и гиперболичность будет потеряна.

Однако в [Mar94] доказано, что дуги окружности, меньшие половины окружности, могут быть возмущены в топологии C^4 с сохранением гиперболического характера. Аналогичный результат для возмущений в топологии C^6 был независимо получен Доннеем [Don91].

Теорема 9.19 также остается верной, если мы разрешим короткие фокусирующие дуги, описанные в теореме 9.18; см. [СМ03].

УПРАЖНЕНИЕ 9.22. Рассмотрим эллипс и разрежем его вдоль большой оси. Раздвинем обе половины в разные стороны вдоль малой оси. Соединим концевые точки двух половин двумя линиями, параллельными малой оси. Обозначим получившуюся область $\mathcal{D}$. Вставим в $\mathcal{D}$ две внутренние «стены», представляющие собой линейные участки, параллельные малой оси и соединяющие образы каждого фокуса в двух половинах; см. рис. 9.1. Докажите, что если две половины раздвинуты на достаточно

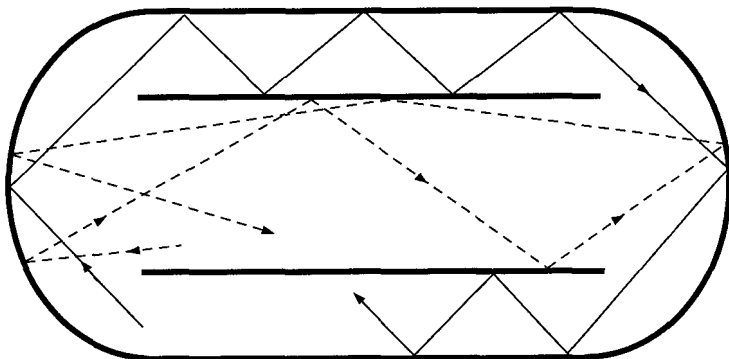


Рис. 9.1. Пример Войтковского гиперболического, но не эргодического, бильярдного стола, построенного с помощью эллипса

большое расстояние, то этот бильярд гиперболический (см. точные условия в [Wo86, приложение В]). Затем используйте свойства эллиптических бильярдных (§ 1.4), чтобы проверить, что этот бильярд имеет по крайней мере три различные эргодические компоненты (конструкция двух из них показана на рис. 9.1; третья получается обращением траекторий, показанных толстой линией). Этот замечательный пример описан Войтковским в [Wo86, приложение В].

9.5. Абсолютно фокусирующие дуги

В этом разделе мы опишем самый широкий известный класс фокусирующих дуг, пригодных для построения гиперболических бильярдных. Напомним, что конструкция Бунимовича была основана на механизме дефокусировки (§ 8.2). Бунимович потребовал, чтобы неустойчивые волновые фронты расширялись (росли) монотонно в p -метрике между двумя последовательными столкновениями, и это ограничило его анализ только дугами окружностей. Войтковский и Маркарян в некоторой степени оставили требование монотонного расширения неустойчивых фронтов, но сделали его более гибким за счет использования различных метрик в касательных пространствах. Абсолютно фокусирующие дуги ослабляют требование монотонности, пока механизм дефокусировки работает сам по себе; то есть неустойчивые волновые фронты проходят через точку фокусировки между последовательными столкновениями с фокусирующими дугами. К удивле-

нию, этого достаточно для доказательства асимптотического расширения векторов в неустойчивых конусах и, следовательно, гиперболичности.

Наше изложение соответствует [DMM06]. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ — фокусирующий участок границы бильярдного стола $\mathcal{D}$ класса C^r . Обозначим через p_1 и p_2 концевые точки Γ , и $\alpha(\Gamma) = \int_0^{|\Gamma|} |\mathcal{K}(r)| dr$ — полный угол, на который касательная линия к Γ поворачивается при проходе от p_1 к p_2 вдоль Γ .

Фокусирующий участок границы Γ класса гладкости C^3 называется *абсолютно фокусирующей дугой*, если:

АФ1: $\alpha(\Gamma) \leq \pi$;

АФ2: каждый бесконечно малый параллельный волновой фронт, падающий на Γ из $\mathcal{D}$, будет фокусироваться между каждыми двумя последовательными столкновениями с Γ и покидать Γ после последнего столкновения с этим участком в виде фокусирующегося фронта.

Требование (**АФ1**) (вместе с теоремой Гальперна 2.13) гарантирует, что ни одна бильярдная траектория не будет иметь бесконечной серии последовательных отражений от Γ . Главное требование (**АФ2**) будет гарантировать гиперболичность; см. ниже.

УПРАЖНЕНИЕ 9.23. Докажите, что если Γ является фокусирующим участком границы, удовлетворяющим условию (9.11), то она также удовлетворяет требованию (**АФ2**). Указание (см. [Wo86]): рассмотрите два волновых фронта, падающих на Γ из $\mathcal{D}$: один изначально параллелен, а второй изначально характеризуется постоянным углом падения. Второй фронт фокусируется на расстоянии $L/2$ вдоль траектории, выходящей из первой точки отражения. Сравните относительные положения точек их фокусировки на выходящей траектории.

УПРАЖНЕНИЕ 9.24. Докажите, что если фокусирующий участок $\Gamma \subset \mathcal{D}$ удовлетворяет условию (9.13), то он также удовлетворяет требованию (**АФ2**).

Приведенные выше упражнения показывают, что класс абсолютно фокусирующих дуг шире, чем класс дуг, удовлетворяющих (9.11) или (9.13). Следующие примеры иллюстрируют этот вывод.

В упражнении 9.17 мы описали две непересекающиеся дуги эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, в котором $a > b > 0$: одна из дуг удовлетворяет условию Войтковского (но не Маркаряна) (она определяется условием $|x| \leq a/\sqrt{2}$ и $y > 0$), а другая удовлетворяет условию Маркаряна (но не Войтковского) (она определяется неравенством $x \geq b^4/(a^2 + b^2)$). С другой стороны, Донней доказал (см. теорему 5 и раздел 7 в [Don91],

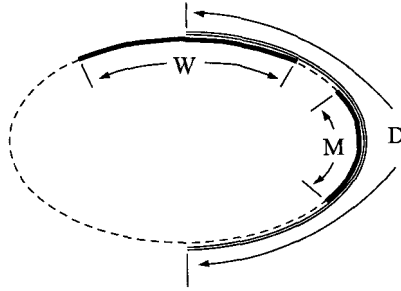


Рис. 9.2. Дуга Войтковского (сверху), дуга Маркаряна (справа) и полуэллипс Доннея

а также [МОР96]), что если $a/b < \sqrt{2}$, то весь полуэллипс $x \geq 0$ будет являться абсолютно фокусирующей дугой. Эта дуга содержит половину дуги Войтковского и целую дугу Маркаряна; см. рис. 9.2.

УПРАЖНЕНИЕ 9.25. Проверьте, что дуга Войтковского и дуга Маркаряна эллипса, описанные выше, не пересекаются.

Существует два других важных свойства абсолютно фокусирующих кривых класса C^6 :

- (а) достаточно короткие куски произвольной выпуклой кривой (см. теорему 9.18) являются абсолютно фокусирующими дугами [Don91, теорема 1];
- (б) в пространстве фокусирующих кривых класса C^6 , имеющих фиксированную длину $|\Gamma| = L$ и удовлетворяющих условию $\int_0^L |\mathcal{K}(r)| dr \leq \pi$, подмножество абсолютно фокусирующих кривых открыто [Don91, теорема 4].

Донней доказал [Don91, теорема 2], что абсолютно фокусирующие дуги могут быть частью гиперболических билиардов, если они соединяются достаточно длинными участками, образующими выпуклую область. Его доказательство основано на тонком изучении свойств фокусирующихся волновых фронтов в интегрируемых билиардах. В конце этого раздела мы подведем итог результатам Доннея. Следуя Доннею, мы рассмотрим только абсолютно фокусирующие дуги класса C^6 . Мы должны, однако, отметить, что наши результаты имеют место также для кривых Войтковского и Маркаряна класса C^4 (последние допускают непрерывные и кусочно-непрерывные семейства инвариантных конусов с конечными временами

фокусировки [Wo86, Mar88], чего более чем достаточно для того, чтобы включить их в новую теорему).

Следующая теорема подводит итог результатам Доннея [Don91] и нашим последним продвижениям [DMM06].

Теорема 9.26. *Любой бильярдный стол с участками границы класса C^6 , удовлетворяющий условиям (Б1)–(Б3) ниже, является гиперболическим.*

Напомним, что $\mathcal{S}_{\pm\infty} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{S}_{\pm n}$. Обозначим N_{∞}^+ и N_{∞}^- множества точек, положительная (соответственно отрицательная) полутрасектория которых определена во все моменты времени и которые, начиная с некоторого момента времени, ударяются только о плоские участки, то есть $\mathcal{F}^n(x) \in \mathcal{M}_0$ при всех $n \geq n_x$ (соответственно $n \leq -n_x$).

- Б1:** Каждый фокусирующий участок границы является абсолютно фокусирующей дугой класса C^6 (фокусирующие кривые класса C^4 Войтковского и Маркаряна также допускаются). Более того, $\mathcal{D}$ не является многоугольником, то есть $\Gamma_+ \cup \Gamma_- \neq \emptyset$.
- Б2:** Существует некоторая положительная нижняя граница длины участков траекторий, которые стартуют с фокусирующего участка $\partial\mathcal{D}$ и заканчиваются на другом неплоском участке $\partial\mathcal{D}$.
- Б3:** $\mu(N_{\infty}^+) = 0$ и $\mathfrak{m}(N_{\infty}^+ \cap \mathcal{S}_{-\infty}) = 0$, здесь $\mathfrak{m}$ обозначает одномерную меру Лебега на $\mathcal{S}_{-\infty}$.

Заметим, что если $N_{\infty}^- = \mathcal{I}(N_{\infty}^+)$, где $\mathcal{I}$ — инволюция (§ 2.14), то обращенное во времени условие (Б3) (см. замечание 4.16) имеет вид $\mu(N_{\infty}^-) = \mathfrak{m}(N_{\infty}^- \cap \mathcal{S}_{\infty}) = 0$. Условие (Б3) имеет место для бильярдных столов общего вида, так как для многоугольных бильярдных характеристик эргодичность [KMS86].

Условие (Б2) здесь выглядит несколько неясно. Оно накладывает ограничения на расстояния и углы между участками $\partial\mathcal{D}$, но гарантировать точную нижнюю границу нелегко. Когда мы работаем с кривыми Войтковского и Маркаряна, условие (Б2) имеет простую геометрическую формулировку в терминах взаимного расположения окружностей половинной кривизны различных фокусирующих кривых [Bu79, Wo86] или в терминах расстояний окружностей кривизны фокусирующих дуг до других участков $\partial\mathcal{D}$; см. [Mar88]. Так как здесь мы работаем с более широким классом фокусирующих дуг, наше условие (Б2) должно быть более общим и, следовательно, более трудным.

Для того чтобы описать неустойчивые конусы Доннея, мы должны ввести новые обозначения.

Рассмотрим фокусирующий участок $\Gamma_i \subset \partial D$. Положим $S_{1,i}^* = \{z \in M_i : \pi_q(\mathcal{F}z) \in \partial\Gamma_i\}$ и определим по индукции $S_{n,i}^* = (\mathcal{F}^{-1}S_{n-1,i}^* \cap M_i) \cup S_{1,i}^*$, где $n > 1$. Множество $S_{n,i}^*$ состоит из элементов M_i , имеющих не более $n - 1$ последовательных столкновений с Γ_i до соударения с $\partial\Gamma_i$ (попросту говоря, это множество особенностей для отображения $\mathcal{F}^n$, ограниченное траекториями, двигающимися только вдоль Γ_i). Положим также $S_{\infty,i}^* = \bigcup_{n>0} S_{n,i}^*$.

Множества $S_{-n,i}^*$ и $S_{-\infty,i}^*$ определяются аналогично при рассмотрении $\mathcal{F}$ в обратном направлении. Из принципа обращения времени следует (замечание 4.16), что $S_{-n,i}^* = \mathcal{I}(S_{n,i}^*)$ и $S_{-\infty,i}^* = \mathcal{I}(S_{\infty,i}^*)$.

Как обычно, когда мы имеем дело с особыми кривыми, важно установить их регулярность, как это сделано в разделах 4.8 и 4.9 для рассеивающих бильярдов. Формальные определения и доказательства будут даны в § 9.8; здесь мы только отметим эти свойства. Замыкания особых множеств $S_{\pm n,i}^*$ являются объединениями конечного числа гладких компактных кривых. Компоненты множеств $S_{n,i}^*$ и $S_{-n,i}^*$ трансверсальны друг другу. Для любых $m, n \geq 1$ множество $S_{m,i}^* \cup S_{-n,i}^*$ разбивает M_i на конечное число открытых подобластей с кусочно-гладкими границами.

Пусть $S_0 = \emptyset$. Пусть функция $\varrho : \text{int } M_i \setminus S_{\infty,i}^* \rightarrow \mathbb{N}$ определяется следующим образом:

$$\varrho(z) = \min\{k \geq 0 : z \notin S_k \text{ и } \pi_q(\mathcal{F}^k z) \notin \Gamma_i\}.$$

Она определяет количество последовательных отражений траектории z вдоль Γ_i до того момента, когда она покидает Γ_i . Таким образом, $E := \mathcal{I}[\varrho^{-1}(0)]$ является подмножеством $\text{int } M_i$, состоящим из векторов, посещающих Γ_i (то есть векторов, сразу же покидающих Γ_i в обратном времени). Для каждого $k \geq 0$ множество $E_k := E \cap \varrho^{-1}(k)$ состоит из векторов, посещающих $\text{int } M_i$ и покидающих Γ_i в точности после k столкновений. Очевидно, $E = \bigcup_{k \geq 0} E_k$, и, согласно предыдущему наблюдению, замыкания E и E_k являются боксами.

9.6. Поле конусов для абсолютно фокусирующих дуг

Построение неустойчивого поля конусов $\mathcal{C}$ на M_- было предложено Доннеем [Don91] и реализовано для каждого фокусирующего участка Γ_i независимо.

Для каждого $z \in E$ положим $X^-(z)$ и $X^+(z)$ — векторы из $\mathcal{T}_z \mathcal{M}_i$ такие, что их r -компонента неположительна и $f^-(z, X^-(z)) = f^+(\mathcal{F}^{\varrho(z)} z, D_z \mathcal{F}^{\varrho(z)} X^+(z)) = +\infty$. Последнее условие означает, что эволюция $X^-(z)$ в обратном времени приводит к параллельной вариации и что $\varrho(z)$ итераций вектора $X^+(z)$ в прямом времени (то есть именно в тот момент, когда он покидает Γ_i) является параллельной вариацией. Зададим касательный вектор $u = (u_r, u_\varphi)$, и пусть снова $m(u) = u_\varphi/u_r$ обозначает тангенс угла наклона. Используя тот факт, что Γ_i является абсолютно фокусирующей дугой, легко проверить, что

- $K(z) = m(X^-(z)) < m(X^+(z)) < -K(z)$ для любой точки $z \in E$;
- X^- непрерывно на E и X^+ непрерывно на каждом E_i .

Предположим теперь, что существует единичное векторное поле X_l на E такое, что

- 1) $m(X^+(z)) > m(X_l(z)) > m(X^-(z))$ для каждой точки $z \in E$;
- 2) $\sup_{z \in E_k} f^-(z, X_l(z)) < +\infty$ для каждого k ;
- 3) $\sup_{z \in E_k} f^+(\mathcal{F}^{\varrho(z)} z, D_z \mathcal{F}^{\varrho(z)} X_l(z)) < +\infty$ для каждого k .

Эти условия говорят, что вектор $X_l(z)$ покидает Γ_i после конечного числа столкновений, что он фокусируется между любыми двумя такими столкновениями и после последнего столкновения и что время фокусировки перед первым и перед последним столкновениями равномерно ограничено по $z \in E$.

Взяв два линейно независимых вектора $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2$, мы можем определить конус в $\mathbb{R}^2$ по формуле $\mathcal{C}(X_1, X_2) = \{aX_1 + bX_2 : ab \geq 0\}$. Используя это обозначение, полагаем

$$\mathcal{C}_E(z) := \mathcal{C}\left(X_l(z), \frac{\partial}{\partial \varphi}(z)\right), \quad z \in E,$$

или, что эквивалентно, $\mathcal{C}_E(z) = \{u \in \mathcal{T}_z E : m(u) \leq m(X_l(z))\}$. Теперь поле конусов Доннея на $\mathcal{M}_i$ определяется по формуле

$$\mathcal{C} = \{D_z \mathcal{F}^k \mathcal{C}_E(z) : z \in E \text{ и } 0 \leq k \leq \varrho(z)\}.$$

Мы видим, что $\mathcal{C}$ определено на $\text{int } \mathcal{M}_i \setminus (S_{\infty, i}^* \cup S_{-\infty, i}^*)$. Из свойства порядка (см. § 9.1) следует, что каждый вектор из $\mathcal{C}$ имеет будущее и прошлое времена фокусировки, которые являются равномерно ограниченными.

Чтобы показать существование векторного поля X_i , мы для начала заметим, что для каждого фиксированного $\bar{k} > 0$ произвольная линейная комбинация $aX^- + bX^+$, где $ab > 0$, будет являться векторным полем, удовлетворяющим свойствам (1)–(3) на $\cup_{0 \leq k \leq \bar{k}} E_k$ (но не на всем E). Теперь мы введем на M_i координаты Лазуткина (x, y) : в каждой точке $(r, \varphi) \in M_i$

$$x = C_1 \int_0^r R^{-\frac{2}{3}}(t) dt, \quad y = C_2 R^{\frac{1}{3}}(r) \sin \frac{\psi}{2}, \quad (9.15)$$

где $\psi = \pi/2 - \varphi$ (это угол с ориентированной касательной к Γ_i), константы C_1 и C_2 зависят от Γ_i и $R(r) = -\frac{1}{\mathcal{K}(r)}$ — радиус кривизны Γ_i в точке r .

За деталями отсылаем читателя к [Don91].

Из леммы 5.9 в книге [Don91] следует, что векторное поле $\partial/\partial x$ имеет свойства (1)–(2) на $\cup_{\bar{k} \leq k} E_k$ при достаточно большом $\bar{k} > 0$, зависящем от Γ_i . Следовательно, векторное поле X_i может быть выбрано следующим образом:

$$X_i(z) = \begin{cases} aX^-(z) + bX^+(z), & \text{если } z \in \bigcup_{m=0}^{\bar{m}} E_m, \\ \frac{\partial}{\partial x}(z), & \text{иначе,} \end{cases}$$

для любых положительных a, b и при достаточно большом $\bar{m} > 0$.

Таким образом, мы получаем на M_i поле конусов, которое зависит от параметров $a, b, \bar{m}$. Для завершения доказательства мы должны указать конкретные значения для них. В отношении a и b мы просто берем два положительных действительных числа; для $\bar{m}$ мы выбираем положительное целое, которое, как уже сказано, настолько велико, чтобы соответствовать лемме 5.9 книги [Don91] (здесь явное условие сформулировано в терминах отклонения угла ψ от 0 или π ; большие m соответствуют приближению ψ к 0 или π). Этот выбор является техническим; он упростит доказательство в определенной части локальной эргодической теоремы ниже.

Введем величину f_i , которая показывает, насколько далеко фокусирующий участок Γ_i должен быть помещен относительно других неплоских участков Γ для того, чтобы получить гиперболичность. Эта величина играет важную роль в условии (B2) предыдущего раздела. Пусть

$$f_i^\pm = \sup_{z \in M_i} f^\pm(z) \quad \text{и} \quad f_i = \max\{f_i^+, f_i^-\}. \quad (9.16)$$

Из свойства (2) следует, что f_i конечно. Пусть $f = \max_i f_i$, где максимум берется по всем фокусирующим участкам границы $\partial\mathcal{D}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.27. Заметим, что выбор $a, b, \overline{m}$ влияет на f_i . Мы не знаем, как выбрать эти параметры для того, чтобы получить оптимальные, то есть минимальные f_i . Обсуждение этого вопроса смотрите также в разделе 4 книги [Дон91].

Для завершения построения $\mathcal{C}$ на $\mathcal{M}$ остается определить поле на $\mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_0$, что не представляет трудности:

$$\mathcal{C}(z) = \begin{cases} \{u \in \mathcal{I}_z \mathcal{M} : -|d(z)| \leq f^+(z, u) \leq 0\}, & \text{если } z \in \mathcal{M}_+, \\ \{u \in \mathcal{I}_z \mathcal{M} : f^+(z, u) \leq 0\}, & \text{если } z \in \mathcal{M}_0. \end{cases}$$

Другими словами, для $z \in \mathcal{M}_+$ конус $\mathcal{C}(z)$ состоит из дивергентных волновых фронтов, которые фокусируются внутри полусоприкасающегося диска $\partial \mathcal{D}$ в точке $\pi_q(z)$, в свою очередь, для $z \in \mathcal{M}_0$ конус $\mathcal{C}(z)$ состоит из всех дивергентных волновых фронтов. Мы могли бы определить $\mathcal{C}$ следующим эквивалентным способом:

$$\mathcal{C}(z) = \{(u_r, u_\varphi) \in \mathcal{I}_z \mathcal{M} : u_r u_\varphi \geq 0\}$$

при всех $z \in \mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_0$. Это завершает построение поля конусов $\mathcal{C}$ для билиардов, удовлетворяющих **(Б1)**.

9.7. Непрерывные дроби

Здесь мы обобщим результаты разделов 8.5 и 8.6, где была доказана сходимость непрерывных дробей, связанных с билиардами Бунимовича.

Теорема 9.28. Пусть $\mathcal{D}$ — билиардный стол, удовлетворяющий условиям теоремы 9.19. Тогда непрерывные дроби (4.42) и (4.45) сходятся в каждой точке $X \in \Omega$, для которой прошлая и соответственно будущая полутраектории определены во все моменты времени. Эти дроби выражают наклоны линий E_x^u и E_x^s соответственно (там, где они существуют).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вспомним общую теорему о сходимости непрерывных дробей, доказанную в [Ви92, теоремы 10 и 11]. Дробь

$$A: = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}}} \quad (9.17)$$

сходится, если выполняются следующие два условия:

(а) все нечетные элементы a_{2n+1} положительны, а их сумма бесконечна;

(б) для любых двух отрицательных элементов $a_{2n'}, a_{2n''}$, $n' < n''$, между которыми не существует других отрицательных элементов, имеем

$$a_{2n'+1} \geq |a_{2n'}|^{-1}(2 + \delta_{n'}) + |a_{2n''}|^{-1} \left(2 - \frac{\delta_{n''}}{1 + \delta_{n''}} \right) \quad (9.18)$$

для некоторых $\delta_l \geq -1$, $l = 1, 2, \dots$. На самом деле нас будет интересовать только тот случай, когда все четные элементы отрицательны и $\delta_l = 0$. Тогда (9.18) принимает особенно простой вид:

$$a_{2n+1} \geq 2|a_{2n}|^{-1} + 2|a_{2n+2}|^{-1}. \quad (9.19)$$

Мы докажем теорему в устойчивом случае; неустойчивый случай получается обычным обращением времени (замечание 4.16).

Для простоты ограничим наше рассмотрение бильiardными столами без рассеивающих участков; то есть положим $M_+ = \emptyset$. Столкновения с плоскими участками границы могут быть исключены из рассмотрения за счет «приема с переворачиванием стола», описанного в § 8.7, при этом соответствующая непрерывная дробь преобразуется. После этого все нечетные элементы $a_{2n+1} = \tau_n$ (времена между столкновениями) будут положительными, а все четные элементы $a_{2n} = \mathcal{R}_n = 2K_n / \cos \varphi_n$ будут отрицательными, так как $K < 0$ на фокусирующем участке границы. Так как будущая полутраектория $X \in \Omega$ определена во все моменты времени, то мы имеем $\sum_n a_{2n+1} = \infty$.

Теперь рассмотрим случай, когда бильiardный стол состоит из фокусирующих дуг Войтковского. Тогда условие (9.11) может быть переписано в виде

$$\tau_n \geq 2|\mathcal{R}_n|^{-1} + 2|\mathcal{R}_{n+1}|^{-1}, \quad (9.20)$$

что удивительным образом совпадает с (9.19). Сходимость доказана.

Рассмотрим случай, когда бильiardный стол состоит из фокусирующих дуг Маркаряна. Условие (9.13) может быть переписано в виде

$$|\mathcal{R}_n| \geq 2\tau_{n-1}^{-1} + 2\tau_n^{-1}$$

или, что эквивалентно,

$$|a_{2n}| \geq 2a_{2n-1}^{-1} + 2a_{2n+1}^{-1}. \quad (9.21)$$

Это выражение отличается от (9.19), но мы можем применить следующий прием. Дробь (9.17) сходится, если и только если сходится дробь

$$B := \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{b_4 + \ddots}}}}, \quad b_n = -a_{n+1}, \quad (9.22)$$

так как $A = 1/(a_1 - B)$. В новой дроби (9.22) нечетные элементы $b_{2n-1} = -\mathcal{R}_n$ положительны, а четные элементы $b_{2n} = -\tau_n$ отрицательны. Условие Маркаряна (9.21) принимает вид

$$b_{2n-1} \geq 2|b_{2n-2}|^{-1} + 2|b_{2n}|^{-1},$$

что совпадает с (9.19).

Остается проверить, что сумма всех нечетных элементов бесконечна, то есть $\sum b_{2n-1} = \sum |\mathcal{R}_n| = \infty$. Если имеет место бесконечное количество столкновений с фокусирующими дугами, то этот факт следует из очевидной оценки снизу:

$$|\mathcal{R}_n| \geq \min_{q \in \Gamma_-} 2|\mathcal{K}(q)| = \text{const} > 0.$$

С другой стороны, если имеет место лишь конечное количество столкновений с Γ_- , то наша дробь (9.17) после приведения окажется просто конечной. ■

Наконец, заметим, что гиперболические билиарды с фокусирующими границами имеют положительную энтропию, которая может быть вычислена по общим формулам, полученным в § 3.12; для более детального изучения этого вопроса см. [CM92] и [Ch97].

9.8. Особенности

Множества особенностей $S_{\pm n}$ отображения столкновений $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ в билиарде общего вида определены в главе 2. Для удобства читателя напомним основные формулы:

$$\begin{aligned} S_0 &= \partial \mathcal{M}, \\ S_1 &= S_0 \cup \{x \in \text{int } \mathcal{M} : \mathcal{F}(x) \notin \text{int } \mathcal{M}\}, \\ S_{-1} &= S_0 \cup \{x \in \text{int } \mathcal{M} : \mathcal{F}^{-1}(x) \notin \text{int } \mathcal{M}\}, \\ S_{n+1} &= S_n \cup \mathcal{F}^{-1}(S_n) \quad \text{и} \quad S_{-(n+1)} = S_{-n} \cup \mathcal{F}(S_{-n}). \end{aligned}$$

Последние два множества являются множествами особенностей для $\mathcal{F}^{n+1}$ и $\mathcal{F}^{-(n+1)}$ соответственно.

Свойства особенностей рассеивающих билиардов были изучены в разделах 4.8 и 4.9. Мы доказали, что $S_{\pm}$ состоит из гладких компактных кривых с равномерно ограниченной кривизной, пересекающихся только в концевых точках. В этом разделе докажем аналогичные свойства регулярности для гладких компонент $S_{\pm 1}$.

Как было замечено в упражнении 4.40, мы имеем $x = (r, \varphi) \in S_n$, если и только если $(r, -\varphi) \in S_{-n}$. Снова эта симметрия позволяет нам свести анализ к случаю $n > 0$; то есть нам нужно рассмотреть особенности S_1 .

Заметим, что $S_1 \setminus S_0$ состоит из точек, следующее столкновение которых либо представляет собой касание (что может случиться только на рассеивающем участке ∂D), либо происходит в угловой точке ∂D . В соответствии с этим $S_1 = S_0 \cup S_g \cup S_c$, где $S_g = \{(r, \varphi) : |\varphi_1| = \pi/2\}$ и $S_c = \{(r, \varphi) : r_1 \text{ является концевой точкой некоторого } \Gamma_i \subset \partial D\}$ (здесь g обозначает «скольжение», а c — «угловое» столкновение). Заметим, что S_0, S_g, S_c могут иметь общие точки.

Теорема 9.29. *Для любого плоского билиардного стола $\partial D \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющего предположениям A1–A4 главы 2, множество S_1 является конечным объединением гладких компактных кривых, пересекающихся только в концевых точках. Каждое из множеств S_g и S_c представляет собой объединение конечного числа гладких (но не обязательно компактных) кривых, замыкания которых относятся к классу $C^{\ell-1}$, и конечного числа изолированных точек.*

УПРАЖНЕНИЕ 9.30. Найдите билиардные столы, для которых множество S_c включает изолированные точки (попробуйте билиарды с каспами). Найдите билиардные столы, для которых множество S_g (или S_c) содержит кривые, концевые точки которых принадлежат другому множеству S_c (соответственно S_g).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки $z = (q, v) \in \mathcal{M}$ обозначим через $q_1 = q + \tau(z)v$ и $z_1 = \mathcal{F}(z) = (r_1, \varphi_1)$ точку следующего столкновения.

Начнем с S_c . В общем случае это множество не является компактным. Этот случай имеет место, если граница содержит фокусирующую дугу γ , одним концом которой является $\bar{q}$ ($r = a_i$). Тогда множество $S_c(\bar{q}, \gamma) = \{(q, \varphi(q)) : q \in \gamma, q_1 = \bar{q}\}$ не является компактным, но, очевидно, при стремлении q к $\bar{q}$ величина $\varphi(q)$ стремится к $\pm\pi/2$, скажем к $\pi/2$. Тогда $S_c(\bar{q}, \gamma) \cup (\bar{q}, \pi/2) \subset S_c \cup S_0$ является компактным.

Пусть $\bar{q}$ — конец дуги границы. Исключая случай изолированных точек, в $\bar{q}$ всегда существует некоторый «сектор обзора» границы Γ . Так как она представляет собой объединение конечного числа гладких замкнутых дуг и замкнутых кривых, то достаточно доказать, что если γ — достаточно маленькая замкнутая часть границы и если она видна из $\bar{q}$, то $S_c(\bar{q}, \gamma)$ является замкнутой дугой класса $C^{\ell-1}$. Выражение « γ видна из $\bar{q}$ » означает, что для всех точек $q \in \gamma$ интервал, соединяющий q и $\bar{q}$, не имеет общих точек с $\Gamma \setminus \{q, \bar{q}\}$. Если $\bar{q} \notin \gamma$, то задачу можно свести к трем случаям в зависимости от того, является ли γ фокусирующей, рассеивающей или плоской кривой, но более интересный случай имеет место тогда, когда $\bar{q} \in \gamma$ и γ — фокусирующая. Рассмотрим детально последний случай; предыдущие случаи аналогичны.

Пусть γ определяется формулой $y = f(x)$, $x \in [0, a]$, $f(x) \geq 0$ в ортогональной системе координат (x, y) , $f(0) = 0$, $f''(x) > 0$, $(0, 0) = \bar{q}$, и для $q \in \gamma$, $q = (t, f(t))$, $0 \leq t \leq a$. Пусть r — параметр длины дуги γ , начинающейся в $\bar{q}$. Для каждого $r \neq 0$ положим $\varphi(r)$ — единственный угол такой, что $q_1 = q_1(r, \varphi) = \bar{q}$, $\varphi < \pi/2$, и определим $\bar{\varphi} = \pi/2 + \varphi(r)$.

Очевидно, доказательство того, что $S_c(\bar{q}, \gamma) = \{(r, \varphi(r)), 0 \leq r|\gamma|\} \cup \cup(0, -\pi/2)$ является дугой класса $C^{\ell-1}$, эквивалентно доказательству того же для $C_b = \{(t, \bar{\varphi}(t)), 0 < t \leq a\} \cup (0, 0)$. $\bar{\varphi}(t) = \alpha(t) - \beta(t)$, где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — углы, образованные осью x и касательной линией к γ в точке q и линией $q\bar{q}$. Следовательно, при $0 < t \leq a$ имеем

$$\bar{\varphi}(t) = \operatorname{arctg} f'(t) - \operatorname{arctg} \frac{f(t)}{t}.$$

Наконец, если мы определим $\bar{\varphi}(0) = 0$, так как $f' \in C^{\ell-1}([0, a])$, то $\bar{\varphi} \in C^{\ell-1}([0, a])$, и C_b является замкнутой дугой класса $C^{\ell-1}$.

Теперь рассмотрим множество S_b . Как и в предыдущем случае, S_b вообще является некомпактным и, кроме того, может содержать конечное число изолированных точек. Для доказательства нашего утверждения достаточно рассмотреть два участка границы γ, γ_1 , удовлетворяющих следующему условию: каждой точке $q \in \gamma$ соответствует единственное значение $\varphi(q)$ такое, что луч $L(q, \varphi)$ касается γ_1 в точке $q_1 = q_1(q, \varphi)$.

Пусть $(x(r), y(r))$, $(x_1(r_1), y_1(r_1))$ — параметризации, соответствующие длине дуги участков границы γ, γ_1 , где $a < r < b$, $c < r_1 < d$. Если $q = (x(r^0), y(r^0))$, $q_1 = (x_1(r^1), y_1(r^1))$, то

$$\det \begin{pmatrix} x_1(r^1) - x(r^0) & y_1(r^1) - y(r^0) \\ x_1'(r^1) & y_1'(r^1) \end{pmatrix} = D(r^0, r^1) = 0.$$

В соответствии с теоремой о неявной функции, в некоторой окрестности U точки r^0 существует функция $r_1 = r_1(r)$ класса гладкости C^r такая, что $r_1(r^0) = r^1$ и $D(r, r_1(r)) = 0$ при всех $r \in U$, если $\frac{\partial D}{\partial r_1}(r^0, r^1) \neq 0$. Это условие имеет место, так как (см. упражнение 9.31)

$$\frac{\partial D}{\partial r_1}(r^0, r^1) = \det \begin{pmatrix} x_1(r^1) - x(r^0) & y_1(r^1) - y(r^0) \\ x_1''(r^1) & y_1''(r^1) \end{pmatrix}. \quad (9.23)$$

Отсюда немедленно следует, что если γ и γ_1 — две непересекающиеся кривые границы, то множество S_b является замкнутой дугой класса гладкости $C^{\ell-1}$.

Для завершения доказательства остается рассмотреть случай двух достаточно малых пересекающихся кривых, имеющих одну общую конечную точку w .

Рассмотрим ортогональную систему координат (x, y) . Кривые границы γ_1, γ являются графиками функций класса C^3 : $y = g(x) \leq 0, b < x \leq 0$, и $y = f(x) \geq 0, x \in I$, соответственно (0 — одна из граничных точек интервала $I \subset \mathbb{R}$). Они имеют общую точку $w = (0, 0)$, то есть $f(0) = g(0) = 0$. γ_1 — рассеивающая кривая, касающаяся оси x : $g'(0) = 0$ и $g''(x) < 0$. Очевидно, мы должны отдельно рассмотреть случаи, когда функция $f(x)$ определена при $x \leq 0$ и $x \geq 0$.

Рассмотрим функцию $F(t, u) = f(t) - g(u) - g'(u)(t - u)$. Она относится к классу $C^{\ell-1}$ и $F(0, 0) = 0$. Если билиардная траектория, покидающая γ в точке $(t, f(t))$ под углом $\varphi(t)$, касается кривой γ_1 в точке $(u, g(u))$, то $F(t, u) = 0$. Регулярность дуги $(t, \varphi(t)), t \in I$, множества S_b , определяемого такими траекториями, зависит от регулярности неявной функции $u = u(t)$. Действительно, для каждого u определено $t \in I$, и, так как эти функции взаимнообратны, то $t(u), u(t)$ имеют один и тот же класс гладкости. Регулярность $\varphi(t)$ будет детально обоснована после изучения регулярности $u(t)$.

Функция класса C^1 $u = u(t)$, удовлетворяющая уравнению $F(t, u(t)) = 0$ в окрестности точки $(0, 0)$, существует, согласно теореме о неявной функции, если $\frac{\partial F}{\partial u} = F_u \neq 0$ при всех $(t, u) \neq (0, 0)$, и существует предел (равный ∞) производной $u'(t) = -\frac{F_t}{F_u}(t, u(t))$ при $t \rightarrow 0$ и $F(t, u) = 0$. Мы имеем

$$\frac{F_t}{F_u} = \frac{f'(t) - g'(u)}{g''(u)(u - t)} =: h(t).$$

Тогда F_u отлично от нуля, если $u \neq t$ ($g''(u) < 0$, так как наши рассеивающие кривые не могут иметь нулевую кривизну). Предел $h(t)$, очевидно, существует ($= \infty$), если $f'(0) \neq g'(0) = 0$. Таким образом, мы должны рассмотреть только случай $f'(0) = g'(0) = 0$.

Внутренний угол может быть нулем или π . Если он равен нулю, то Γ_0 может быть плоской или рассеивающей, так как предположение A4 в § 2.4 не допускает каспов, которые образовывались бы фокусирующей и рассеивающей дугами (на самом деле, насколько нам известно, этот тип каспа еще не изучался). В этом случае $y = f(x) \geq 0$, $-a < x \leq 0$.

Если внутренний угол равен π и Γ_0 является плоской или рассеивающей кривой, то γ, γ_1 не видят друг друга. Наконец, мы должны рассмотреть случай с внутренним углом, равным π , и фокусирующей γ . Мы рассмотрим этот случай в деталях; два других заслуживают аналогичного разбора.

Кривая γ является графиком функции $y = f(x) \geq 0$, $0 \leq x < a$. Пусть $f(t) = A\frac{t^2}{2} + f''' \frac{t^3}{6}$, $g(u) = B\frac{u^2}{2} + g''' \frac{u^3}{6}$, $A > 0$, $B < 0$, где f''' , g''' обозначают третьи производные функций f и g в некоторых точках $0 \leq t_1 \leq t$, $u \leq u_1 \leq 0$ соответственно. Также рассмотрим квадратичные аппроксимации обеих функций $f_*(t) = At^2/2$, $g_*(u) = Bu^2/2$. Пусть $u_*(t)$ — решение уравнения $F_*(t, u) = f_*(t) - g_*(u) - g'_*(u)(t - u)$ и

$$\frac{f'_*(t) - g'_*(u_*)}{g''_*(u_*)(u_* - t)} = h_*(t) \quad (\text{если } f(x) = 0 \text{ и } h_*(t) = -2).$$

Еще раз вспомним, что $h_*(t) = -u'_*(t)$, $t > 0$. Тогда $u(t)$ будет $C^{\ell-1}$ -гладкой в $t = 0$, если мы докажем, что $C^{\ell-1}$ -гладкой является $h_*(t)$, и $h(t) - h_*(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Мы имеем

$$\begin{aligned} h(t) - h_*(t) &= \\ &= \frac{Bt(A-B)(u-u_*) + \frac{1}{2}g'''u[Bu(t-u_*) - (u-t)(At-Bu_*)] + \frac{1}{2}Bf'''t^2[u_*-t]}{B(u_*-t)(B+g'''u)(u-t)}. \end{aligned}$$

Во-первых, обратим внимание на слагаемые числителя, не содержащие $u - u_*$. Каждое из них включает произведение трех бесконечно малых величин. Так как $t - u$, $t - u_*$ (множители в знаменателе) больше, чем t , $-u$, $-u_*$ (все они стремятся к нулю при стремлении к нулю t), то мы получаем, что эта часть выражения стремится к нулю. С другой стороны, вычисление разницы $F(t, u) - F_*(t, u_*)$ дает

$$u - u_* = \frac{\frac{1}{2}f'''t^2(-2t/3 + u) - \frac{1}{2}g'''u^2(-2u/3 + t)}{B[t - (u + u_*)/2]}.$$

Используя рассуждение выше, можно прийти к выводу, что часть выражения, содержащая множитель $t(u - u_*)$, стремится к нулю. Таким образом, мы доказали, что $h(t) - h_*(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow 0$. Теперь мы только должны вычислить

$$h_*(t) = \frac{At - Bu_*}{B(u_* - t)} = -1 + \frac{(A - B)t}{B(u_* - t)}.$$

После некоторых дополнительных громоздких преобразований мы получаем

$$t = \frac{Bu_* + \sqrt{B^2u_*^2 - ABu_*^2}}{A}, \quad \frac{t}{u_* - t} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AB}}{A - B + \sqrt{B^2 - AB}}.$$

(Заметим, что это значение отлично от нуля и ∞ , так как $-B, A > 0$.) Это завершает доказательство регулярности $u(t)$.

Далее, в рассматриваемом нами случае $\varphi(t) = -\pi/2 + \arctg f'(t) - \arctg g'(u)$. Следовательно,

$$\varphi'(t) = \frac{f''(t)}{1 + [f'(t)]^2} - \frac{g''(u)u'(t)}{1 + [g'(t)]^2}.$$

Предел этого выражения при $t \rightarrow 0$ существует и равен (в этой конфигурации он отличен от нуля)

$$A + Bh_*(0) = (A - B) \left(1 - \frac{B + \sqrt{B^2 - AB}}{A - B - \sqrt{B^2 - AB}} \right).$$

Это завершает доказательство. ■

УПРАЖНЕНИЕ 9.31. Проверьте формулу (9.23) и докажите, что определитель $\neq 0$. Указание: $(x_1''(r^1), y_1''(r^1))$ ортогонально $(x_1'(r^1), y_1'(r^1))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.32. В теореме 6.1 книги [KS86, часть V] доказано, что для более общего класса бильярдных столов, имеющих фокусирующие и рассеивающие участки границы, кривизна которых может принимать нулевое значение, множество S_1 является объединением конечного числа дуг (не обязательно замкнутых) и замкнутых кривых, каждая из которых принадлежит классу $C^{\ell-1}$ и имеет конечную длину, а также конечного числа изолированных точек. Наша теорема, хотя она и имеет несколько более ограничительные условия, устанавливает немного большее: $C^{\ell-1}$ -гладкость замыканий гладких компонент S_1 .

9.9. Приложение теории Песина и Катка–Стрельцина

Здесь мы вернемся к общему случаю гладких отображений с особенностями, введенному в § 3.1 и использованному снова в 9.2.

Напомним (§ 3.1), что точка $p \in M$ гиперболическая, если ее показатели Ляпунова существуют и ни один из них не равен нулю; в этом случае $T_p M = E_p^s \oplus E_p^u$, где

$$E_p^s = \bigoplus_{\lambda_p^{(i)} < 0} E_i \quad \text{и} \quad E_p^u = \bigoplus_{\lambda_p^{(i)} > 0} E_i. \quad (9.24)$$

Если показатели Ляпунова лежат вне интервала $(-\lambda, \lambda)$, то мы можем сделать вывод (см. упражнение 3.5), что для любого $\varepsilon > 0$ существует $K(p, \varepsilon) > 0$ такое, что для любого $n \geq 1$

$$\|D_p F^n v\| \leq K(p, \varepsilon) e^{-n(\lambda - \varepsilon)} \|v\| \quad \forall v \in E_p^s, \quad (9.25)$$

$$\|D_p F^{-n} v\| \leq K(p, \varepsilon) e^{-n(\lambda - \varepsilon)} \|v\| \quad \forall v \in E_p^u. \quad (9.26)$$

Для неравномерно гиперболических отображений (см. § 3.1) константа $K(p, \varepsilon)$ зависит от точки p . Заметим, что, когда $K(p, \varepsilon)$ велико, эффект сжатия устойчивых векторов и растяжения неустойчивых векторов может быть обнаружен только при достаточно больших n . Таким образом, сжатие и растяжения являются лишь асимптотическими и для произвольно больших периодов времени могут все еще не наблюдаться. Более того, устойчивые вектора могут временно растягиваться под действием $D_p F^n$. Все это очень характерно для неравномерно гиперболических систем.

УПРАЖНЕНИЕ 9.33. Сравните предыдущий анализ с поведением длинных траекторий, скользящих вдоль дуг окружностей или между параллельными линиями в стадионе Бунимовича. Указание: используйте результаты § 8.7.

Систематическое изучение неравномерно гиперболических диффеоморфизмов с абсолютно непрерывными инвариантными мерами было предпринято Песиным в середине семидесятых [Pes76, Pes77a, BP01]. В 1980-х теория Песина была развита для более общего случая неравномерно гиперболических отображений Ледрапьером, Катком, Руэлем, Янгом и другими. Мы последуем за исследованиями Катка и Стрельцина [KS86], охватывающими широкий класс неравномерно гиперболических отображений с особенностями.

Пусть F — гладкое отображение с особенностями, определенное в § 9.2. Дополнительно потребуем, чтобы класс гладкости отображения F

составлял по крайней мере $r \geq 2$, и чтобы оно удовлетворяло условиям теоремы Оселедеца (теорема 3.1).

Пусть $d(x, y)$ — риманово расстояние между точками на M и $d(x, S)$ обозначает расстояние от $x \in M$ до множества особенностей S .

Для $x \in N$ обозначим экспоненциальное отображение $\exp_x: T_x N \rightarrow N$ (оно определяется как $\exp_x(v) = \gamma(x, v, 1)$, где $\gamma(x, v, t)$ — геодезическая на N , удовлетворяющая условиям $\gamma(x, v, 0) = x$ и $\dot{\gamma}(x, v, 0) = v$). Пусть $R(x, N)$ — радиус инъективности отображения $\exp_x: T_x N \rightarrow N$; то есть $R(x, N) = \sup\{r: \exp_x \text{ биективно на шаре } \bar{B}_r(0) \subset T_x N\}$. Отображение $\exp_x$ определено и биективно на шаре $B_{r(x, N)}(0) \subset T_x N$, где $r(x, N) = \min\{R(x, N), d(x, S)\}$.

Определим $F_{ox} = \exp_{F(x)}^{-1} \circ F \circ \exp_x$. Это удобный способ представления F в линейной системе координат вблизи точки x . Это отображение определено в окрестности $0 \in T_x N$.

Теперь мы сделаем два дополнительных предположения, следуя Катку и Стрельцину [KS86].

КС1: Существуют константы $C_1 > 0$ и $a > 0$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ μ -мера ε -окрестности (в римановой метрике) множества S удовлетворяет условию

$$\mu(U_\varepsilon(S)) \leq C_1 \varepsilon^a;$$

то есть мера μ не скапливается в слишком большом количестве в окрестности особого множества S .

КС2: Существуют константы $C_2 > 0$ и $b > 0$ такие, что для каждого $x \in N$ и $v \in T_x N$, $\|v\| \leq r(x, N)$, мы имеем

$$\|F''_{ox}(v)\| \leq C_2 d(\exp_x(v), S)^{-b};$$

то есть вторая производная F''_{ox} не растет слишком быстро вблизи множества особенностей S .

УПРАЖНЕНИЕ 9.34. Пусть $\tilde{N}_\kappa = \{x \in \tilde{N}: d(f^n(x), S) > c(x)|n|^{-\kappa} \text{ для некоторого } c(x) > 0 \text{ и всех } 0 \neq n \in \mathbb{Z}\}$. Покажите, что $\mu(\tilde{N}_\kappa) = 1$ при некотором $\kappa > 0$. Указание: заметим, что множество $\tilde{N}_{\kappa, n}^* := \{d(f^n(x), S) < |n|^{-\kappa}\}$ совпадает с $F^{-n}(U_{|n|^{-\kappa}}(S))$; следовательно, $\mu(\tilde{N}_{\kappa, n}^*) = \mu(U_{|n|^{-\kappa}}(S))$. Теперь положим $\kappa = 2/a$ и используем **(КС1)** для доказательства того, что $\sum_n \mu(\tilde{N}_{\kappa, n}^*) < +\infty$. Заметим, что $\tilde{N}_\kappa$ состоит из точек, принадлежащих только конечному числу множеств $\tilde{N}_{\kappa, n}^*$.

Для оценки энтропии из приведенных выше условий Катоки и Стрельцина использовали следующее дополнительное предположение.

КС3: Существуют константы $C_3 > 0$ и $d \geq 1$ такие, что для каждого $x \in N$

$$\|D_x F\| \leq C_3 d(x, S)^{-d}.$$

Наша главная цель состоит в проверке того, что отображение столкновений $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ удовлетворяет всем этим трем предположениям Катка–Стрельцина **(КС1)–(КС3)**. Определенные шаги оставлены читателю в качестве упражнений.

УПРАЖНЕНИЕ 9.35. Проверьте, что отображение столкновений $\mathcal{F}$ является гладким отображением с особенностями; в частности, $N = \mathcal{M} \setminus S_1 = \text{int } \mathcal{M} \setminus S_1$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.36. Докажите, что $\mathcal{F}: \mathcal{M} \setminus S_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus S_{-1}$ удовлетворяет предположению **(КС1)**. Указание: воспользуйтесь теоремой 9.29, а также заметьте, что плотность $\cos \varphi$ меры μ относительно меры Лебега ограничена.

УПРАЖНЕНИЕ 9.37. Пусть $(x(r), y(r))$ и $(x_1(r_1), y_1(r_1))$ параметризованы длиной дуги участков границы γ и γ_1 , где $a < r < b$, $c < r_1 < d$, как в доказательстве теоремы 9.29 (о регулярности S_g), и

$$\tau = \sqrt{[x_1(r_1) - x(r)]^2 + [y(r_1) - y(r)]^2}.$$

Докажите, что

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tau}{\partial r_1}(r, r_1(r, \varphi)) \times \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} = \frac{[x_1(r_1) - x(r)]x'_1(r_1) + [y(r_1) - y(r)]y'_1(r_1)}{\cos \varphi_1}$$

и

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{[x_1(r_1) - x(r)][x'_1(r_1)\partial r_1/\partial r - x'(r)] + [y(r_1) - y(r)][y'_1(r_1)\partial r_1/\partial r - y'(r)]}{\tau}.$$

Указание: используйте повторно формулу (2.26).

УПРАЖНЕНИЕ 9.38. Покажите, что для каждого $x \in \mathcal{M} \setminus S_1$ имеют место следующие оценки:

$$\|D_x \mathcal{F}\| \leq \frac{a_1}{\cos \varphi_1} \quad \text{и} \quad \|D_x^2 \mathcal{F}\| \leq \frac{a_2}{\cos^3 \varphi_1},$$

где $\mathcal{F}(x) = (r_1, \varphi_1)$ и $a_1, a_2 > 0$ — константы. Указание: используйте (2.26). Для второй оценки возьмите производную от ее членов, используйте результаты предыдущих упражнений и используйте тот факт, что граница $\partial\mathcal{D}$ относится к классу C^3 .

Теорема 9.39. *Отображение столкновений $\mathcal{F}: \mathcal{M} \setminus S_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus S_{-1}$ удовлетворяет предположениям (КС1)–(КС3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что отображение $\mathcal{F}$ является гладким отображением с особенностями, был доказан в упражнении 9.35. $C^{\ell-1}$ -гладкость была установлена в теореме 2.33. Гипотезы теоремы Оселедца были проверены в теореме 3.6. Предположение (КС1) было доказано в упражнении 9.36.

Остается оценить скорость роста первой и второй производных $\mathcal{F}$. Они были явно вычислены в теореме 7.2 книги [KS86, часть V]. Согласно результатам упражнений 9.37 и 9.38, достаточно доказать, что $\cos \varphi_1(x) \geq b d(x, S_1)$, где $b > 0$ — константа, для каждого $x \in \mathcal{M} \setminus S_1$. Мы не будем приводить все детали доказательства, но сделаем следующие структурные наблюдения.

(а) Так как $\mathcal{F}: \mathcal{M} \setminus S_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus S_{-1}$ является гомеоморфным вложением, то для любого компактного множества $C \subset \mathcal{M} \setminus S_1$ существует положительное число b_C такое, что для каждого $x \in C$ $\cos \varphi_1(x) \geq b_C d(x, S_1)$.

(б) Так как S_1 — компакт (теорема 9.29), то достаточно доказать, что для каждой точки $P = (q, \varphi) \in S_1$ существуют окрестность $U(P)$ и число b_P такие, что

$$\cos \varphi_1(x) \geq b_P d(x, S_1) \quad (9.27)$$

для каждого $x \in U(P) \cap (\mathcal{M} \setminus S_1)$. Это неравенство не является очевидным только в случае

$$\inf\{\cos \varphi_1(x) : x \in U(P) \cap (\mathcal{M} \setminus S_1)\} = 0. \quad (9.28)$$

(в) Достаточно найти все конфигурации, для которых имеет место (9.28), и доказать для них (9.27). Следующие три случая исчерпывают все возможности, при которых имеет место (9.28) (в последних двух случаях мы рассматриваем только такие точки P , что бильярдные траектории, идущие из $\gamma \setminus \{q\}$ в $\gamma_1 \setminus \{\bar{q}\}$, существуют):

- (i) q принадлежит фокусирующему участку и $\varphi = \pm\pi/2$;
- (ii) q является общей точкой двух замкнутых кривых $\gamma, \gamma_1 \subset \partial\mathcal{D}$;

- (iii) q является концевой точкой замкнутой кривой $\gamma \subset \partial\mathcal{D}$, а $\bar{q}$ является концевой точкой другой замкнутой кривой $\gamma_1 \subset \partial\mathcal{D}$, не пересекающейся с γ , и линия $q\bar{q}$ является касательной к γ_1 в точке $\bar{q}$.

(г) Принимая во внимание выпуклость и взаимное расположение γ и γ_1 , можно выделить 36 различных случаев, которые приведены в [KS86, часть V, раздел 8].

(д) Мы не будем приводить в деталях полностью геометрические (и элементарные) доказательства (9.27) для каждого из этих случаев. Они следуют линии доказательства теоремы 9.29. Мы всего лишь заметим, что наши бильiardные столы удовлетворяют гипотезам предложения 7.1 и лемм 7.3 и 7.4 книги [KS86, часть V], которые используются в этом доказательстве. ■

9.10. Инвариантные многообразия и абсолютная непрерывность

Части I и II книги [KS86] посвящены доказательству существования инвариантных многообразий и их абсолютной непрерывности для гиперболических систем, удовлетворяющих всем предположениям предыдущего раздела, за исключением **(КЗ3)**. Поэтому можно сделать вывод, что аналогичные свойства имеют место для наших гиперболических бильiardных систем.

В этом разделе мы продолжим работу с гладкими отображениями с особенностями, удовлетворяющими всем предположениям, сформулированным в предыдущем разделе; мы также предположим, что множество гиперболических точек имеет положительную меру. В каждой точке $x \in \Sigma(F)$ мы имеем обычные подпространства E_x^s и E_x^u , определенные в (9.24), и пусть

$$\lambda^+(x) = \min\{\lambda_i(x) > 0\} \quad \text{и} \quad \lambda^-(x) = \max\{\lambda_i(x) < 0\}$$

— наименьшие (в абсолютном значении) положительный и отрицательный показатели соответственно. Наше отображение столкновений $\mathcal{F}$ удовлетворяет всем этим предположениям, и, более того, $\lambda^-(x) = -\lambda^+(x)$ согласно лемме 3.9.

Следующая теорема является на самом деле обобщением наших более ранних условий (9.25) и (9.26); ср. также упражнение 3.5.

Теорема 9.40. Для $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция $C(x, \varepsilon)$ на $\Sigma(F)$ такая, что для каждого $x \in \Sigma(F)$, $n \geq 1$ и $m \in \mathbb{Z}$

$$\|D_{F^m x} F^n v\| \leq C(x, \varepsilon) e^{\lambda^-(x)n + \varepsilon n + \varepsilon |m|} \|v\| \quad \forall v \in E_x^s,$$

$$\|D_{F^m x} F^n v\| \geq C^{-1}(x, \varepsilon) e^{\lambda^+(x)n - \varepsilon n - \varepsilon |m|} \|v\| \quad \forall v \in E_x^u,$$

и угол $\gamma(F^m x)$ между $E_{F^m x}^s$ и $E_{F^m x}^u$ удовлетворяет условию

$$\gamma(F^m x) \geq C^{-1}(x, \varepsilon) e^{-\varepsilon |m|}.$$

Следующая теорема касается устойчивых и неустойчивых многообразий.

Теорема 9.41. Почти для всех $x \in \Sigma(F)$ относительно меры μ существует $\delta(x) \in (0, r(x, N))$ такое, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ множество

$$W^s(x) = \{y \in \exp_x B_{\delta(x)}(0) : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{dist}(F^n(x), F^n(y)) \leq \lambda^-(x) + \varepsilon\}$$

является дифференцируемым (устойчивым) многообразием класса C^r . Аналогично,

$$W^u(x) = \{y \in \exp_x B_{\delta(x)}(0) : \liminf_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} \log \text{dist}(F^n(x), F^n(y)) \geq \lambda^+(x) - \varepsilon\}$$

является дифференцируемым (неустойчивым) многообразием C^r . Мы также имеем

$$T_x W^s(x) = E_x^s \quad \text{и} \quad T_x W^u(x) = E_x^u.$$

Заметим, что устойчивое и неустойчивое многообразия в x трансверсальны; то есть они пересекаются лишь в одной точке x и угол между ними положительный. Заметим также, что $W^s(x)$ и $W^u(x)$ существуют почти всюду, но не обязательно всюду, на $\Sigma(F)$. Их существование является важным пунктом, поэтому мы рассмотрим еще некоторые детали. Эти многообразия не существуют в точках $x \in \Sigma(F)$, траектории которых приближаются к особому множеству $\mathcal{S}$ слишком быстро. Более конкретно, если

$$d(F^{n_k}, \mathcal{S}) < \beta^{n_k} \quad \text{для некоторого} \quad \beta < e^{-\lambda_{m(x)}(x)}$$

и для некоторой бесконечной последовательности $n_k \rightarrow \infty$, то $W^s(x)$ не может существовать. Действительно, если бы оно существовало, то под

действием итераций F оно должно было бы сжиматься слишком медленно и, таким образом, рано или поздно оно добралось бы до множества $\mathcal{S}$; то есть для некоторого $n_k > 0$ мы должны были бы иметь $F^{n_k}(W^s(x)) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, что невозможно по определению $W^s(x)$, приведенному в предыдущей теореме.

К счастью, наше предположение **(КС1)** гарантирует, что почти для каждой точки $x \in N$ существуют $c(x) > 0$ и $\kappa > 0$ такие, что

$$d(F^n(x), \mathcal{S}) > c(x)|n|^{-\kappa}$$

для всех $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ (см. упражнение 9.34). Этот факт, в свою очередь, может быть использован для обоснования существования $W^s(x)$ и $W^u(x)$ и даже для оценки их размера, мы же опустим дальнейшие детали.

9.10.1. Абсолютная непрерывность

Определим отображение голономии как в **(Н6)** раздела 6.3 (см. также раздел 5.7). Часть II книги [KS86] посвящена доказательству следующего факта.

Теорема 9.42. *Для любого измеримого множества $A \subset V_*^1$, такого, что $m_1(A) = 0$, мы имеем $m_2(h(A)) = 0$, где m_i , $i = 1, 2$, обозначает меру Лебега на V^i .*

Теоремы 9.41 и 9.42 соответствуют результатам разделов 4.11 и 5.8 для рассеивающих билиардов и результатам разделов 8.10 и 8.13 для стадионов Бунимовича. Общие теоремы, представленные здесь, менее точные, чем наши ранние результаты для более конкретных билиардов, но их достаточно для следующего раздела.

9.11. Доказательство эргодичности с помощью «регулярных накрытий»

В главе 6 мы доказали эргодичность для рассеивающих билиардов, используя оригинальный метод Синая (датируемый 1970 годом). В главе 8 мы применили его снова к билиардам Бунимовича, но с ограниченными успехом. Ограничения данного подхода обсуждались во введении к главе 6 и в разделе 8.15. Здесь мы представим более свежую и более мощную схему для доказательства эргодичности (основанную на построении «регулярных накрытий»), развитую также Синаем и его школой в середине 1980-х. Мы уже описали различные аспекты обоих методов в главе 6 и разделе 8.15. Здесь мы представим более формальное изложение.

9.11.1. Предположения

Вернемся к гладкому отображению с особенностями общего вида, определенному в § 3.1 и использованному в § 9.2. Пусть $F: N \rightarrow M$ — такое отображение, и пусть F удовлетворяет всем условиям Катка–Стрельцина (см. § 9.9). Так как предполагается применить этот метод к отображению столкновений $\mathcal{F}$, можно предположить, что $M = 2$; это позволит нам упростить некоторые технические условия.

Наделим M невырожденной римановой метрикой $\|\cdot\|$ и предположим, что инвариантная мера μ является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега на M и имеет ограниченную плотность, положительную на $\text{int } M$. Наконец, пусть отображение F гиперболическое (но не обязательно равномерно гиперболическое), то есть $\mu(\Sigma(F)) = 1$.

Наша главная цель заключается в том, чтобы описать достаточные условия, при которых F является эргодическим. Мы не будем доказывать эргодичность непосредственно, так как эта часть чрезвычайно сложна; читателю будет предложено обратиться к другим источникам для изучения этой части. Заметим только, что эргодичность не следует каким бы то ни было образом из гиперболичности: область Песина $\Sigma(F)$ разлагается лишь на конечное или счетное количество эргодических компонент Σ_i положительной меры. Множества Σ_i могут быть довольно сложными и очень нерегулярными [KS86, раздел 13 в части II].

Обычно используемая схема доказательства эргодичности включает два основных этапа. На первом этапе устанавливается «локальная эргодичность»; то есть здесь необходимо показать, что для некоторых типичных точек $x \in M$ существует окрестность $\mathcal{U}_x \subset M$, которая целиком (mod 0) лежит в одной эргодической компоненте. На втором требуется проверить, что эти типичные точки покрывают линейно связное множество полной меры (откуда после простых рассуждений следует «глобальная эргодичность»). Эта стратегия была применена в разделах 6.5 и 6.6 соответственно, где мы доказали эргодичность рассеивающих бильярдов.

Начнем с локальной эргодичности, обычно наиболее сложного пункта из двух. На самом деле мы приведем два набора достаточных условий для локальной эргодичности. Один разработан Синаем и Черновым [SC87], хорошо описан в [KSS90] и обобщен Черновым в [Ch93]. Второй набор является аналогом первого, приспособленным Ливерани и Войтковским [LW95] к симплектическим отображениям (которые, конечно, включают все бильярды). Каждая из этих двух версий «локальной эргодической теоремы» имеет определенные преимущества, поэтому мы приведем оба варианта.

Доказательство локальной эргодичности в предположении любого из наборов достаточных условий является очень сложным (здесь в игру вступают «регулярные накрытия») и выходит за рамки этой книги.

9.11.2. Локальная эргодичность (версия Синяя – Чернова)

Мы сформулируем локальную эргодическую теорему в ее современной, наиболее общей форме, следуя [Ch93]. Так как отображение F гиперболическое, то существуют одномерные устойчивые и неустойчивые пространства, E_x^s и E_x^u соответственно, почти в каждой точке $x \in M$.

Определение 9.43. Точка $x \in N$ называется *u-типичной*, если для любого $A > 1$ существует $n \geq 1$ и окрестность $\mathcal{U}_x$ точки x такие, что для любого $y \in \mathcal{U}_x$

$$\|D_y F^n(u)\| > A\|u\|, \quad u \in E_y^u$$

(где пространство E_y^u существует). Аналогично, *s-типичные* точки определяются путем замены F^n на F^{-n} и E_y^u на E_y^s .

Определение 9.44. Точка $x \in N$ называется СЧ-достаточной, если существуют $B > 1$ и два целых $n < m$ такие, что $F^n(x)$ определено, и существует окрестность $\mathcal{U}$ точки $F^n(x)$ такая, что для любой точки $y \in \mathcal{U}$ мы имеем

$$\|D_y F^{m-n}(u)\| > B\|u\|, \quad u \in E_y^u, \quad \text{и} \quad \|D_y F^{m-n}(v)\| < B^{-1}\|v\|, \quad v \in E_y^s$$

(там, где пространства E_y^u и E_y^s существуют).

Теперь перечислим набор достаточных условий эргодичности.

СЧ1: (Растяжение) Неустойчивые (устойчивые) вектора растягиваются (соответственно сжимаются) монотонно¹: $\|D_x F(u)\| \geq \|u\|$ для всех $u \in E_x^u$ и $\|D_x F^{-1}(u)\| \geq \|u\|$ для всех $u \in E_x^s$.

СЧ2: (Непрерывность) Семейства устойчивых и неустойчивых подпространств E_x^s и E_x^u непрерывны на своих областях. Более того, предельные пространства $\lim_{y \rightarrow x} E_y^u$ и $\lim_{y \rightarrow x} E_y^s$ всегда трансверсальны друг другу в каждой СЧ-достаточной точке x , даже если E_x^u или E_x^s не существуют.

¹Метрика, в которой это свойство имеет место, называется *адаптивной*, или *метрикой Ляпунова*. Мы построили адаптивную метрику для рассеивающих билиардов в § 5.10.

- СЧ3:** (Регулярность) Для любого $n \neq 0$ множество S_n является конечным² объединением гладких кривых, которые могут пересекаться только в концевых точках. Кривизна всех кривых в S_n ограничена константой $c_n < \infty$.
- СЧ4:** (Двойные особенности) Для любого $n \geq 1$ пересечение $S_n \cap S_{-n}$ является конечным³ множеством.
- СЧ5:** (Трансверсальность) Почти в каждой точке $x \in S_1$ подпространство E_x^u определено и трансверсально S_1 , и почти в каждой точке $x \in S_{-1}$ подпространство E_x^s определено и трансверсально S_{-1} .
- СЧ6:** (Толщина окрестностей особенностей) Для любого $\delta > 0$ положим $\mathcal{U}_\delta$ — δ -окрестность множества $S_1 \cup S_{-1}$; тогда $\mu(\mathcal{U}_\delta) \leq \text{const} \cdot \delta$.
- СЧ7:** (Анзац) Почти каждая точка S_{-1} (относительно лебеговой длины на ней) является u -типичной, и почти каждая точка S_1 является s -типичной.

Теорема 9.45 (локальная эргодическая теорема [Ch93]). *При данных условиях каждая СЧ-достаточная точка $x \in M$ имеет открытую окрестность $\mathcal{U}_x$, которая целиком (mod 0) лежит в одной эргодической компоненте.*

Первая версия теоремы [SC87, KSS90] предполагала условие более строгое, чем (СЧ5) (правильное расположение; см. (ЛВ4) ниже). Позже оно было ослаблено Черновым [Ch93].

Заметим также, что предположение о кривизне в СЧ3 было пропущено во всех этих работах; на его необходимость было указано недавно в [BCST02].

9.11.3. Локальная эргодичность (версия Ливерани – Войтковского)

Мотивированные приложениями в гамильтоновой механике (которые включают бильярды, но не ограничиваются ими), Ливерани и Войтковский адаптировали локальную эргодическую теорему для симплектических отображений. В двумерном случае, рассматриваемом здесь, симплектичность F , по существу, эквивалентна абсолютной непрерывности μ , что мы уже предположили.

²Мы можем предположить, что S_n является счетным объединением гладких кривых, но они должны аккумулироваться в конечном числе точек на M .

³Мы можем предположить, что пересечение $S_n \cap S_{-n}$ счетно, но имеет конечное число предельных точек.

Локальная эргодическая теорема Ливерани и Войтковского требует более ограничительных предположений относительно отображения F , чем теорема в § 3.1 (и в § 9.2). Мы должны предположить, что существует два конечных разбиения M

$$M = B_1^+ \cup \dots \cup B_r^+ = B_1^- \cup \dots \cup B_r^-,$$

где $B_i^\pm$ являются компактными множествами, $\text{int } B_i^\pm$ связно и плотно в $B_i^\pm$ и границы $\partial B_i^\pm$ состоят из конечного числа компактных гладких кривых, которые могут пересекаться только в своих концевых точках. Множества $B_i^\pm$ играют роль «строительных блоков» (или «боксов»).

Теперь предположим, что отображение F определено независимо на каждой области B_i^+ , $1 \leq i \leq r$, таким образом, что F является диффеоморфизмом класса C^r ($r \geq 2$) внутренности B_i^+ на внутренность B_i^- и гомеоморфизмом B_i^+ на B_i^- .

Заметим, что множества $N = \cup_i \text{int } B_i^+$ и $F(N) = \cup_i \text{int } B_i^-$ открыты и плотны в M . Предположим, что на каждой связной компоненте N отображение F может быть продолжено по непрерывности на границу ∂N , а на каждой связной компоненте $F(N)$ обратное отображение F^{-1} может быть продолжено по непрерывности на границу $\partial F(N)$. Так как границы B_i^+ могут иметь общие точки, то функция F может быть многозначной на $\cup_i \partial B_i^+$.

Гиперболичность должна быть обеспечена наличием поля неустойчивых конусов $\{C_z\}$, инвариантного и в конечном счете строго инвариантного (§ 3.13). Предположим, что конусы $\{C_z\}$ определены на внутренности каждого «бокса» B_i^+ . Пусть X_z, Y_z — единичные векторы, образующие грани C_z , то есть

$$C_z = \{u \in T_z M : u = aX_z + bY_z, \quad ab \geq 0\}$$

(здесь a, b играют роли координат вектора u). Для каждого конуса C_z существует ассоциированная квадратичная форма, задаваемая $Q_z(u) = A(X_z, Y_z)ab$, где $A(X_z, Y_z)$ — площадь параллелограмма, натянутого на X_z и Y_z . Величина

$$\sigma(D_z F^n) = \inf_{u \in \text{int}(C_z)} \sqrt{\frac{Q_{F^n z}(D_z F^n u)}{Q_z(u)}}$$

есть мера растяжения внутренней части неустойчивого конуса под действием $D_z F^n$. Аналогично, мы можем определить σ для F^{-1} путем замены C_z на его дополнение.

Определение 9.46. Точка $z \in M$ называется *ЛВ-достаточной*, если существует $n > 0$ такое, что $z \notin S_n \cap S_{-n}$ и либо $\sigma(D_z F^n) > 3$, либо $\sigma(D_z F^{-n}) > 3$.

Так как семейство конусов $\{C\}$ в конечном счете строго инвариантно, то множество достаточных точек M имеет μ -полную меру [LW95, §7F].

Для применения локальной эргодической теоремы мы должны проверить следующие условия.

ЛВ1: (Свойство несжимания) Существует константа $\rho > 0$ такая, что для каждого $n \geq 1$, каждой точки $z \in M \setminus S_n$ и вектора $u \in C_z$ мы имеем $\|D_z F^n u\| \geq \rho \|u\|$.

ЛВ2: (Непрерывность) Ограничение C на внутренность каждого бокса B_i^+ непрерывно⁴.

ЛВ3: (Регулярность) Для любого $n \neq 0$ множество S_n является конечным объединением гладких компактных кривых, которые могут пересекаться только в концевых точках. Кривизна всех кривых в S_n ограничена константой $c_n < \infty$.

ЛВ4: (Правильное расположение) Касательное пространство к S_{-1} в произвольной точке $z \in S_{-1}$ содержится строго в $C(z)$, и касательное пространство к S_1 в произвольной точке $z \in S_1$ содержится строго в дополняющем конусе $C'(z)$.

ЛВ5: (Анзац) Почти для каждой точки $z \in S_1$ (относительно меры Лебега на S') имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(D_z F^{-n}) = \infty$. Аналогично, почти для каждой точки $z \in S_{-1}$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(D_z F^n) = \infty$.

Теорема 9.47 (локальная эргодическая теорема [LW95]). *В данных условиях каждая ЛВ-достаточная точка x в боксе B_i^+ имеет открытую окрестность U_x в B_i^+ , целиком лежащую (mod 0) в одной эргодической компоненте.*

9.11.4. Сравнение

Теорема Ливерани–Войтковского (ЛВ) использует гиперболичность через существование инвариантного семейства конусов, в то время как

⁴Оказывается, что это условие можно ослабить [DMM06]: достаточно предположить, что каждый бокс B_i^+ может быть разложен на счетное число подбоксов таких, что ограничение C на внутренность каждого подбокса непрерывно.

теорема Синяя–Чернова (СЧ) работает непосредственно с устойчивыми и неустойчивыми подпространствами (это, возможно, несущественное отличие отражает вкус авторов).

Что более важно, СЧ-теорема требует монотонного растяжения и сжатия (СЧ5), в то время как ЛВ-стратегия использует менее ограничительные условия несжимания (ЛВ1).

С другой стороны, ЛВ-теорема накладывает более строгие требования на особенности отображения F , которые должны представлять собой *конечное объединение* очень регулярных кривых. СЧ-теорема допускает менее регулярные множества особенностей, возможно, со счетным числом кривых (мы видели такие отображения в § 4.10, изучая рассеивающие биллиарды категории В). Вот почему СЧ-теорема вынуждена делать дополнительные предположения (СЧ4), (СЧ5) и (СЧ6), которые в окружении ЛВ-условий являются лишними; они просто следуют из них.

Кроме того, (СЧ5) является более слабым свойством, чем (ЛВ4); усовершенствование СЧ-теоремы было сделано в [Ch93]. И определение СЧ-достаточности требует только *некоторого* растяжения вдоль траектории точки, в то время как ЛВ-достаточность требует, чтобы коэффициент растяжения был > 3 .

9.11.5. Глобальная эргодичность

Предположим, что локальная эргодическая теорема (в обоих вариантах) доказана. Это означает, грубо говоря, что эргодические компоненты Σ_i отображения F являются (mod 0) объединениями открытых шаров, описанных вокруг достаточных точек. Теперь мы сделаем наше последнее предположение.

Г1: (Изобилие достаточных точек) Множество $G \subset M$ достаточных точек является линейно связным и имеет полную меру.

Вид достаточности (СЧ или ЛВ) должен соответствовать виду локальной эргодической теоремы, применяемой к данному отображению F .

Теорема 9.48 (глобальная эргодическая теорема). *В данных условиях отображение F эргодическое.*

Доказательство почти идентично доказательству предложения 6.19, поэтому мы предоставим его читателю в качестве упражнения.

После доказательства эргодичности можно обратиться к перемешиванию и свойству Бернулли. Согласно общей теореме об эргодическом разложении (см. § 6.7), каждая эргодическая компонента Σ_i может быть

разбита на конечное число непересекающихся измеримых множеств $\Sigma_{i,j}$, $1 \leq j \leq J_i$, таким образом, что $F(\Sigma_{i,j}) = \Sigma_{i,j+1}$, где $1 \leq j < J_i$ и $F(\Sigma_{i,J_i}) = \Sigma_{i,1}$, а отображение F^{J_i} , ограниченное на $\Sigma_{i,j}$, является К-перемешивающим при каждом $1 \leq j \leq J_i$.

Итак, достаточно проверить, что F^n является эргодическим при каждом $n \geq 1$, чтобы сделать вывод о том, что F является К-перемешивающим. Тогда из общих результатов Чернова и Хаскелла [CH96] и Орнштейна и Вейса [OW98] будет следовать, что F обладает свойством Бернулли.

9.11.6. Приложения

Первая попытка выполнить описанную программу была сделана в [Sz92], где отстаивалась та точка зрения, что все фокусирующие бильярды, удовлетворяющие условию Войтковского (9.11), являются эргодическими. Маркарян [Mar93a] работал всего с одним бильiardным столом, удовлетворяющим (9.11), кардиоидным (см. упражнение 9.16), но получил детальное доказательство эргодичности. Эти первые работы использовали версию локальной эргодической теоремы Синая – Чернова.

Дель-Маньо [DM01] пошел по пути Ливериана – Войтковского, чтобы показать, что бильiard в «усеченном» эллипсе

$$x^2/a^2 + y^2 = 1, \quad |y| \leq h < 1, \quad (9.29)$$

является эргодическим при условии $h < 1/\sqrt{1+a^2}$. Позднее Маркарян [DMM03] обобщил этот результат на так называемые «эллиптические» стадионы, области, ограниченные двумя эллиптическими дугами, удовлетворяющими (9.29), где $1 < a < \sqrt{4-2\sqrt{2}}$ и $h < 1/\sqrt{1+a^2}$, и раздвинутыми на расстояние $2d$, где $d > 2a^2\sqrt{a^2-1}$.

В настоящее время ведется работа [DMM06] по доказательству эргодичности для намного более широкого класса бильiardов с абсолютно фокусирующими дугами.

Послесловие

Мы изложили теорию двумерных хаотических билиардов. Наша главная цель заключалась в том, чтобы охватить фундаментальные факты этой теории, которые в большинстве своем восходят к работе Синая и его школы в 1970-х годах. Мы также включили последние продвижения в этой теории, такие как точные технические оценки, относящиеся к неустойчивым многообразиям (бóльшие части глав 4 и 5), и статистические свойства (глава 7). На самом деле некоторые *новые* результаты были получены одним из нас (НЧ) во время работы над книгой (сюда относятся предложение 4.29, оценки в § 4.12–4.14 и 5.5, теоремы 5.31 и 7.41 и ПНПИ § 7.9).

Даже несмотря на то, что наша работа с рассеивающими билиярдами Синая была довольно широкой (и местами очень глубокой), наша книга не ставит перед собой цели описать или даже только обозреть всю сферу хаотических билиардов. Мы прошли только некоторый путь, анализируя билиарды Бунимовича в главе 8, пропуская огромные технические трудности и оставляя многие задачи нерешенными. В главу 9 мы в действительности включили обзор других плоских хаотических билиардов с фокусирующими участками границы, но мы опустили большинство доказательств. Читатель может найти полные и ясно изложенные доказательства в [Wo86, Mar88, Don91, Bu92].

Наша книга даже не касается вопросов многомерных хаотических билиардов. Для изучения периодических газов Лоренца в пространстве отсылаем читателя к [SC87] (оригинальное доказательство эргодичности, которое не является полным), [BCST02] (современное, полное доказательство эргодичности для рассеивающих объектов с алгебраическими границами) и [BCST03] (детальный технический анализ неустойчивых многообразий и особенностей, аналогичный нашей главе 5).

Интересные модели многомерных хаотических билиардов с фокусирующими участками границы (сферические шапки) были построены Бунимовичем и Рехасеком (Rehacek) [BR97, BR98a, BR98b], которые также исследовали родственное явление астигматизма [Bu00].

Но самая большая тема, которую мы оставили в стороне, это газ из тяжелых шаров. Длинная и замечательная история изучения газов из тяжелых

шаров восходит к Л. Больцману, который в девятнадцатом веке (если выражаться на современном языке) выдвинул гипотезу об их эргодичности и положил ее в основу законов статистической механики. В 1940-х Н. Крылов указал на замеченные аналогии между динамикой тяжелых шаров и динамикой геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны, для которых гиперболичность уже была установлена. Синай в начале 1960-х годов сформулировал гипотезу, утверждающую, что газы из $N \geq 2$ тяжелых шаров на торе должны быть гиперболическими и эргодическими. Синай свел системы тяжелых шаров к рассеивающим и полурассеивающим билиардам (в простейшем случае мы сделали это в § 4.2).

Сам Синай [Sin70] доказал эргодичность для $N = 2$ и представил детальный план для решения задачи в ее общем случае [SC87]. Главная составная часть его плана, локальная эргодическая теорема, была получена Синаем и Черновым [SC87]. Дальнейший прогресс обязан в основном венгерской школе (А. Крамли, Н. Симани (Simanyi) и Д. Сас (Szasz)). Отсылаем читателя к работам [KSS90, KSS91, KSS92, BLPS92, Sim99, Sim03, Sim04] для изучения этих вопросов. Представляется, что полное решение этой крупной задачи (известной на сегодняшний день как эргодическая гипотеза Больцмана–Синая) не за горами. Оно может стать темой следующей книги, посвященной хаотическим билиардам.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Теория меры

Здесь для удобства читателя мы представим основные определения и факты теории меры, используемые в нашей книге.

σ -алгебры. Пусть X — некоторое множество. σ -алгебра $\mathfrak{F}$ на X есть непустой набор подмножеств X , обладающий двумя свойствами: (i) он замкнут относительно операции счетного объединения; то есть если $A_i \in \mathfrak{F}$ при всех $i \geq 1$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$; и (ii) он замкнут относительно операции взятия дополнения; то есть если $A \in \mathfrak{F}$, то $A^c = X \setminus A \in \mathfrak{F}$. Пара $(X, \mathfrak{F})$ называется измеримым пространством; множества $A \in \mathfrak{F}$ называются измеримыми.

Незамедлительно мы получаем, что любая σ -алгебра замкнута относительно всех счетных комбинаций элементарных теоретико-множественных операций (объединений, пересечений, разностей, симметрических разностей, взятия дополнений). Каждая σ -алгебра содержит само X и пустое множество $\emptyset$.

Очевидно, что для любого семейства σ -алгебр $\{\mathfrak{F}_\alpha\}$ их пересечение $\mathfrak{F} = \bigcap_\alpha \mathfrak{F}_\alpha$ является σ -алгеброй. Для любого набора $\mathcal{E}$ подмножеств множества X обозначим через $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ минимальную σ -алгебру, содержащую $\mathcal{E}$ (она представляет собой пересечение всех σ -алгебр, содержащих $\mathcal{E}$). Будем говорить, что $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ является σ -алгеброй, порожденной $\mathcal{E}$.

Если X — топологическое пространство и $\mathcal{E}$ — набор открытых подмножеств X , то $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ называется борелевской σ -алгеброй на X . Например, борелевской σ -алгеброй на $\mathbb{R}$ является минимальная σ -алгебра, содержащая все открытые интервалы.

Меры. Мера μ на $(X, \mathfrak{F})$ есть функция $\mu: \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ с тремя свойствами: (i) она неотрицательна, то есть $\mu(A) \geq 0$ для всех $A \in \mathfrak{F}$; (ii) пустое множество имеет меру нуль, то есть $\mu(\emptyset) = 0$; и (iii) μ является σ -аддитивной (или счетно-аддитивной); то есть если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$, где $i \neq j$, то $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Так как во многих случаях σ -алгебры имеют тенденцию быть довольно большими, явное определение $\mu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{F}$ часто является

невыполнимой задачей. Тогда можно определить $\mu(A)$ на полуалгебре (см. ниже) и использовать теорему о продолжении, изложенную в следующем пункте.

Полуалгебра есть непустой набор $\mathfrak{E}$ подмножеств X с двумя свойствами: (i) он замкнут относительно операции пересечения; то есть если $A, B \in \mathfrak{E}$, то $A \cap B \in \mathfrak{E}$; и (ii) если $A \in \mathfrak{E}$, то $A^c = \bigcup_{i=1}^n A_i$, где каждое $A_i \in \mathfrak{E}$ и $A_1, \dots, A_n$ являются попарно непересекающимися подмножествами X .

Теорема о продолжении. Пусть $\mathfrak{E}$ — полуалгебра и неотрицательная функция $\mu: \mathfrak{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ обладает двумя свойствами: (i) $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ для некоторых $B_i \in \mathfrak{E}$ таких, что $\mu(B_i) < \infty$; и (ii) μ является σ -аддитивной; то есть если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathfrak{E}$, где $A_i \cap A_j = \emptyset$, где $i \neq j$, и $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{E}$, то $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. В этом случае существует единственная мера на σ -алгебре $\mathbb{F}(\mathfrak{E})$, согласованная со значениями μ на $\mathfrak{E}$.

Например, набор $\mathfrak{E}$ из открытых, замкнутых и полуоткрытых интервалов в $\mathbb{R}$ является полуалгеброй. Длина интервалов является функцией на $\mathfrak{E}$, удовлетворяющей вышеописанным свойствам (i) и (ii). Следовательно, существует единственная мера m на борелевской σ -алгебре на $\mathbb{R}$, совпадающая с обычной длиной на интервалах. Она называется мерой Лебега; она также может быть определена на большей σ -алгебре (см. ниже).

Лебеговы точки плотности. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — борелевское измеримое множество и $m(A) > 0$. Тогда существует измеримое подмножество $B \subset A$, обладающее двумя свойствами: (i) $m(A \setminus B) = 0$ и (ii) для любой точки $x \in B$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m([x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap A)}{m([x - \varepsilon, x + \varepsilon])} = 1.$$

Каждая точка $x \in B$ называется лебеговой точкой плотности множества A . Следующий простой факт несколько раз используется в нашей книге.

Пусть $A \subset (a, b)$ — измеримое множество. Предположим, что некоторая последовательность $\{\delta_n\}$ различных действительных чисел обладает двумя свойствами: (i) $\delta_n \rightarrow 0$ и (ii) множество A является инвариантным относительно δ_n -сдвига; то есть для любого $x \in A \cap (a + \delta_n, b - \delta_n)$ мы имеем $x - \delta_n \in A$ и $x + \delta_n \in A$. Тогда либо $\mu(A) = b - a$, либо $\mu(A) = 0$. Действительно, если $0 < \mu(A) < b - a$, то мы можем взять лебегову точку плотности $x \in A$ и лебегову точку плотности $y \in (a, b) \setminus A$ и сдвинуть малую окрестность x на малую окрестность y , что приводит к противоречию.

Вероятностные меры на $\mathbb{R}$. Мы говорим, что μ является конечной мерой на $(X, \mathfrak{F})$, если $\mu(X) < \infty$, и вероятностной мерой, если $\mu(X) = 1$.

Ограничение m на единичный интервал $[0, 1]$ является вероятностной мерой. В более общем случае: любая борелевская вероятностная мера μ на $\mathbb{R}$ может быть определена по формуле

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — функция, обладающая тремя свойствами: (i) она неубывающая, (ii) она непрерывна справа и (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. $F(x)$ называется функцией распределения μ . Заметим, что $F(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, за исключением, возможно, счетного числа точек.

Каждая функция $F(x)$ с перечисленными свойствами (i), (ii) и (iii) является функцией распределения вероятностной меры на $\mathbb{R}$.

Мы будем рассматривать только вероятностные меры.

Интеграл Лебега. Пусть $(X, \mathfrak{F})$ — измеримое пространство. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется измеримой, если для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$ мы имеем $g^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$. (В действительности достаточно, чтобы прообразы всех открытых интервалов $(a, b) \subset \mathbb{R}$ были измеримыми множествами.)

Измеримая функция g называется простой, если $g(X)$ является конечным множеством; в этом случае положим $g(X) = \{c_1, \dots, c_n\}$ и $A_k = g^{-1}(c_k)$, где $1 \leq k \leq n$. Тогда мы можем записать $g(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$, где

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A, \end{cases}$$

обозначает индикатор множества A .

Пусть μ — мера на $(X, \mathfrak{F})$ и $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция. Интеграл (Лебега) $\int_X g d\mu$ определяется следующим образом. Если $g = \mathbf{1}_A$ для некоторого $A \in \mathfrak{F}$, то $\int_X \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A)$. Если $g(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$ — простая функция, то $\int_X g d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k)$. Если $g \geq 0$, то

$$\int_X g d\mu = \sup \left\{ \int_X h d\mu : h \text{ — простая и } h \leq g \right\}.$$

Будем говорить, что $g \geq 0$ интегрируема, если супремум конечен.

Произвольную функцию g мы можем представить в виде $g = g^+ - g^-$, где $g^+ = \max\{g, 0\}$ и $g^- = \max\{-g, 0\}$. Заметим, что $g^+, g^- \geq 0$ и $|g| = g^+ + g^-$. Теперь определим $\int_X g d\mu = \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu$ (при условии, что оба интеграла существуют). Мы говорим, что g интегрируема, если $\int_X g d\mu$ существует; класс интегрируемых (строго говоря, μ -интегрируемых) функций на X обозначается $L^1_\mu(X)$.

В общем случае: для любого $p > 0$ обозначим

$$L^p_\mu(X) = \left\{ f: \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Это векторное пространство с нормой $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$ (на самом деле эта функция становится нормой, если отождествить функции, совпадающие на множестве полной меры; см. также ниже). Кроме того, пространство $L^2_\mu(X)$ имеет внутреннее произведение, заданное формулой $\langle f, g \rangle = \int_X fg d\mu$. Заметим, что если $\mu(X) < \infty$ и $p < q$, то $L^q_\mu(X) \subset L^p_\mu(X)$.

Множество всех ограниченных функций на X , обозначаемое $L^\infty(X)$, также является векторным пространством с нормой $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$.

Для любого $A \in \mathfrak{F}$ мы можем определить $\int_A f d\mu = \int_X \mathbf{1}_A f d\mu$.

Интеграл Римана–Стилтьеса. Пусть μ — вероятностная мера на $\mathbb{R}$ и $F(x)$ — ее функция распределения; см. выше. Тогда для любой μ -интегрируемой функции $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x),$$

где второй интеграл может быть определен следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b g(x) dF(x)$$

и

$$\int_a^b g(x) dF(x) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n g(x_i^*) [F(x_i) - F(x_{i-1})], \quad (A.1)$$

где $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ — разбиение интервала $[a, b]$, $\|P\| = \max |x_i - x_{i-1}|$ и $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, где $i = 1, \dots, n$. Интеграл (A.1) называется интегралом Римана–Стилтьеса.

Слабая сходимость. Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность вероятностных мер на $\mathbb{R}$ с функциями распределения $\{F_n(x)\}$. Говорят, что $\{\mu_n\}$ слабо сходится к вероятностной мере μ на $\mathbb{R}$ (обозначается $\mu_n \Rightarrow \mu$), если

для каждой ограниченной непрерывной функции $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ мы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} g d\mu.$$

Заметим: $\mu_n \Rightarrow \mu$, если и только если для любого интервала $[a, b]$, такого, что $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$, мы имеем $\mu_n([a, b]) \rightarrow \mu([a, b])$. В терминах функций распределения это означает, что $F_n(x) \rightarrow F(x)$ для каждой точки $x \in \mathbb{R}$, где $F(x)$ непрерывна.

Абсолютная непрерывность. Пусть μ и ν — две меры на $(X, \mathfrak{F})$. Говорят, что ν абсолютно непрерывна относительно μ , что обозначается $\nu \ll \mu$, если $\nu(A) = 0$ для каждого множества A такого, что $\mu(A) = 0$. Теорема Радона–Никодима гласит, что $\nu \ll \mu$, если и только если существует неотрицательная функция (плотность) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \mathfrak{F}.$$

Функция $f(x)$ называется производной Радона–Никодима, $f = d\nu/d\mu$. Меры μ и ν называются эквивалентными, если $\mu \ll \nu$ и $\nu \ll \mu$.

Если вероятностная мера μ на $\mathbb{R}$ с функцией распределения $F(x)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега m , то ее плотностью является функция $f(x) = F'(x)$, так что

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Мера μ эквивалентна m , если и только если $f(x) > 0$ на множестве полной меры.

Пусть $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{G}, \nu)$ — два измеримых пространства с вероятностными мерами. Преобразование $T: X \rightarrow Y$ называется измеримым, если для каждого $B \in \mathfrak{G}$ мы имеем $T^{-1}B \in \mathfrak{F}$. Образ $T\mu$ меры μ определяется по формуле $T\mu(B) = \mu(T^{-1}B)$ для $B \in \mathfrak{G}$ или, что эквивалентно,

$$\int_Y g d(T\mu) = \int_X g \circ T d\mu$$

для любой ограниченной измеримой функции $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$.

Преобразование T называется абсолютно непрерывным, если $\nu \ll T\mu$. Тогда функция плотности $f = d\nu/d(T\mu)$ удовлетворяет «формуле замены переменных»

$$\int_Y g d\nu = \int_Y gf d(T\mu) = \int_X (g \circ T)(f \circ T) d\mu$$

для любой ограниченной измеримой функции $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$. Таким образом, $f \circ T$ является якобианом отображения T (относительно мер μ и ν).

Две меры μ и ν на $(X, \mathfrak{F})$ взаимно сингулярны (или ортогональны), обозначается $\mu \perp \nu$, если существует множество $A \in \mathfrak{F}$ такое, что $\mu(A^c) = 0$ и $\nu(A) = 0$.

Теорема Лебега о разложении гласит, что для двух мер μ и ν на $(X, \mathfrak{F})$ существует единственное представление $\mu = \mu_a + \mu_s$, где $\mu_a \ll \nu$ и $\mu_s \perp \nu$.

Произведение мер. Пусть $(X_1, \mathfrak{F}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{F}_2, \mu_2)$ — два пространства с мерами. Декартово произведение $X_1 \times X_2$ определяется следующим образом:

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}.$$

Пусть $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ — σ -алгебра на $X_1 \times X_2$, порожденная подмножествами вида $A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$. Произведение мер $\mu_1 \times \mu_2$ определяется как единственная мера на $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$, удовлетворяющая условию

$$\mu_1 \times \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad \forall A_1 \in \mathfrak{F}_1, A_2 \in \mathfrak{F}_2.$$

Пространство с мерой $(X_1 \times X_2, \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ называется прямым произведением пространств $(X_1, \mathfrak{F}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{F}_2, \mu_2)$. Эта конструкция легко обобщается на случай конечного и счетного произведения пространств с мерой.

Полные меры. Пусть $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ — пространство с мерой. Измеримое множество $A \subset X$ называется множеством меры нуль, если $\mu(A) = 0$, и множеством полной меры, если $\mu(A^c) = 0$. Мера называется полной, если каждое подмножество $B \subset A$ множества меры нуль A измеримо (и, автоматически тоже имеет меру нуль).

Мера Лебега m на борелевской σ -алгебре подмножеств $\mathbb{R}$ не полна.

Тривиальную задачу представляет собой продолжение меры μ на $(X, \mathfrak{F})$ до полной меры. Пусть $\mathfrak{N} = \{N \in \mathfrak{F} : \mu(N) = 0\}$. Определим новую σ -алгебру следующим образом:

$$\overline{\mathfrak{F}} = \{A \cup E : A \in \mathfrak{F}, E \subset N \text{ для некоторого } N \in \mathfrak{N}\};$$

для каждого $B = A \cup E$ положим $\overline{\mu}(B) = \mu(A)$. Тогда $\overline{\mu}$ — полная мера на $(X, \overline{\mathfrak{F}})$.

Продолжение меры Лебега m на $\mathbb{R}$ до полной меры также называется мерой Лебега, и мы по-прежнему будем обозначать ее m . Ее ограничение на единичный интервал $[0, 1]$ является полной вероятностной мерой.

В оставшейся части приложения А мы будем рассматривать только полные вероятностные меры.

Фундаментальный принцип состоит в пренебрежении множествами меры нуль, то есть в том, чтобы вести исследование с точностью до множеств меры нуль (или по модулю множества нулевой меры). Например, мы отождествляем две функции $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, если они отличаются только на множестве меры нуль, вспомним наше определение нормы $\|\cdot\|_p$.

Для двух измеримых множеств $A, B \in \mathfrak{F}$ положим

$$A = B \pmod{0} \iff \mu(A \Delta B) = 0;$$

то есть A может быть преобразовано в B путем добавления и/или отбрасывания некоторого множества меры нуль. Очевидно, $A = B \pmod{0}$ является отношением эквивалентности. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество классов эквивалентности $\pmod{0}$ измеримых множеств. Мы можем определить на $\mathfrak{M}$ метрику $\rho(A, B) = \mu(A \Delta B)$, которая задает структуру полного метрического пространства.

Два пространства с мерой $(X_1, \mathfrak{F}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{F}_2, \mu_2)$ называются изоморфными $\pmod{0}$, если для каждого $i = 1, 2$ существует множество $B_i \subset X_i$ полной μ_i меры и биекция $\varphi: B_1 \rightarrow B_2$, сохраняющая измеримые множества и меры; то есть для каждого $A \in \mathfrak{F}_1$ мы имеем $\varphi(A \cap B_1) \in \mathfrak{F}_2$ и $\mu_1(A \cap B) = \mu_2(\varphi(A \cap B_1))$ и наоборот. Отображение φ называется изоморфизмом.

Генераторы. Пусть $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ — пространство с полной вероятностной мерой. Мы говорим, что счетное семейство $\mathfrak{B} = \{E_n\}_{n=1}^\infty$ измеримых подмножеств является генератором пространства X , если оно обладает двумя свойствами: (i) минимальная σ -алгебра $\mathbb{F}(\mathfrak{B})$, содержащая $\mathfrak{B}$, содержит $\pmod{0}$ все измеримые подмножества; то есть для каждого $A \in \mathfrak{F}$ найдется $B \in \mathbb{F}(\mathfrak{B})$ такое, что $A \subset B$ и $\mu(B \setminus A) = 0$; и (ii) множества $\{E_n\}$ разделяют точки X ; то есть для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдется $E_n \in \mathfrak{B}$ такое, что $x \in E_n$ и $y \notin E_n$ или $x \notin E_n$ и $y \in E_n$.

Например, пусть $X = [0, 1]$ — полуоткрытый единичный интервал и μ — мера Лебега на нем. Тогда интервалы $[a_n, b_n) \subset [0, 1]$ с рациональными концевыми точками образуют генератор X .

Пространство X называется полным относительно генератора $\mathfrak{B}$, если каждое счетное пересечение $\bigcap_{n \geq 1} F_n$, где каждое F_n является одним из двух множеств E_n и E_n^c , не пусто (заметим, что согласно свойству (ii) генератора это пересечение состоит не более чем из одной точки).

В примере выше $X = [0, 1)$ не полно относительно генератора, состоящего из интервалов с рациональными конечными точками. Но оно полно относительно генератора $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящего из множеств

$$E_n = \bigcup_{i=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{2i}{2^n}, \frac{2i+1}{2^n} \right).$$

Пространство X называется полным (mod 0) относительно генератора $\mathfrak{B}$, если оно может быть включено в большее пространство $X' \supset X$ с полной вероятностной мерой μ' , согласующейся с μ на X и такой, что $\mu'(X' \setminus X) = 0$, и которое является полным относительно генератора $\mathfrak{B}' = \{E'_n\}$, где $E_n = E'_n \cap X$ при всех n . Если пространство X полное (mod 0) относительно одного генератора, то оно полное относительно всех генераторов.

Пространства Лебега. Пространство X с полной вероятностной мерой μ называется пространством Лебега, если оно полное (mod 0) относительно некоторых (а следовательно, относительно всех) генераторов.

Единичный интервал $X = [0, 1]$ с мерой Лебега на нем является пространством Лебега. В общем случае пространство Лебега может содержать конечное или счетное число атомов (точек положительной меры). На самом деле любое пространство Лебега изоморфно (mod 0) объединению конечного или счетного числа атомов суммарной меры $p = [0, 1]$ и интервалу $[p, 1]$ с мерой Лебега на нем. (Если атомов нет, то оно изоморфно единичному интервалу $[0, 1]$.)

Понятие пространства Лебега очень полезно. С одной стороны, оно очень широкое и включает практически все пространства с мерой, которые встречаются в приложениях. В частности, любое полное сепарабельное метрическое пространство с вероятностной мерой, определенной на борелевских множествах (и соответствующим образом продолженной до полной меры; см. выше), является пространством Лебега. Прямое произведение конечного или счетного числа пространств Лебега является пространством Лебега.

С другой стороны, пространства Лебега имеют важные атрибуты, которые отсутствуют у более общих видов пространств с мерой. Одним из наиболее важных особенностей пространств Лебега является понятие измеримого разбиения; см. следующий раздел.

Измеримые разбиения. Это довольно специфическая тема в теории меры, но она является ключевой для доказательства эргодичности и перемешивания хаотических билиардов. Отсылаем читателя к [Ro49, Ro67]

за полным описанием, а также к [CFS82, приложение 1], [ME81, глава 1] и [Вои60, стр. 57–72] за обзором (последняя книга сфокусирована на топологических аспектах измеримых разбиений).

Пусть $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ — пространство Лебега. Разбиение ξ множества X есть набор $\{\xi_\alpha\}$ непересекающихся подмножеств X таких, что $\cup_\alpha \xi_\alpha = X$. Обозначим через $\xi(x)$ единственный элемент ξ , содержащий точку $x \in X$. Подмножество $A \subset X$ называется ξ -множеством, если оно представляет собой объединение некоторых элементов ξ . Для любого разбиения ξ набор измеримых ξ -множеств образует σ -алгебру.

Существует два различных разбиения, которые являются в некотором смысле максимальным и минимальным. Разбиение X на отдельные точки обозначается ε . Тривиальное разбиение X , единственным элементом которого является X , обозначается ν .

Разбиение ξ называется измеримым, если существует счетный набор измеримых ξ -множеств $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ такой, что для любых двух различных элементов $C_1, C_2 \in \xi$ найдется B_n , для которого $C_1 \subseteq B_n$ и $C_2 \not\subseteq B_n$, или наоборот. (Заметим, что из $C_2 \not\subseteq B_n$ на самом деле следует $C_2 \subseteq B_n^c$, так как B_n — ξ -множество.) Назовем $\{B_n\}$ генератором ξ .

Каждый элемент $C \in \xi$ измеримого разбиения ξ может быть представлен в виде $C = \cap_{n \geq 1} F_n$, где каждое F_n является одним из двух множеств B_n и B_n^c (обратно, каждое непустое пересечение $\cap_{n \geq 1} F_n$ является в точности одним из элементов C). Следовательно, $C \in \mathfrak{F}$; то есть каждый элемент измеримого разбиения является измеримым множеством. Но обратное далеко не является верным.

Рассмотрим, например, меру Лебега μ на $X = [0, 1)$ и зафиксируем иррациональное число α . Пусть ξ — разбиение X такое, что $x, y \in X$ лежат в одном элементе ξ (то есть $y \in \xi(x)$), если и только если $x - y = m + \alpha n$ для некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$. Каждый элемент $C \in \xi$ является счетным (следовательно, измеримым) множеством. Существует две последовательности $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ таких, что $\delta_k = m_k + \alpha n_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Далее, каждое ξ -множество B будет инвариантным относительно сдвига на каждое δ_k ; то есть $B = \{x + \delta_k \pmod{1}, x \in B\}$ для каждого k . Следовательно, $\mu(B) = 0$ или 1 (ср. наше рассуждение о лебеговых точках плотности). Таким образом, ξ не может иметь счетного генератора, и значит оно неизмеримо.

Другой пример неизмеримого разбиения (возникающий при изучении динамических систем) представляет собой разбиение многообразия M на глобальные неустойчивые подмногообразия, соответствующие транзитивному диффеоморфизму Аносова, действующему на M .

Разбиение ξ измеримо, если и только если его элементы являются множествами уровня измеримой функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Разбиения ε и ν измеримы.

Фактор (частное) пространство. Пусть ξ — измеримое разбиение пространства Лебега $(X, \mathfrak{F}, \mu)$. Фактор-пространство $(X_\xi, \mathfrak{F}_\xi, \mu_\xi)$ определяется следующим образом. Пусть X_ξ — пространство, точками которого являются элементы ξ , обозначим $\varphi: X \rightarrow X_\xi$ естественную проекцию $\varphi(x) = \xi(x)$. Пусть $\mathfrak{F}_\xi$ — σ -алгебра подмножеств $A \subset X_\xi$ такая, что $\varphi^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$. Наконец, фактор-мера μ_ξ определяется по формуле $\mu_\xi(A) = \mu(\varphi^{-1}A)$ для любого $A \in \mathfrak{F}_\xi$. Фактор-пространство $(X_\xi, \mathfrak{F}_\xi, \mu_\xi)$ также является пространством Лебега.

Условные меры. Пусть ξ — измеримое разбиение пространства Лебега $(X, \mathfrak{F}, \mu)$. Наиболее важное свойство измеримых разбиений заключается в существовании условных мер на его элементах. Следующий факт иногда называют *дроблением* меры μ .

Для μ_ξ -почти всех элементов $C \in \xi$ существует σ -алгебра $\mathfrak{F}_C$ и вероятностная мера μ_C на $(C, \mathfrak{F}_C)$ с тремя свойствами: (i) $(C, \mathfrak{F}_C, \mu_C)$ — пространство Лебега, (ii) для любого $B \in \mathfrak{F}$ мы имеем $B \cap C \in \mathfrak{F}_C$ для μ_ξ -почти каждого $C \in \xi$, и (iii) для любого $B \in \mathfrak{F}$ мы имеем

$$\mu(B) = \int_{X_\xi} \mu_C(B \cap C) d\mu_\xi.$$

Меры $\{\mu_C, C \in \xi\}$ называются условными мерами, индуцированными μ на $C \in \xi$.

Заметим, что если $\mu(C) > 0$ для некоторого $C \in \xi$, то условная мера может быть определена стандартным образом: $\mu_C(B) = \mu(C \cap B)/\mu(C)$.

Приведенная выше интегральная формула эквивалентна формуле типа Фубини

$$\int_X f d\mu = \int_{X_\xi} \left(\int_C f d\mu_C \right) d\mu_\xi \quad (A.2)$$

для любой интегрируемой функции f на X . Внутренний интеграл $f_\xi = \int_C f d\mu_C$ известен как условное математическое ожидание функции f относительно разбиения ξ .

Примеры. Рассмотрим разбиение ξ_1 единичного квадрата $\mathbb{K} = \{(x, y): 0 \leq x, y \leq 1\}$ на вертикальные линии $A_c = \{x = c\}, c \in [0, 1]$.

Если μ — гладкая мера на $\mathbb{K}$ с плотностью $\rho(x, y)$ относительно меры Лебега, то условная мера μ_c на A_c имеет (нормированную) плотность $\rho_c(y) = \rho(c, y) / \int_0^1 \rho(c, y) dy$, а фактор-мера имеет на единичном интервале $0 \leq c \leq 1$ плотность $\rho_\xi(c) = \int_0^1 \rho(c, y) dy$; теперь интегральная формула (A.2) является просто теоремой Фубини

$$\int_{\mathbb{K}} f(x, y) \rho(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(c, y) \rho_c(y) dy \right) \rho_\xi(c) dc.$$

В частности, если μ — мера Лебега ($\rho(x, y) = 1$), то μ_c является равномерной мерой ($\rho_c(y) = 1$) при каждом c ; см. рис. A.1.

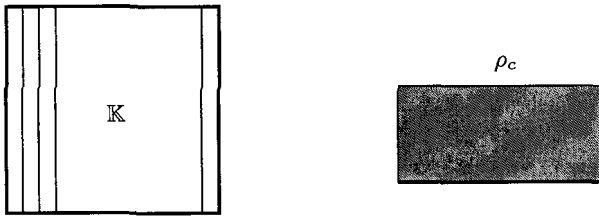
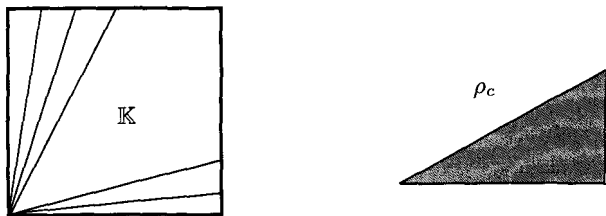


Рис. A.1. Разбиение $\mathbb{K}$ и условная плотность

Рассмотрим другое разбиение ξ_2 единичного квадрата $\mathbb{K} = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ на линии $y = cx$, выходящие из начала координат (см. рис. A.2), и пусть μ — мера Лебега на $\mathbb{K}$. В этом случае условная мера на каждой линии будет иметь плотность треугольного распределения, обращаящуюся в нуль в начале координат; читателю предлагается проверить это напрямую.

Заметим, что вертикальный сегмент $A_0 = \{x = 0\}$ является элементом обоих разбиений, но соответствующие условные меры отличаются. Это показывает, что условная мера μ_C не определяется одним лишь множеством $C \subset X$; она зависит от разбиения ξ , содержащего C как элемент.

Классы эквивалентности разбиений (mod 0). Мы говорим, что разбиения эквивалентны, $\xi = \nu \pmod{0}$, если они совпадают на множестве полной меры; то есть если найдется множество полной меры $D \subset X$ такое, что для каждого $A \in \xi$, удовлетворяющего условию $A \cap D \neq \emptyset$, существует $B \in \eta$ такое, что $A \cap D = B \cap D$. Очевидно, мы имеем отношение

Рис. А.2. Другое разбиение $\mathbb{K}$ и его условная плотность

эквивалентности. Если ξ — измеримое разбиение и $\eta = \xi \pmod{0}$, то η также является измеримым разбиением. В дальнейшем под «разбиением» мы будем понимать класс эквивалентности $\pmod{0}$ разбиений.

Существует естественное взаимнооднозначное соответствие между измеримыми разбиениями и полными под- σ -алгебрами, которые определяются ниже.

Полные под- σ -алгебры. Пусть $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ — пространство Лебега. Мы обозначили $\mathfrak{M}$ множество классов эквивалентности $\pmod{0}$ измеримых подмножеств X . Теоретико-множественные операции $\cup, \cap, \setminus, \Delta$ и операция взятия дополнения естественно переносятся с $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M}$ будет содержать $\emptyset \pmod{0}$ и $X \pmod{0}$, то есть классы множеств, эквивалентных $\pmod{0}$ множествам $\emptyset$ и X . Также $\mathfrak{M}$ будет замкнуто относительно операций взятия дополнения и счетного объединения. Таким образом, мы можем рассматривать его как σ -алгебру.

Пусть подмножество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ содержит классы $\emptyset \pmod{0}$ и $X \pmod{0}$ и является замкнутым относительно операций взятия дополнения и счетного объединения. Тогда измеримые подмножества X , которые принадлежат классам, входящим в $\mathfrak{N}$, образуют σ -алгебру; обозначим ее $\mathfrak{G}$. Тогда ограничение меры μ на $\mathfrak{G}$ будет полной вероятностной мерой. Мы назовем каждую такую $\mathfrak{G}$ полной под- σ -алгеброй $\mathfrak{F}$.

Мы уже обратили внимание, что для каждого разбиения ξ набор измеримых ξ -множеств является σ -алгеброй; обозначим ее $\mathfrak{G}_0(\xi)$. Далее, для каждого измеримого разбиения ξ набор подмножеств X , определяемый как

$$\mathfrak{G}(\xi) = \{A \in \mathfrak{F} : A = B \pmod{0} \text{ для некоторого } B \in \mathfrak{G}_0(\xi)\},$$

является полной под- σ -алгеброй $\mathfrak{F}$.

Таким образом устанавливается взаимнооднозначное соответствие между измеримыми разбиениями и полными под- σ -алгебрами: если $\mathfrak{G}(\xi) = \mathfrak{G}(\eta)$, то $\xi = \eta \pmod{0}$, и для каждой полной под- σ -алгебры $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ существует измеримое разбиение ξ такое, что $\mathfrak{G}(\xi) = \mathfrak{G}$.

Минимальная полная под- σ -алгебра, состоящая из множеств, эквивалентных $\emptyset \pmod{0}$ и $X \pmod{0}$, соответствует тривиальному разбиению ν . Максимальная под- σ -алгебра $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ соответствует разбиению ε на индивидуальные точки.

Отношения и операции на разбиениях. Пусть $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ — пространство Лебега, обозначим ξ, η и т. д. измеримые разбиения. Мы говорим, что ξ мельче, чем η (или η крупнее, чем ξ), обозначается $\xi \preceq \eta \pmod{0}$, если найдется множество полной меры $D \subset X$ такое, что

$$\forall A \in \xi \exists B \in \eta: A \cap D \subset B \cap D.$$

Соотношение $\xi \preceq \eta \pmod{0}$ выполнено, если и только если $\mathfrak{G}(\xi) \supset \mathfrak{G}(\eta)$.

Для любого семейства измеримых разбиений $\{\xi_\alpha\}$ определим их объединение $\vee_\alpha \xi_\alpha$ как измеримое разбиение ξ с двумя свойствами: (i) $\xi_\alpha \preceq \xi$ при всех α ; и (ii) если ξ' — другое измеримое разбиение, такое, что $\xi_\alpha \preceq \xi'$ при всех α , то $\xi \preceq \xi'$. Другими словами, ξ — минимальное разбиение, более мелкое, чем каждое ξ_α .

Для любого семейства полных под- σ -алгебр $\mathfrak{G}_\alpha$ определим их объединение $\vee_\alpha \mathfrak{G}_\alpha$ как пересечение всех полных под- σ -алгебр, каждая из которых содержит все $\mathfrak{G}_\alpha$. Тогда мы имеем $\mathfrak{G}(\vee_\alpha \xi_\alpha) = \vee_\alpha \mathfrak{G}(\xi_\alpha)$.

Для конечного или счетного семейства $\{\xi_n\}$ объединение $\xi = \vee_n \xi_n$ является разбиением, элементами которого являются (непустые) пересечения $\cap_n C_n$, где $C_n \in \xi_n$ при всех n .

Для любого семейства измеримых разбиений $\{\xi_\alpha\}$ определим их пересечение $\wedge_\alpha \xi_\alpha$ как измеримое разбиение ξ с двумя свойствами: (i) $\xi_\alpha \succeq \xi$ при всех α ; и (ii) если ξ' — другое измеримое разбиение, такое, что $\xi_\alpha \succeq \xi'$ при всех α , то $\xi \succeq \xi'$. Другими словами, ξ — максимальное разбиение, более крупное, чем каждое ξ_α . Мы имеем $\mathfrak{G}(\wedge_\alpha \xi_\alpha) \cap_\alpha \mathfrak{G}(\xi_\alpha)$.

Возьмем конечное или счетное семейство измеримых разбиений $\{\xi_m\}$, можно попробовать построить их пересечение $\wedge_m \xi_m$ следующим образом. Для любых $x, y \in X$ положим $x \sim y$, если существует конечная последовательность $A_1, \dots, A_n \in \cup_m \xi_m$ такая, что $x \in A_1$, $y \in A_n$ и $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ при всех $1 \leq i \leq n-1$ (конечно, здесь при каждом i множества A_i и A_{i+1} должны быть элементами различных разбиений). Тогда $\sim$ будет отношением эквивалентности на X и его классы образуют разбиение X ; обозначим его $\wedge_m \xi_m$.

Разбиение $\lambda_m \xi_m$ соответствует «логически» пересечению $\wedge_m \xi_m$, и во многих случаях $\lambda_m \xi_m = \wedge_m \xi_m \pmod{0}$. Но в некоторых случаях $\lambda_m \xi_m$ может довольно сильно отличаться от $\wedge_m \xi_m$ (на самом деле $\lambda_m \xi_m$ может даже не быть измеримым), поэтому использовать это разбиение вместо $\wedge_m \xi_m$ небезопасно.

Например, пусть $X = [0, 1]$ и μ — мера Лебега на X . Пусть $\xi_1 = \{[0, 0.5], (0.5, 1]\}$ и ξ_2 — разбиение, элементами которого являются двухточечное множество $\{0, 1\}$ и все одноточечные подмножества $X \setminus \{0, 1\}$. Читателю предлагается проверить, что $\xi_1 \wedge \xi_2 = \xi_1 \pmod{0}$, но $\xi_1 \lambda \xi_2 = \nu$, — тривиальное разбиение. Эта проблема может быть устранена следующим образом.

Пусть $D \subset X$ — множество полной меры. Если мы ограничим σ -алгебру $\mathfrak{F}$ и меру μ на D , то D будет пространством Лебега. Если ограничить ξ_m на D (заменяя каждый элемент $C \in \xi_m$ на $C \cap D$), то получаем измеримое разбиение, $\xi_{m,D}$, множества D . Мы утверждаем, что D может быть выбрано таким образом, что $\lambda_m \xi_{m,D} \succ \wedge_m \xi_{m,D}$; то есть каждый элемент $C \in \wedge_m \xi_{m,D}$ является $(\lambda_m \xi_{m,D})$ -множеством. И, конечно, если $\lambda_m \xi_{m,D}$ измеримо, то $\lambda_m \xi_{m,D} = \wedge_m \xi_{m,D} \pmod{0}$.

Действительно, пусть $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ — счетный генератор пересечения $\wedge_m \xi_m$. Тогда $B_n \in \mathfrak{G}(\xi_m)$ при всех n и m . Следовательно, B_n является ξ_m -множеством $\pmod{0}$; то есть существует ξ_m -множество $B'_{n,m} = B_n \pmod{0}$. Так как $N = \cup_{m,n} (B_n \Delta B'_{n,m})$ является множеством меры нуль, то можно определить $D = X \setminus N$. Очевидно, $B_n \cap D$ будет являться $\xi_{m,D}$ -множеством при всех n и m , что доказывает наше утверждение.

Этот факт играет важную роль в § 6.10.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Теория вероятности

Здесь мы приведем определения и факты теории вероятности, используемые в книге (в основном в главе 7). Мы используем обозначения теории меры, введенные в приложении А.

Случайные величины. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ есть множество Ω с σ -алгеброй $\mathfrak{F}$ его подмножеств и вероятностной мерой $\mathbb{P}$ на $\mathfrak{F}$. Точки $\omega \in \Omega$ называются элементарными исходами, а измеримые множества $A \in \mathfrak{F}$ называются событиями.

Случайная величина есть измеримая функция $\mathcal{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Каждая случайная величина $\mathcal{X}$ индуцирует вероятностную меру $\mu_{\mathcal{X}}$ на $\mathbb{R}$, определяемую соотношением $\mu_{\mathcal{X}}(A) = \mathbb{P}\{\mathcal{X}^{-1}(A)\}$ для каждого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$. Функция распределения этой меры (см. приложение А) называется функцией распределения $F(x)$ случайной величины $\mathcal{X}$ и обозначается $F_{\mathcal{X}}(x)$. Она может быть определена следующим образом:

$$F(x) = \mu_{\mathcal{X}}(-\infty, x] = \mathbb{P}\{\mathcal{X}^{-1}(-\infty, x]\};$$

или несколько менее формально: $F(x) = \mathbb{P}(\mathcal{X} \leq x)$.

Если мера $\mu_{\mathcal{X}}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега m на $\mathbb{R}$, то она имеет плотность $f(x) \geq 0$, удовлетворяющую условию

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

при всех $a < b$. В этом случае случайная величина $\mathcal{X}$ называется абсолютно непрерывной.

Мы говорим, что событие $A \in \mathcal{F}$ имеет место почти наверное, если $\mathbb{P}(A) = 1$. Например, две случайные величины $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ равны почти наверное, если $\mathbb{P}(\mathcal{X} = \mathcal{Y}) = 1$.

Среднее значение, дисперсия, ковариация. Среднее значение (или математическое ожидание) случайной величины $\mathcal{X} \in L^1_{\mathbb{P}}(\Omega)$ есть

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}) = \int_{\Omega} \mathcal{X} d\mathbb{P}.$$

Оно также может быть вычислено по формуле

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbb{R}} x d\mu_{\mathcal{X}} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\mathcal{X}}(x).$$

Дисперсия случайной величины $\mathcal{X} \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega)$ определяется формулой

$$\text{Var}(\mathcal{X}) = \mathbb{E}[\mathcal{X} - \mathbb{E}(\mathcal{X})]^2 = \mathbb{E}[\mathcal{X}^2] - [\mathbb{E}(\mathcal{X})]^2,$$

а стандартное отклонение есть $\sigma_{\mathcal{X}} = \sqrt{\text{Var}(\mathcal{X})}$. Мы имеем $\text{Var}(\mathcal{X}) \geq 0$, и $\text{Var}(\mathcal{X}) = 0$, если и только если случайная величина $\mathcal{X}$ является константой почти наверное; то есть $\mathbb{P}(\mathcal{X} = c) = 1$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

В более общем случае: для любых $m \geq 1$ и $\mathcal{X} \in L^m_{\mathbb{P}}(\Omega)$ m -й момент $\mathcal{X}$ определяется как $\mathbb{E}(\mathcal{X}^m)$.

Если $\mathcal{X}$ — случайная величина с конечной дисперсией $\text{Var}(\mathcal{X}) < \infty$, то линейное преобразование

$$\mathcal{Y} = \frac{\mathcal{X} - \mathbb{E}(\mathcal{X})}{\sigma_{\mathcal{X}}}$$

имеет нулевое среднее, $\mathbb{E}(\mathcal{Y}) = 0$, и единичную дисперсию, $\text{Var}(\mathcal{Y}) = 1$. Будем называть $\mathcal{Y}$ нормализацией $\mathcal{X}$.

Неравенство Чебышева утверждает, что для любой случайной величины с конечной дисперсией, $\text{Var}(\mathcal{X}) < \infty$, и любого $t > 0$

$$\mathbb{P}\{|\mathcal{X} - \mathbb{E}(\mathcal{X})| > t\} \leq t^{-2} \text{Var}(\mathcal{X}).$$

Возьмем две случайные величины $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, их ковариация есть

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &= \mathbb{E}[(\mathcal{X} - \mathbb{E}(\mathcal{X}))(\mathcal{Y} - \mathbb{E}(\mathcal{Y}))] = \\ &= \mathbb{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) - \mathbb{E}(\mathcal{X})\mathbb{E}(\mathcal{Y}), \end{aligned}$$

а их корреляция —

$$\rho_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}} = \frac{\text{Cov}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\sigma_{\mathcal{X}} \sigma_{\mathcal{Y}}}.$$

Из неравенства Шварца следует неравенство $-1 \leq \rho_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}} \leq 1$. Заметим, что $\text{Cov}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = \text{Var}(\mathcal{X})$.

Случайные векторы. Случайный вектор есть конечная последовательность $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n\}$ случайных величин, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$; его можно рассматривать как измеримое отображение $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Совместная функция распределения таких случайных величин есть

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\mathcal{X}_1 \leq x_1, \dots, \mathcal{X}_n \leq x_n)$$

(более формально: это вероятность события $\cap_{i=1}^n \mathcal{X}_i^{-1}(-\infty, x_i]$). Говорят, что случайный вектор $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n\}$ абсолютно непрерывен, если существует (совместная) функция плотности $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ такая, что

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(s_1, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_n.$$

Тогда для любого борелевского подмножества $B \subset \mathbb{R}^n$ мы имеем

$$\mathbb{P}\{(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \in B\} = \int_B \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где m_n обозначает меру Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Среднее значение случайного вектора¹ $\mathbf{X} = (\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)^T$ есть n -вектор

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) = (\mathbb{E}(\mathcal{X}_1), \dots, \mathbb{E}(\mathcal{X}_n))^T.$$

Матрица ковариации случайного вектора $\mathbf{X} = (\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)^T$ есть

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))^T] = \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) - \mathbb{E}(\mathbf{X})\mathbb{E}(\mathbf{X})^T. \end{aligned}$$

Заметим, что ее компоненты $v_{ij} = \text{Cov}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j)$. Эта матрица симметрична и положительно полуопределена; ее диагональные компоненты суть $v_{ii} = \text{Var}(\mathcal{X}_i)$.

Гауссовские (нормальные) случайные величины. Случайная величина $\mathcal{X}$ называется нормальной (или гауссовской), обозначается $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, если она абсолютно непрерывна и ее плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

¹Мы будем обозначать векторы полужирными символами и всегда понимать под ними вектор-столбцы.

Здесь $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$ — параметры; на самом деле $\mu = \mathbb{E}(\mathcal{X})$ и $\sigma^2 = \text{Var}(\mathcal{X})$. Стандартная нормальная случайная величина обозначается $\mathcal{N}(0, 1)$, она имеет нулевое среднее и единичную дисперсию. Заметим, что если $\mathcal{X}$ имеет распределение $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то ее нормализация $\mathcal{Y} = (cX - \mu)/\sigma$ имеет распределение $\mathcal{N}(0, 1)$.

Случайный вектор $\mathbf{X} = (\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)^T$ называется нормальным (или гауссовским), если он абсолютно непрерывен и его плотность имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi \mathbf{V})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})},$$

где $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ — вектор, а $\mathbf{V}$ — симметричная положительно определенная матрица размера $n \times n$; здесь использовалось обозначение $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. На самом деле $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{V}$ — матрица ковариации вектора $\mathbf{X}$. Стандартный нормальный случайный вектор обозначается $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$; он имеет нулевое среднее $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ и единичную матрицу ковариации $\mathbf{V} = I$.

Независимость. Два события $A, B \subset \Omega$ называются независимыми, если $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Несколько событий $A_1, \dots, A_n$ называются независимыми, если для любой последовательности $B_1, \dots, B_n$, где каждое B_i — одно из двух событий A_i и A_i^c , мы имеем

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1) \dots \mathbb{P}(B_n).$$

Случайные величины $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ называются независимыми, если для любых борелевских множеств $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$ события $\mathcal{X}_1^{-1}(A_1), \dots, \mathcal{X}_n^{-1}(A_n)$ независимы.

Если случайные величины $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ независимы, то их попарные ковариации (и коэффициенты корреляции) равны нулю, и, таким образом, матрица $\mathbf{V}$ является диагональной. Для нормальных векторов верно и обратное: если матрица ковариации нормального вектора $\mathbf{X} = (\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)^T$ диагональна, то его компоненты $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ независимы. В общем случае: случайные величины $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ называются некоррелированными, если $\text{Cov}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j) = 0$ при $i \neq j$, но при этом они необязательно являются независимыми.

Случайные величины $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ независимы, если и только если их совместная функция распределения распадается на множители

$$F_{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\mathcal{X}_1}(x_1) \dots F_{\mathcal{X}_n}(x_n). \quad (B.1)$$

Если случайные величины $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ независимы и имеют конечные средние значения, то

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_n) = \mathbb{E}(\mathcal{X}_1) \dots \mathbb{E}(\mathcal{X}_n).$$

Кроме того, если они имеют конечные дисперсии, то

$$\text{Var}(\mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_n) = \text{Var}(\mathcal{X}_1) + \dots + \text{Var}(\mathcal{X}_n).$$

Пусть $\{\mathcal{X}_n\}$ — бесконечная последовательность случайных величин. Говорят, что они независимы, если независимость имеет место для любого конечного поднабора $\{\mathcal{X}_{n_1}, \dots, \mathcal{X}_{n_k}\}$. Будем говорить, что случайные величины $\{\mathcal{X}_n\}$ имеют одинаковое распределение (или являются одинаково распределенными), если они имеют общую функцию распределения $F(x) = F_{\mathcal{X}_n}(x)$. Конечно, в этом случае они имеют равные средние значения и равные дисперсии.

Лемма Бореля–Кантелли. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность событий. Тогда

$$A_\infty = \limsup_n A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$

есть событие, состоящее из точек $\omega \in \Omega$, принадлежащих бесконечному числу событий A_n . Говорят, что событие A_∞ имеет место, если и только если имеет место бесконечное число событий A_n . Лемма Бореля–Кантелли состоит из двух частей. Первая (простая) часть гласит, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(A_\infty) = 0. \quad (B.2)$$

Вторая (более сложная) часть леммы Бореля–Кантелли гласит, что если A_n независимы, то (B.2) верно и в обратную сторону.

Сходимость. Существует три основных типа сходимости случайных величин $\{\mathcal{X}_n\}$ к новой случайной величине $\mathcal{X}$.

Мы говорим, что $\{\mathcal{X}_n\}$ сходится к $\mathcal{X}$ почти наверное (обозначается $\mathcal{X}_n \rightarrow \mathcal{X}$ п. н.), если существует событие $D \subset \Omega$ такое, что $\mathbb{P}(D) = 1$ и $\mathcal{X}_n(\omega) \rightarrow \mathcal{X}(\omega)$ для всех $\omega \in D$.

Мы говорим, что $\mathcal{X}_n \rightarrow \mathcal{X}$ по вероятности, если для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\mathcal{X}_n - \mathcal{X}| > \varepsilon) = 0.$$

Мы говорим, что $\{\mathcal{X}_n\}$ сходится к $\mathcal{X}$ по распределению (или по закону), обозначается $\mathcal{X}_n \Rightarrow \mathcal{X}$, если меры $\mu_{\mathcal{X}_n}$ на $\mathbb{R}$ слабо сходятся к мере $\mu_{\mathcal{X}}$. Или, что эквивалентно, функции распределения $F_{\mathcal{X}_n}(x)$ сходятся к функции распределения $F_{\mathcal{X}}(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, где $F_{\mathcal{X}}(x)$ непрерывна. В этом случае мы говорим, что $\{F_{\mathcal{X}_n}\}$ сходится к $F_{\mathcal{X}}$ слабо, и пишем $F_{\mathcal{X}_n} \Rightarrow F_{\mathcal{X}}$.

Из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности. В свою очередь, из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению. Если предельная случайная величина $\mathcal{X}$ является почти наверное константой, то сходимость по вероятности эквивалентна сходимости по распределению.

Законы больших чисел. Возьмем случайные величины $\{\mathcal{X}_n\}$ и рассмотрим их частные суммы

$$S_n = \mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_n.$$

Мы говорим, что $\{\mathcal{X}_n\}$ удовлетворяет закону больших чисел (ЗБЧ), если последовательность $\{S_n/n\}$ сходится к константе (то есть к постоянной случайной величине) по вероятности (что в данном случае эквивалентно сходимости по распределению).

Мы говорим, что $\{\mathcal{X}_n\}$ удовлетворяет сильному закону больших чисел (СЗБЧ), если последовательность $\{S_n/n\}$ сходится к константе почти наверное. Конечно, из СЗБЧ следует ЗБЧ.

Если $\{\mathcal{X}_n\}$ — независимые одинаково распределенные (кратко н. о. р.) случайные величины с конечным средним значением, $\mathbb{E}|\mathcal{X}_n| < \infty$, то они удовлетворяют СЗБЧ. Более строго: $S_n/n \rightarrow \mu$ п. н., где $\mu = \mathbb{E}(\mathcal{X}_n)$ — общее среднее значение случайных величин $\mathcal{X}_n$.

Центральная предельная теорема. Говорят, что последовательность случайных величин $\{\mathcal{X}_n\}$ удовлетворяет центральной предельной теореме (ЦПТ), если ее нормированные частные суммы $(S_n - \mathbb{E}(S_n))/\sigma_{S_n}$ сходятся по распределению к стандартной нормальной случайной величине $\mathcal{N}(0, 1)$ (также говорят, что они сходятся к стандартному нормальному закону). Это означает, что для каждого $z \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma_{S_n}} \leq z \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

Если ЦПТ имеет место и $\text{Var}(S_n) = \sigma^2 n + \mathcal{O}(n)$ при некотором $\sigma^2 > 0$ (что обычно имеет место), то последовательность $(S_n - \mathbb{E}(S_n))/\sqrt{n}$ сходится по распределению к нормальному закону $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Пусть $\{\mathcal{X}_n\}$ — последовательность н. о. р. случайных величин, имеющих конечное среднее значение $\mu = \mathbb{E}(\mathcal{X}_n)$ и конечную дисперсию $\sigma^2 = \text{Var}(\mathcal{X}_n)$. Тогда она удовлетворяет ЦПТ. В этом случае, благодаря независимости, $\text{Var}(S_n) = \sigma^2 n$.

В более общем случае: пусть $\{\mathcal{X}_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих конечные средние значения $\mu_n = \mathbb{E}(\mathcal{X}_n)$ и конечные дисперсии $\sigma_n^2 = \text{Var}(\mathcal{X}_n)$. Предположим, что

$$D_n^2 := \text{Var}(S_n) = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Тогда $\{\mathcal{X}_n\}$ удовлетворяет ЦПТ при выполнении так называемого условия Линдеберга: для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((\mathcal{X}_k - \mu_n)^2 \cdot \mathbf{1}_{\{|\mathcal{X}_k - \mu_n| > \varepsilon D_n\}}) = 0, \quad (B.3)$$

где $\mathbf{1}_A$ обозначает индикатор события A . Условие Линдеберга замечательно тем, что оно не только достаточно, но и «почти» необходимо. Строго говоря, если предположить только, что $\sigma_n^2/D_n^2 \rightarrow 0$ (то есть дисперсия σ_n^2 не растет слишком резко), то условие Линдеберга (B.3) действительно необходимо для ЦПТ.

ЦПТ может быть обобщена на случай случайных векторов. Пусть $\{\mathbf{X}_n\}$ — последовательность н. о. р. случайных векторов, имеющих конечное среднее $\boldsymbol{\mu}$ и конечную матрицу ковариации $\mathbf{V}$. Рассмотрим частные суммы

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_n.$$

Тогда случайные вектора $(\mathbf{S}_n - n\boldsymbol{\mu})/\sqrt{n}$ сходятся по распределению к нормальному вектору (или к нормальному закону) с нулевым средним и матрицей ковариации $\mathbf{V}$, то есть к $N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$.

Характеристические функции. Комплексная случайная величина есть измеримая функция $\mathcal{Z}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$; ее можно представить в виде $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + i\mathcal{Y}$, где $i = \sqrt{-1}$, и $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ суть действительная и мнимая части $\mathcal{Z}$. Среднее значение $\mathcal{Z}$ определяется по формуле $\mathbb{E}(\mathcal{Z}) = \mathbb{E}(\mathcal{X}) + i\mathbb{E}(\mathcal{Y})$.

Характеристическая функция действительной случайной величины $\mathcal{X}$ есть комплекснозначная функция действительного аргумента $t \in \mathbb{R}$, определяемая следующим образом:

$$\varphi_{\mathcal{X}}(t) = \mathbb{E}[e^{it\mathcal{X}}] = \mathbb{E}[\cos(t\mathcal{X})] + i\mathbb{E}[\sin(t\mathcal{X})].$$

На самом деле это преобразование Фурье меры $\mu_{\mathcal{X}}$; с другой стороны, это преобразование Фурье–Стилтьеса функции распределения $F_{\mathcal{X}}(x)$:

$$\varphi_{\mathcal{X}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{\mathcal{X}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dF_{\mathcal{X}}(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) dF_{\mathcal{X}}(x). \quad (B.4)$$

Оно определено для всех $\mathcal{X}$ и любого $t \in \mathbb{R}$. На самом деле $\varphi_{\mathcal{X}}(0) = 1$ и $|\varphi_{\mathcal{X}}(t)| \leq 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Функция $\varphi_{\mathcal{X}}(t)$ равномерно непрерывна по t и положительно полуопределена; то есть

$$\sum_{i,j=1}^n \varphi_{\mathcal{X}}(t_i - t_j) z_i \bar{z}_j \geq 0$$

для любых $n \geq 2$ комплексных чисел $z_1, \dots, z_n$ и действительных чисел $t_1, \dots, t_n$.

Более того, любая положительно полуопределенная функция $\varphi(t)$, непрерывная в $t = 0$ и удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 1$, является характеристической функцией случайной величины (теорема Бохнера).

При всех $n \geq 0$ мы имеем $\varphi^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}(\mathcal{X}^n)$ при условии $\mathcal{X} \in L_{\mathbb{P}}^n(\Omega)$. Если случайные величины $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ независимы, то $e^{it\mathcal{X}_1}, \dots, e^{it\mathcal{X}_n}$ также независимы; следовательно,

$$\varphi_{\mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_n}(t) = \varphi_{\mathcal{X}_1}(t) \dots \varphi_{\mathcal{X}_n}(t). \quad (B.5)$$

Обратно, если (B.5) верно при всех $t \in \mathbb{R}$, то случайные величины $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ независимы.

Характеристическая функция вещественного случайного вектора $\mathbf{X} = (\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)^T$ есть комплексная функция n вещественных аргументов $t_1, \dots, t_n$, определяемая выражением

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E} \left[e^{i\langle \mathbf{t}, \mathbf{X} \rangle} \right] = \mathbb{E} [\cos(\langle \mathbf{t}, \mathbf{X} \rangle)] + i \mathbb{E} [\sin(\langle \mathbf{t}, \mathbf{X} \rangle)],$$

где $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)^T$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение двух n -векторов.

Характеристическая функция нормальной случайной величины $\mathcal{X} = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ со средним μ и дисперсией σ^2 имеет вид

$$\varphi_{\mathcal{X}}(t) = e^{it\mu - \sigma^2 t^2 / 2}.$$

Характеристическая функция нормального случайного вектора $\mathbf{X} = \mathcal{N}(\mu, \mathbf{V})$ со средним μ и матрицей ковариации $\mathbf{V}$ имеет вид

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\langle \mathbf{t}, \mu \rangle - \mathbf{t}^T \mathbf{V} \mathbf{t} / 2}.$$

Теорема о непрерывности. Зная функцию распределения $F_{\mathcal{X}}(x)$ случайной величины $\mathcal{X}$, можно вычислить ее характеристическую функцию по формуле (B.4). Существует обратная формула, выражающая $F_{\mathcal{X}}(x)$ через $\varphi_{\mathcal{X}}(t)$:

$$F_{\mathcal{X}}(b) - F_{\mathcal{X}}(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi_{\mathcal{X}}(t) dt,$$

которая верна для каждой пары точек $a < b$, где $F_{\mathcal{X}}$ непрерывна. Это однозначно определяет $F_{\mathcal{X}}$ при условии, что ее точки непрерывности плотны в $\mathbb{R}$.

Таким образом, существует взаимнооднозначное соответствие между функциями распределения $F(x)$ и характеристическими функциями $\varphi(t)$ случайных величин такое, что $F_{\mathcal{X}}(x)$ соответствует $\varphi_{\mathcal{X}}(t)$. Очень важным является то обстоятельство, что это соответствие непрерывно в следующем смысле.

Пусть F и $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — функции распределения, а φ и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — соответствующие характеристические функции. Тогда $F_n \Rightarrow F$, если и только если $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ поточечно (теорема Леви о непрерывности).

Часть «если» теоремы о непрерывности может быть несколько расширена, а именно: если $\{\varphi_n(t)\}$ — последовательность характеристических функций, сходящихся (поточечно) к функции $\varphi(t)$, непрерывной в $t = 0$, то $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины.

Стационарные последовательности. Пусть $\{\mathcal{X}_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, — последовательность н. о. р случайных величин. Тогда любая конечная подпоследовательность $\{\mathcal{X}_{n_1}, \dots, \mathcal{X}_{n_m}\}$ имеет совместную функцию распределения

$$F_{\mathcal{X}_{n_1}, \dots, \mathcal{X}_{n_m}}(x_1, \dots, x_m) = F(x_1) \dots F(x_m),$$

независящую от индексов $n_1, \dots, n_m$. В частности, она инвариантна относительно перестановок $(n_1, \dots, n_m) \mapsto (n_1 + n, \dots, n_m + n)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

В более общем случае: последовательность случайных величин $\{\mathcal{X}_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, называется стационарной² в сильном смысле, если распределение ее конечных подпоследовательностей инвариантно относительно сдвигов; то есть

$$F_{\mathcal{X}_{n_1}, \dots, \mathcal{X}_{n_m}}(x_1, \dots, x_m) = F_{\mathcal{X}_{n_1+n}, \dots, \mathcal{X}_{n_m+n}}(x_1, \dots, x_m)$$

²Мы говорим также, что $\{\mathcal{X}_n\}$ образуют стационарный случайный процесс.

при всех $m \geq 1$, произвольных $n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$ и произвольных $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$. Очевидно, в этом случае $\mathcal{X}_n$ распределены одинаково. Если $\mathcal{X}_n \in L^1_{\mathbb{P}}(\Omega)$, то они имеют одинаковое среднее значение $\mathbb{E}(\mathcal{X}_n) = \mu$. Если $\mathcal{X}_n \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega)$, то они имеют одинаковую среднюю дисперсию $\text{Var}(\mathcal{X}_n) = \sigma^2$ и ковариацию

$$\text{Cov}(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}_m) =: \mathbf{C}_{|m-n|}, \quad (B.6)$$

зависящую только от $|m - n|$. Последовательность случайных величин $\{\mathcal{X}_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, называется стационарной в слабом смысле, если случайные величины имеют одинаковое среднее значение, одинаковую дисперсию и имеет место (B.6) (но конечномерные распределения не обязаны быть инвариантными относительно сдвигов).

Стационарные последовательности случайных величин естественным образом встречаются при изучении динамических систем (глава 7).

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Эргодическая теория

Здесь мы приведем основные определения и факты эргодической теории (изучающей сохраняющие меру преобразования). Мы будем использовать обозначения теории меры (приложение А) и теории вероятности (приложение В).

Измеримые преобразования. Пусть $(X, \mathfrak{F})$ — измеримое пространство. Преобразование $T: X \rightarrow X$ называется измеримым, если $T^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$ для всех $B \in \mathfrak{F}$. Преобразование $T: X \rightarrow X$ называется автоморфизмом, если оно биективно, и как T , так и T^{-1} измеримы. Положительные итерации $\{T^n\}$, $n \geq 0$, измеримого отображения T образуют полугруппу; все итерации $\{T^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, автоморфизма T образуют группу. Для любой точки $x \in X$ последовательность $\{T^n x\}$ называется траекторией (или орбитой) точки x . Измеримые преобразования с непрерывным временем (потoki) будут рассмотрены в конце приложения.

Пусть $\mathcal{M}(X)$ обозначает множество всех вероятностных мер на $(X, \mathfrak{F})$. Это множество выпукло, так как для любых $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ и $0 < p < 1$ мы имеем $p\mu + (1-p)\nu \in \mathcal{M}(X)$. Измеримое преобразование $T: X \rightarrow X$ порождает отображение $T: \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X)$, определяемое формулой $(T\mu)(B) = \mu(T^{-1}B)$ для всех $\mu \in \mathcal{M}(X)$ и $B \in \mathfrak{F}$. (Это отображение иногда обозначается T_* , но мы для краткости предпочли T .)

Инвариантные меры. Возьмем измеримое преобразование $T: X \rightarrow X$, мера $\mu \in \mathcal{M}(X)$ называется T -инвариантной, если $T\mu = \mu$ (мы говорим, что T сохраняет μ). Если T — автоморфизм, то условие $T\mu = \mu$ эквивалентно $T^{-1}\mu = \mu$, таким образом, T и T^{-1} сохраняют одни и те же меры. Обозначим $\mathcal{M}_T(X)$ множество всех T -инвариантных вероятностных мер на X . Это выпуклое подмножество $\mathcal{M}(X)$.

Мера $\mu \in \mathcal{M}(X)$ является T -инвариантной, если и только если для любой измеримой функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ мы имеем

$$\int_X f \circ T \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

(в том смысле, что если один из интегралов существует, то существует и второй, и их значения равны). В более общем случае для любой $\mu \in \mathcal{M}(X)$ ее образ $\mu_1 = T\mu$ определяется выражением

$$\int_X f \circ T d\mu = \int_X f d\mu_1.$$

Измеримое преобразование $T: X \rightarrow X$ порождает линейное отображение U_T на пространстве измеримых функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, определяемое формулой

$$(U_T f)(x) = (f \circ T)(x) = f(T(x)).$$

Для любой T -инвариантной меры μ и $p > 0$ отображение $U_T: L_\mu^p(X) \rightarrow L_\mu^p(X)$ сохраняет норму $\|\cdot\|_p$; оно также сохраняет внутреннее произведение в $L_\mu^2(X)$. Если T — автоморфизм, то U_T — биекция; следовательно, это унитарный оператор на $L_\mu^2(X)$.

В последующем мы большей частью будем работать с измеримыми преобразованиями (обычно с автоморфизмами) $T: X \rightarrow X$, сохраняющими меру $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$. Мы будем называть четверку $(X, \mathfrak{F}, T, \mu)$ сохраняющим меру преобразованием.

Теорема Пуанкаре о возвращении. Пусть $T: X \rightarrow X$ сохраняет меру $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ и $\mu(A) > 0$ для некоторого измеримого множества $A \subset X$. Тогда почти для каждой по мере μ точки $x \in A$ имеем

$$T^{n_i}(x) \in A \quad \text{для некоторой последовательности } n_1 < n_2 < \dots$$

В условиях сформулированной теоремы отображение

$$T_A(x) = T^{n_A(x)}(x); \quad n_A(x) = \min\{n \geq 1: T^n(x) \in A\},$$

определено на A п.в.; оно называется отображением возвращения Пуанкаре. Оно сохраняет условную меру μ_A на A , определяемую формулой $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)/\mu(A)$.

Инвариантные множества и функции. Говорят, что измеримое множество $B \subset X$ является T -инвариантным, если $T^{-1}(B) = B$. Заметим, что множество B инвариантно, если $T(B) \subset B$ и $T(B^c) \subset B^c$.

Предположим, что T сохраняет меру μ . Тогда измеримое множество B называется T -инвариантным (mod 0), если $B = T^{-1}B$ (mod 0). Если B является T -инвариантным (mod 0), то существует T -инвариантное множество $\tilde{B}$ такое, что $B = \tilde{B}$ (mod 0).

Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ является T -инвариантной, если $U_T f = f$, то есть $f = f \circ T$. В этом случае f постоянна на каждой траектории отображения T . Если T сохраняет меру μ , то мы говорим, что функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ является T -инвариантной (mod 0), если $f(x) = f(Tx)$ почти для каждой точки $x \in X$ по мере μ . В этом случае существует T -инвариантная функция $\tilde{f}$ такая, что $f = \tilde{f}$ (mod 0).

Эргодические меры. T -инвариантная мера $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ называется эргодической, если для всякого T -инвариантного множества $B \subset X$ мы имеем $\mu(B) = 0$ или $\mu(B) = 1$. Это эквивалентно тому, что для всякого T -инвариантного (mod 0) множества $B \subset X$ мы имеем $\mu(B) = 0$ или $\mu(B) = 1$.

T -инвариантная мера μ является эргодической, если и только если любая T -инвариантная функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ является константой п.в.; то есть $\mu(x: f(x) = c) = 1$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Это эквивалентно тому, что μ эргодическая тогда и только тогда, когда каждая T -инвариантная (mod 0) функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ является константой п.в.; то есть $\mu(x: f(x) = c) = 1$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

Мы также говорим, что T эргодично, если из контекста ясно, какая инвариантная мера μ ассоциирована с T .

T -инвариантная мера $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ эргодична тогда и только тогда, когда она представляет собой экстремальную точку в выпуклом множестве $\mathcal{M}_T(X)$. Любые две различные эргодические меры μ_1, μ_2 взаимно сингулярны (ортогональны).

Если измеримое преобразование $T: X \rightarrow X$ имеет единственную инвариантную меру μ , то оно автоматически является эргодическим. Тогда T называется однозначно эргодическим.

Эргодическое разложение. Пусть $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ — пространство Лебега, где использованы обозначения раздела, посвященного измеримым разбиениям. Если $T: X \rightarrow X$ сохраняет меру μ , то множество T -инвариантных (mod 0) подмножеств $A \subset X$ образует полную под- σ -алгебру $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$. Она соответствует единственному (mod 0) измеримому разбиению ξ множества X . Обозначим $\mu_C, C \in \xi$, условные меры на элементах C .

В этом случае почти каждый элемент $C \in \xi$ является T -инвариантным (mod 0), то есть $\mu_C(C \cap T^{-1}C) = 1$. Следовательно, ограничение T на C определяется μ_C п.в. на C ; обозначим его T_C . Отображение $T_C: C \rightarrow C$ сохраняет меру μ_C и является эргодическим для почти всех $C \in \xi$. Элементы $C \in \xi$ с условными мерами μ_C называются эргодическими компонентами отображения T .

Изоморфизмы. Два сохраняющих меру преобразования $(X_1, \mathfrak{F}_1, T_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{F}_2, T_2, \mu_2)$ изоморфны, если для каждого $i = 1, 2$ существует T_i -инвариантное множество $B_i \subset X_i$ полной меры μ_i и существует биекция $\varphi: B_1 \rightarrow B_2$ такая, что (i) φ сохраняет измеримые множества и меры и (ii) φ сохраняет динамику, то есть $\varphi \circ T_1 = T_2 \circ \varphi$ на B_1 . Отображение φ называется изоморфизмом.

Многие свойства сохраняющих меру отображений инвариантны относительно изоморфизмов. Например, мера μ_1 является эргодической, если и только если эргодична μ_2 .

Эргодические суммы и средние. Пусть $(X, \mathfrak{F}, T, \mu)$ — сохраняющее меру преобразование и $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция. Тогда для каждого $x \in X$ последовательность $\{f(T^n x)\}$ значений f на траектории x играет важную роль. Будем представлять себе f как наблюдаемую величину, а $f(T^n x)$ — как ее значение в момент времени n ; следовательно, $\{f(T^n x)\}$ можно рассматривать как временной ряд. Его частные суммы

$$S_n(x) = f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x)$$

иногда называются эргодическими суммами, а предел

$$f_+(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_n(x) \quad (C.1)$$

(если он существует) называется будущим временным средним (или эргодическим средним) функции f вдоль орбиты x . Если T — автоморфизм, то можно определить прошлое временное среднее по формуле

$$f_-(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_{-n}(x), \quad (C.2)$$

где $S_{-n}(x) = f(x) + f(T^{-1}x) + \dots + f(T^{-n+1}x)$.

Эргодическая теорема Биркгофа. Пусть $(X, \mathfrak{F}, T, \mu)$ — сохраняющее меру преобразование и $f \in L^1_\mu(X)$. Тогда:

- (а) почти для каждой точки $x \in X$ предел $f_+(x)$, определяемый выражением (C.1), существует;
- (б) функция $f_+(x)$ является T -инвариантной; формально: если $f_+(x)$ существует, то $f_+(T^n x)$ существует при всех n и $f_+(T^n x) = f_+(x)$;
- (в) f_+ интегрируема и $\int_X f_+ d\mu = \int_X f d\mu$;

(г) если μ эргодическая, то $f_+(x)$ постоянна п.в. и ее значение равно $\int_X f d\mu$.

Если $T: X \rightarrow X$ — автоморфизм, то почти для каждой точки $x \in X$ предел $f_-(x)$, определяемый (C.2), также существует. Более того, пределы (C.1) и (C.2) совпадают п.в.: $f_+ = f_- \pmod{0}$.

Интеграл $\int_X f d\mu$ рассматривается как пространственное среднее функции f . Часть (г) эргодической теоремы утверждает, что если μ эргодическая, то временное среднее равно пространственному среднему.

Другая версия эргодической теоремы (называемая L^p эргодической теоремой фон Неймана) утверждает, что для каждого $p \geq 1$ и $f \in L^p_\mu(X)$ мы имеем $\|S_n/n - f_+\|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Частота возвращения. Пусть $A \subset X$ и $x \in X$. Предел

$$r_A(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\{0 \leq i \leq n-1 : T^i(x) \in A\}}{n}$$

(если он существует) называется (асимптотической) частотой посещения точкой x множества A (или частотой возвращения точки x в множество A).

Из эргодической теоремы следует, что $r_A(x)$ существует для п.в. $x \in X$. Более того, $r_A(x) > 0$ для п.в. $x \in A$. А также если μ эргодическая, то $r_A(x) = \mu(A)$ для п.в. $x \in X$. Следовательно, орбита почти каждой точки $x \in X$ проводит в множестве A время, пропорциональное $\mu(A)$. В этом смысле эргодическая мера μ описывает асимптотическое распределение почти каждой орбиты $\{T^n(x)\}$, $n \geq 0$, в пространстве X .

Перемешивание. Мы говорим, что отображение $T: X \rightarrow X$, сохраняющее меру μ , перемешивающее (или сильно перемешивающее), если для каждой пары измеримых подмножеств $A, B \subset X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Так как $\mu(A) = \mu(T^{-n}A)$, то это можно записать в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu(T^{-n}A \cap B) - \mu(T^{-n}A)\mu(B)| = 0;$$

то есть события $T^{-n}A$ и B являются асимптотически независимыми при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что условие $x \in T^{-n}A$ эквивалентно $T^n(x) \in A$; то есть мы говорим о событиях $x \in B$ (соответствующем положению x в момент времени 0) и $T^n(x) \in A$ (соответствующем образу x в момент n). Таким образом, перемешивание обычно интерпретируется как асимптотическая независимость далекого будущего от настоящего.

Перемешивание эквивалентно условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \cdot (g \circ T^n) \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle \quad \forall f, g \in L_\mu^2(X),$$

где для краткости использовано обозначение $\langle f \rangle = \int_X f d\mu$. Для заданных f и g величина

$$C_{f,g}(n) = \langle f \cdot (g \circ T^n) \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle$$

называется корреляцией (между f и g) в момент n (заметим, что на самом деле это ковариация случайных величин f и $g \circ T^n$; см. приложение В). Таким образом, перемешивание эквивалентно сходимости корреляции к нулю ($C_{f,g}(n) \rightarrow 0$); это свойство называется убыванием корреляций.

Слабое перемешивание и множественное перемешивание. Мы говорим, что T слабо перемешивающее (относительно инвариантной меры μ), если для всех пар измеримых подмножеств $A, B \subset X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(T^{-i}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Это эквивалентно тому, что для всех $f, g \in L_\mu^2(X)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |C_{f,g}(n)| = 0.$$

Пусть $m \geq 2$. Мы говорим, что T является m -перемешивающим, или перемешивающим с кратностью m , если для любых измеримых подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_m \subset X$ и $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_m$ мы имеем

$$\mu(T^{-n_1}A_1 \cap T^{-n_2}A_2 \cap \dots \cap T^{-n_m}A_m) \rightarrow \mu(A_1)\mu(A_2)\dots\mu(A_m)$$

при условии

$$\min\{n_2 - n_1, n_3 - n_2, \dots, n_m - n_{m-1}\} \rightarrow \infty \quad (C.3)$$

(m -перемешивание означает асимптотическую независимость событий в m различных моментах времени, если интервалы между ними увеличиваются).

Это эквивалентно тому, что для любых $f_1, \dots, f_m \in L_\mu^m(X)$, где $\langle f_i \rangle = 0$, мы имеем

$$\langle (f_1 \circ T^{n_1}) \cdot (f_2 \circ T^{n_2}) \dots (f_m \circ T^{n_m}) \rangle \rightarrow 0 \quad (C.4)$$

при условии, что выполнено (C.3). Соотношение (C.4) называется множественной корреляцией.

Перемешивание равносильно 2-перемешиванию. Если T является m -перемешивающим, то оно является и k -перемешивающим для всех $2 \leq k \leq m$.

Все виды свойства перемешивания (слабое перемешивание, сильное перемешивание, множественное перемешивание) инвариантны относительно изоморфизмов. Из множественного перемешивания с $m \geq 3$ следует сильное перемешивание (но не наоборот). Из сильного перемешивания следует слабое перемешивание (но не наоборот). Из слабого перемешивания следует эргодичность (но не наоборот).

Поворот окружности. Возможно, наиболее распространенным примером сохраняющего меру преобразования является поворот окружности.

Пусть $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — единичный 1-тор, или окружность единичной длины, с циклической (угловой) координатой $x \in [0, 1]$ (точки 0 и 1 отождествляются). Поворот на угол α определяется как

$$T(x) = x + \alpha \pmod{1}.$$

Это отображение сохраняет меру Лебега m на X .

Если $\alpha = p/q$ рационально (где p и q предполагаются взаимно простыми), то каждая точка $x \in X$ является периодической с одним и тем же периодом q .

Если α иррационально, то траектория каждой точки $x \in X$ плотна и равномерно распределена на X ; то есть для любого интервала $A \subset X$ мы имеем $r_A(x) = m(A)$ (теорема Вейля). В этом случае мера Лебега является эргодической, но не перемешивающей (даже в смысле слабого перемешивания). Более того, m является единственной инвариантной мерой отображения T ; следовательно, T является однозначно эргодическим.

Линейные сдвиги торов. Рассмотрим обобщение поворотов окружности. Пусть $d \geq 2$ и $X = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ — единичный d -тор с циклическими (угловыми) координатами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$. Зафиксируем вектор $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$. Сдвиг X на вектор $\mathbf{a}$ определяется формулой

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a} \pmod{1}.$$

Это отображение сохраняет d -мерную меру Лебега на X .

Сдвиг $T_{\mathbf{a}}$ является эргодическим, если и только если компоненты $(a_1, \dots, a_d)$ вектора $\mathbf{a}$ рационально независимы с 1; то есть

$$m_0 + m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_d a_d \neq 0$$

для всех целых чисел $m_0, m_1, \dots, m_d \in \mathbb{Z}$, исключая случай $m_0 = m_1 = \dots = m_d = 0$. Отображение $T_{\mathbf{a}}$ никогда не является слабо перемешивающим.

Пространство символов. Пусть $S = \{1, \dots, r\}$ — конечное множество. Будем называть S алфавитом, а его элементы — буквами. Пусть $\Sigma_+ = \Sigma_{+,r} = S^{\mathbb{Z}_+}$ обозначает пространство бесконечных последовательностей букв, так что точка $\underline{\omega} \in \Sigma_+$ представляет собой последовательность $\underline{\omega} = \{\omega_n\}_{n=0}^\infty$, где $\omega_n \in S$ при всех $n \geq 0$.

Обозначим также $\Sigma = \Sigma_r = S^{\mathbb{Z}}$ пространство бесконечных в обе стороны последовательностей букв; то есть Σ состоит из последовательностей $\underline{\omega} = \{\omega_n\}_{n=-\infty}^\infty$, где $\omega_n \in S$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Будем называть Σ_+ и Σ символическими пространствами. (Для краткости мы опустим индекс r .)

Снабдим конечное множество S дискретной топологией (в которой все подмножества S открыты), а пространства Σ и Σ_+ — соответствующим произведением топологий. Соответствующие борелевские σ -алгебры обозначаются $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_+$.

Гомеоморфизм сдвига (влево) $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ определяется по формуле $\underline{\omega}' = \sigma(\underline{\omega})$, где $\omega'_i = \omega_{i+1}$ при всех $i \in \mathbb{Z}$. Аналогично, сдвиг (влево) $\sigma_+: \Sigma_+ \rightarrow \Sigma_+$ определяется формулой $\underline{\omega}' = \sigma_+(\underline{\omega})$, где $\omega'_i = \omega_{i+1}$ при всех $i \geq 0$; это непрерывное отображение на Σ_+ , являющееся r -кратным накрытием.

Пусть μ_0 — вероятностная мера на конечном множестве S (не сконцентрированная целиком в одной точке). Обозначим через μ соответствующее произведение мер $\mu_0^{\mathbb{Z}}$ на Σ и через μ_+ — соответствующее произведение мер $\mu_0^{\mathbb{Z}_+}$ на Σ_+ . Пространство $(\Sigma, \mathfrak{F}, \mu)$ соответствует последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых принимает конечное число значений, классический объект изучения теории вероятности.

Сдвиг σ сохраняет меру μ на Σ . Сдвиг σ_+ сохраняет меру μ_+ на Σ_+ . Оба сдвига являются эргодическими, перемешивающими и m -перемешивающими при всех $m \geq 2$.

Система $(\Sigma, \mathfrak{F}, \sigma, \mu)$ называется сдвигом Бернулли. Заметим, что она полностью характеризуется конечным распределением вероятности μ_0 на алфавите S .

Символическое представление. Пусть $(X, \mathfrak{F}, T, \mu)$ — сохраняющее меру преобразование. Пусть $X = A_1 \cup \dots \cup A_r$ — конечное разбиение множества X на непересекающиеся измеримые подмножества. Возьмем отображение $T: X \rightarrow X$, для каждой точки $x \in X$ определим ее путь следующим образом:

$$\underline{\omega}(x) = \{\omega_n\}_{n=0}^\infty \in \Sigma_+ : \quad T^n(x) \in A_{\omega_n} \quad \forall n \geq 0.$$

Мы говорим, что $X = \cup_i A_i$ — порождающее разбиение, если различные точки имеют различные пути (это эквивалентно тому, что для любых $x \neq y$ найдется $n \geq 0$ такое, что $T^n(x) \in A_i$ и $T^n(y) \in A_j$ для некоторых $i \neq j$). Тогда отображение $\varphi: X \rightarrow \Sigma_+$, определяемое формулой $\varphi(x) = \underline{\omega}(x)$, является взаимно однозначным; оно порождает меру $\mu_X = \varphi(\mu)$ на Σ_+ , являющуюся σ_+ -инвариантной. Отображение φ является изоморфизмом между заданной системой $(X, \mathfrak{F}, T, \mu)$ и $(\Sigma_+, \mathfrak{F}_+, \sigma_+, \mu_X)$; последняя называется символическим представлением первой.

Пусть T — автоморфизм, тогда его символическое представление следует строить другим образом. Во-первых, путь точки $x \in X$ определяется формулой

$$\underline{\omega}(x) = \{\omega_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \Sigma: \quad T^n(x) \in A_{\omega_n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Снова порождающее разбиение означает, что различные точки имеют различные пути (это эквивалентно тому, что для любых $x \neq y$ найдется $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $T^n(x) \in A_i$ и $T^n(y) \in A_j$ для некоторых $i \neq j$). Тогда отображение $\varphi: X \rightarrow \Sigma$, определяемое формулой $\varphi(x) = \underline{\omega}(x)$, является взаимно однозначным. Оно порождает меру $\mu_X = \varphi(\mu)$ на Σ , являющуюся σ -инвариантной, и мы получаем изоморфизм между заданной системой $(X, \mathfrak{F}, T, \mu)$ и ее символическим представлением $(\Sigma, \mathfrak{F}, \sigma, \mu_X)$.

Свойство Бернулли. Автоморфизм $T: X \rightarrow X$, сохраняющий меру μ , называется автоморфизмом Бернулли (или обладает свойством Бернулли, или Б-свойством), если он изоморфен сдвигу Бернулли.

Это эквивалентно тому, что существует порождающее разбиение $\xi = \{A_1, \dots, A_r\}$ множества X такое, что соответствующее символическое представление T является сдвигом Бернулли (то есть порожденная мера μ_X на Σ (см. выше) является произведением мер). В этом случае разбиения $T^n \xi = \{T^n(A_1), \dots, T^n(A_r)\}$ являются независимыми; то есть

$$\mu(T^n(A_i) \cap T^m(A_j)) = \mu(T^n(A_i)) \mu(T^m(A_j))$$

при всех $m \neq n$ и $1 \leq i, j \leq r$.

Автоморфизмы Колмогорова (К-перемешивание). Автоморфизм $T: X \rightarrow X$, сохраняющий меру μ , называется автоморфизмом Колмогорова (или К-автоморфизмом, или обладает К-свойством), если существует измеримое разбиение ξ множества X с тремя свойствами: (i) оно является монотонно возрастающим; то есть $\xi \preceq T\xi$; (ii) его предел в будущем является разбиением на индивидуальные точки, то есть $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n \xi = \varepsilon$; (iii) его предел в прошлом является тривиальным разбиением, то есть $\bigwedge_{n=0}^{\infty} T^{-n} \xi = \nu$.

Это эквивалентно тому, что $T: X \rightarrow X$ является К-автоморфизмом, если для любых измеримых подмножеств $B, A_1, \dots, A_r \subset X$ мы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathfrak{G}_n^\infty(A_1, \dots, A_r)} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0,$$

где $\mathfrak{G}_n^\infty(A_1, \dots, A_r)$ обозначает под- σ -алгебру, порожденную множествами $T^m A_i$ при всех $m \geq n$ и $i = 1, \dots, r$.

Это асимптотическая независимость между настоящим событием B и всеми далекими будущими событиями в $\mathfrak{G}_n^\infty(A_1, \dots, A_r)$. Это свойство сильнее («более равномерно»), чем множественное перемешивание, но слабее, чем свойство Бернулли. К-свойство часто называют К-перемешиванием. Из свойства Бернулли следует К-свойство, но не наоборот. Из К-свойства следует множественное перемешивание, но не наоборот. Для гладких и кусочно-гладких отображений (и потоков; см. ниже) с гладкими, или по крайней мере SRB, инвариантными мерами (куда входят все виды бильярдов) из К-свойства обычно следует свойство Бернулли; см. [СН96, ОВ98].

К-свойство инвариантно относительно изоморфизмов. К-свойство может быть сформулировано в терминах разбиения Пинскера; см. ниже.

Энтропия. Пусть $(X, \mathfrak{F}, T, \mu)$ — сохраняющее меру преобразование. Энтропия конечного разбиения $\xi = \{A_1, \dots, A_r\}$ множества X определяется выражением

$$H(\xi) = - \sum_{i=1}^r \mu(A_i) \ln \mu(A_i)$$

(где полагаем $0 \ln 0 = 0$). Заметим, что $H(\xi) = - \int_X \ln \mu(\xi(x)) d\mu$. Мы имеем $0 \leq H(\xi) \leq \ln r$, где минимум (0) достигается на тривиальном разбиении $\xi = \nu$, а максимум ($\ln r$) достигается при равномерных распределениях, которые характеризуются условием $\mu(A_1) = \dots = \mu(A_r) = 1/r$.

Так как мера μ инвариантна, разбиение $T^{-n}\xi = \{T^{-n}A_1, \dots, T^{-n}A_r\}$ имеет аналогичную энтропию, $H(T^{-n}\xi) = H(\xi)$, при каждом $n \geq 1$. Если T является автоморфизмом, то это верно при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Энтропия отображения T относительно конечного разбиения ξ есть

$$h(T, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi).$$

Предел всегда существует, и он неотрицателен; на самом деле последовательность в правой части монотонно убывает. Наконец, энтропия T есть

$$h(T) = \sup_{\xi} h(T, \xi),$$

где супремум берется по всем конечным разбиениям ξ множества X . Очевидно, $0 \leq h(T) \leq \infty$. Энтропия инвариантна относительно изоморфизмов.

Если ξ — порождающее разбиение, то есть $\bigvee_{i=0}^{\infty} T^{-i}\xi = \varepsilon$, то $h(T, \xi) = h(T)$. Если T является автоморфизмом, то из существования одностороннего генератора (разбиения ξ , удовлетворяющего условию $\bigvee_{i=0}^{\infty} T^{-i}\xi = \varepsilon$) следует $h(T) = 0$. В этом случае $h(T) = h(T, \xi)$ для всех двухсторонних генераторов ξ , то есть разбиений ξ , удовлетворяющих условию $\bigvee_{i=-\infty}^{\infty} T^{-i}\xi = \varepsilon$.

Мы имеем $h(T^n) = n h(T)$ при всех $n \geq 1$. Если T является автоморфизмом, то $h(T^n) = |n| h(T)$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, в частности $h(T^{-1}) = h(T)$.

Разбиение Пинскера. Пусть $(X, \mathfrak{F}, T, \mu)$ — сохраняющее меру преобразование пространства Лебега. Тогда

$$\pi(T) = \bigvee \{ \xi : \xi \text{ конечно, } h(T, \xi) = 0 \}$$

называется разбиением Пинскера. Его под- σ -алгебра $\mathfrak{P}(T) = \mathfrak{G}(\pi(T))$ называется σ -алгеброй Пинскера.

Если T — автоморфизм, то σ -алгебра Пинскера является T -инвариантной, то есть $T^{-1}\mathfrak{P}(T) = \mathfrak{P}(T)$. Это максимальная под- σ -алгебра $\mathfrak{F}$, такая, что соответствующее ограничение T , то есть $(X, \mathfrak{P}(T))$, имеет нулевую энтропию. Часто говорят, несколько неформально, что $\pi(T)$ является «максимальным разбиением с нулевой энтропией».

Предположим, что T — автоморфизм, и измеримое разбиение ξ множества X имеет два свойства: (i) оно монотонно возрастает, то есть $\xi \preceq T\xi$; (ii) его предел в будущем является разбиением на индивидуальные точки, то есть $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n\xi = \varepsilon$. Тогда $\bigwedge_{n=0}^{\infty} T^{-n}\xi \succeq \pi(T)$.

Автоморфизм T является автоморфизмом Колмогорова, если и только если его разбиение Пинскера тривиально, $\pi(T) = \nu$. Таким образом, T является К-автоморфизмом, если и только если его энтропия положительна, $h(T, \xi) > 0$, относительно каждого нетривиального конечного разбиения ξ .

Потоки. Пусть $(X, \mathfrak{F})$ — измеримое пространство. Динамическая система с непрерывным временем (поток) есть однопараметрическое семейство $\{S^t\}$, $t \in \mathbb{R}$, измеримых преобразований $S^t: X \rightarrow X$, удовлетворяющее двум свойствам: (i) $S^{t+s} = S^t \circ S^s$ (групповое свойство), в частности S^0 тождественно; (ii) отображение $X \times \mathbb{R} \rightarrow X$, определяемое формулой $(x, t) \mapsto S^t x$, измеримо (σ -алгебра на $X \times \mathbb{R}$ есть произведение $\mathfrak{F}$ и борелевской σ -алгебры на $\mathbb{R}$).

Условие (ii) является требованием некоторой регулярности семейства $\{S^t\}$ относительно t . Оно эквивалентно следующему: для каждой измеримой функции $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ функция $G(x, t) = F(S^t x)$ является измеримым отображением $X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Для каждой точки $x \in X$ множество $\{S^t x\}$, $t \in \mathbb{R}$, называется орбитой (траекторией) точки x . Во многих приложениях, включая бильярды, X является топологическим пространством, а $\{S^t x\}$ — непрерывной кривой для каждой точки $x \in X$.

Поток $\{S^t\}$ сохраняет меру $\mu \in \mathcal{M}(X)$, если $\mu(S^t A) = \mu(A)$ для всех измеримых подмножеств $A \subset X$ и всех $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что μ является общей инвариантной мерой для всех автоморфизмов S^t , входящих в поток.

Инвариантные меры потока. Свойства автоморфизмов обобщаются на потоки с некоторыми (обычно тривиальными) модификациями. Измеримое множество $B \subset X$ инвариантно относительно потока $\{S^t\}$, если $B = S^t B$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Если поток $\{S^t\}$ сохраняет меру μ , то измеримое множество B называется инвариантным (mod 0) относительно потока, если $B = S^t B \pmod{0}$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Если B инвариантно (mod 0), то существует инвариантное множество $\tilde{B}$ такое, что $B = \tilde{B} \pmod{0}$.

Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ инвариантна относительно $\{S^t\}$, если $f = f \circ S^t$ при всех $t \in \mathbb{R}$. В этом случае f постоянна на каждой орбите потока $\{S^t\}$. Если $\{S^t\}$ сохраняет меру μ , то говорят, что функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ инвариантна (mod 0) относительно потока, если при всех $t \in \mathbb{R}$ мы имеем $f(x) = f(S^t x)$ для μ -п. в. точек $x \in X$. В этом случае существует инвариантная функция $\tilde{f}$ такая, что $f = \tilde{f} \pmod{0}$.

Поток $\{S^t\}$ эргодичен относительно инвариантной меры μ , если любое $\{S^t\}$ -инвариантное (mod 0) множество $A \subset X$ имеет меру 0 или 1. Это эквивалентно тому, что поток $\{S^t\}$ эргодичен, если любая инвариантная (mod 0) функция f постоянна п. в.; то есть $\mu(x: f(x) = c) = 1$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

Если по крайней мере один автоморфизм S^t в потоке эргодичен, то эргодичен весь поток. Обратно, если поток $\{S^t\}$ эргодичен, то автоморфизм S^t эргодичен в счетном наборе моментов $t \in \mathbb{R}$.

Эргодическая теорема Биркгофа для потоков. Возьмем измеримую функцию $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Ее (будущее или прошлое) временное среднее выражается формулой

$$f_{\pm}(x) = \lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S^t(x)) dt.$$

Предположим, что поток $\{S^t\}$ сохраняет меру μ и $f \in L^1_\mu(X)$. Тогда:

- (а) для почти каждой точки $x \in X$ данные пределы существуют и $f_+(x) = f_-(x)$;
- (б) функция $f_\pm(x)$ является T -инвариантной; формально: если $f_\pm(x)$ существует, то $f_\pm(S^t x)$ существует при всех $t \in \mathbb{R}$ и $f_\pm(S^t x) = f_\pm(x)$;
- (в) $f_\pm$ интегрируема и $\int_X f_\pm d\mu = \int_X f d\mu$;
- (г) если $\{S^t\}$ эргодичен, то функция $f_\pm(x)$ постоянна п. в. и ее значение равно $\int_X f d\mu$.

Перемешивающие потоки. Поток $S^t: X \rightarrow X$ является перемешивающим относительно инвариантной меры μ , если для любых измеримых множеств $A, B \subset X$ выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mu(A \cap S^t(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

Если поток $\{S^t\}$ перемешивающий, то каждое отображение S^t , $t \neq 0$, также является перемешивающим.

Поток $\{S^t\}$ является потоком Колмогорова (или К-потоком, или обладает свойством К-перемешивания), если существует измеримое разбиение ξ множества X с тремя свойствами: (i) оно монотонно возрастает, то есть $\xi \preceq S^t \xi$ при всех $t > 0$; (ii) его предел в будущем является разбиением на индивидуальные точки, то есть $\bigvee_{t=0}^\infty S^t \xi = \varepsilon$; (iii) его предел в прошлом является тривиальным разбиением, то есть $\bigwedge_{t=0}^\infty S^{-t} \xi = \nu$.

Если отображение S^t является К-автоморфизмом по крайней мере для одного $t \in \mathbb{R}$, то каждое S^t , $t \neq 0$, является К-автоморфизмом. Поток $\{S^t\}$ является К-потоком, если и только если некоторое (а следовательно, каждое) отображение S^t , $t \neq 0$, является К-автоморфизмом.

Если по крайней мере один автоморфизм S^t в потоке является автоморфизмом Бернулли, то каждый другой автоморфизм S^t , $t \neq 0$, также является автоморфизмом Бернулли. В этом случае мы говорим, что поток $\{S^t\}$ является потоком Бернулли.

Из свойства Бернулли следует свойство К-перемешивания, но не наоборот. Из свойства К-перемешивания следует перемешивание, но не наоборот. Из перемешивания следует эргодичность, но не наоборот.

Линейные потоки на торах. Пусть $d \geq 2$ и $X = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ — единичный d -тор с циклическими (угловыми) координатами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$. Зафиксируем вектор $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ и определим поток $\{S^t_{\mathbf{a}}\}$ на X по формуле

$$S^t_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + t\mathbf{a} \pmod{1}.$$

С другой стороны, поток $\{S_a^t\}$ может быть определен с помощью дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = a$. Этот поток сохраняет d -мерную меру Лебега на X .

Поток $\{S_a^t\}$ эргодичен, если и только если компоненты $a_1, \dots, a_d$ вектора a рационально независимы; то есть

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_d a_d \neq 0$$

для любых целых $m_1, \dots, m_d \in \mathbb{Z}$, исключая случай $m_1 = \dots = m_d = 0$. Поток $\{S_a^t\}$ никогда не является перемешивающим. Также поток $\{S_a^t\}$ эргодичен, если и только если для каждой точки $x \in X$ орбита $\{S^t x\}$ плотна в X .

Если $d = 2$, то имеются два случая: a_1/a_2 может быть иррациональным, в этом случае поток $\{S_a^t\}$ является эргодическим и каждая его орбита плотна; a_1/a_2 может быть рациональным, тогда S_a^t является тождественным отображением при некотором $t \neq 0$ (следовательно, каждая орбита является периодической).

Энтропия и разбиения Пинскера для потоков. Энтропия отображения S^t произвольного потока $\{S^t\}$ является линейной функцией времени: $h(S^t) = |t|h(S^1)$. Таким образом, энтропия потока определяется по формуле $h(\{S^t\}) = h(S^1)$.

Разбиение Пинскера $\pi(S^t)$ одинаково для каждого отображения S^t , $t \neq 0$; оно называется разбиением Пинскера потока, $\pi(\{S^t\})$. σ -алгебра Пинскера $\mathfrak{P}(\{S^t\}) = \mathfrak{G}(\pi(\{S^t\}))$ является S^t -инвариантной при всех $t \in \mathbb{R}$.

Предположим, измеримое разбиение ξ множества X имеет два свойства: (i) оно является монотонно возрастающим, то есть $\xi \preceq S^t \xi$ при $t > 0$; (ii) его предел в будущем является разбиением на индивидуальные точки, то есть $\bigvee_{t=0}^{\infty} S^t \xi = \varepsilon$. Тогда $\bigwedge_{t=0}^{\infty} S^{-t} \xi \succcurlyeq \pi(\{S^t\})$. Поток $\{S^t\}$ является потоком Колмогорова, если и только если его разбиение Пинскера тривиально, то есть $\pi(\{S^t\}) = \nu$.

Литература

- [Ab59] Абрамов Л. М. *Об энтропии потока*. — ДАН СССР, **128**, 5, 1959, с. 873–875.
- [Al69] Алексеев В. М. *Квазислучайные динамические системы*. — Матем. сб., **78(120)**:1, 1969, с. 3–50.
- [An67] Аносов Д. В. *Геодезические потоки на замкнутых многообразиях отрицательной кривизны*. — Тр. МИАН СССР, **90**, 1967.
- [Ar89] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. — 3-е изд. — М.: Наука, 1989.
- [AS67] Аносов Д. В., Синай Я. Г. *Некоторые гладкие эргодические системы*. — УМН **22**:5(137), 1967.
- [AW67] Adler R., Weiss B. *Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **57**, 1967, pp. 1 573–1 576.
- [Ba00] Baladi V. *Positive transfer operators and decay of correlations*. World Scientific, River Edge, NY, 2000.
- [BCST02] Balint P., Chernov N., Szasz D., Toth I. P. *Multi-dimensional semi-dispersing billiards: singularities and the fundamental theorem*. Ann. H. Poincaré **3**, 2002, pp. 451–482.
- [BCST03] Balint P., Chernov N., Szasz D., Toth I. P. *Geometry of multidimensional dispersing billiards*. Astérisque **286**, 2003, pp. 119–150.
- [BD87] Burton R., Denker M. *On the central limit theorem for dynamical systems*. Trans. AMS **302**, 1987, pp. 715–726.
- [Be01] Berger A. *Chaos and chance*. Walter de Gruyter, Berlin, 2001.
- [BG06] Balint P., Gouezel S. *Limit theorems in the stadium billiard*. Preprint.
- [Bi27] Биркгоф Дж. Д. *Динамические системы*. — М.: Гостехиздат, 1941.
- [Bl92] Bleher P. M. *Statistical properties of two-dimensional periodic Lorentz gas with infinite horizon*. J. Stat. Phys. **66**, 1992, pp. 315–373.

- [BLPS92] Bunimovich L. A., Liverani C., Pellegrinotti A., Suhov Y. *Ergodic systems of n balls in a billiard table*. Comm. Math. Phys. **146**, 1992, pp. 357–396.
- [BL02] Bressaud X., Liverani C. *Anosov diffeomorphism and coupling*. Ergod. Th. Dynam. Syst. **22**, 2002, pp. 129–152.
- [Bou60] Bourbaki N. *Éléments de mathématique*. XXV. Part 1. Livre VI: Intégration. Chap. 6: Intégration vectorielle. Actualités scientifiques et industrielles, **1281**, Paris: Hermann, 1960.
- [Bow70] Bowen R. *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*. Amer. J. Math. **92**, 1970, pp. 725–747.
- [Bow75] Bowen R. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Lect. Notes Math. **470**, Springer, Berlin, 1975.
- [BP01] Barreira L., Pesin Ya. *Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*. Univ. Lect. Series, **23**, AMS, Providence, RI, 2001.
- [BrS02] Brin M., Stuck G. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge U. Press, 2002.
- [BS73] Бунимович Л. А., Синай Я. Г. *Об основной теореме теории рассеивающих бильярдов*. — Матем. сб., **90(132)**:3, 1973, с. 415–431.
- [BS80] Bunimovich L. A., Sinai Ya. G. *Markov partitions for dispersed billiards*. Comm. Math. Phys. **78**, 1980, pp. 247–280.
- [BS81] Bunimovich L. A., Sinai Ya. G. *Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers*. Comm. Math. Phys. **78**, 1981, pp. 479–497.
- [BS96] Bunimovich L. A., Spohn H. *Viscosity for a periodic two disk fluid: an existence proof*. Comm. Math. Phys. **176**, 1996, pp. 661–680.
- [BR97] Bunimovich L. A., Reháček J. *Nowhere dispersing 3D billiards with non-vanishing Lyapunov exponents*. Comm. Math. Phys. **189**, 1997, pp. 729–757.
- [BR98a] Bunimovich L. A., Reháček J. *On the ergodicity of many-dimensional focusing billiards*. Classical and quantum chaos. Ann. H. Poincaré **68**, 1998, pp. 421–448.
- [BR98b] Bunimovich L. A., Reháček J. *How high-dimensional stadia look like*. Comm. Math. Phys. **197**, 1998, pp. 277–301.
- [BSC90] Бунимович Л. А., Синай Я. Г., Чернов Н. И. *Марковские разбиения для двумерных гиперболических бильярдов*. — УМН, **45:3(273)**, 1990, с. 97–134.

- [BSC91] Бунимович Л. А., Синай Я. Г., Чернов Н. И. *Статистические свойства двумерных гиперболических бильярдов*. — УМН, **46:4**(280), 1991, с. 43–92.
- [Bu74a] Бунимович Л. А. *О бильярдах, близких к рассеивающим*. — Матем. сб., **94(136):1**(5), 1974, с. 49–73.
- [Bu74b] Bunimovich L. A. *The ergodic properties of certain billiards*. Funk. Anal. Prilozh. **8**, 1974, pp. 73–74.
- [Bu79] Bunimovich L. A. *On ergodic properties of nowhere dispersing billiards*. Comm. Math. Phys. **65**, 1979, pp. 295–312.
- [Bu90] Bunimovich L. A. *A theorem on ergodicity of two-dimensional hyperbolic billiards*. Comm. Math. Phys. **130**, 1990, pp. 599–621.
- [Bu92] Bunimovich L. A. *On absolutely focusing mirrors*. In *Ergodic Theory and related topics, III (Güstrow, 1990)*. Edited by U. Krengel et al. Lecture Notes in Math. **1514**, Springer, Berlin, 1992, pp. 62–82.
- [Bu00] Bunimovich L. A. *Hyperbolicity and astigmatism*. J. Stat. Phys. **101**, 2000, pp. 373–384.
- [BY00] Benedicks M., Young L.-S. *Markov extensions and decay of correlations for certain Hénon maps*. Astérisque **261**, 2000, pp. 13–56.
- [CCG] Casati G., Comparin G., Guarneri I. *Decay of correlations in certain hyperbolic systems*. Phys. Rev. A **26**, 1982, pp. 717–719.
- [CD06] Chernov N., Dolgopyat D. *Brownian Brownian motion — I*. Memoir. AMS **192**, 2009, 193 p.
- [CFS82] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. *Эргодическая теория*. — М.: Наука, 1980.
- [Ch93] Чернов Н. И. *О локальной эргодичности гиперболических систем с особенностями*. — Функц. анализ и его прил., **27:1**, 1993, с. 60–64.
- [Ch95] Chernov N. *Limit theorems and Markov approximations for chaotic dynamical systems*. Prob. Th. Rel. Fields **101**, 1995, pp. 321–362.
- [CH96] Chernov N., Haskell C. *Nonuniformly hyperbolic K-systems are Bernoulli*. Ergod. Th. Dynam. Syst. **16**, 1996, pp. 19–44.
- [Ch97] Chernov N. *Entropy, Lyapunov exponents, and mean free path for billiards*. J. Stat. Phys. **88**, 1997, pp. 1–29.
- [Ch99] Chernov N. *Decay of correlations and dispersing billiards*. J. Stat. Phys. **94**, 1999, pp. 513–556.

- [Ch01] Chernov N. *Sinai billiards under small external forces*. Ann. H. Poincaré **2**, 2001, pp. 197–236.
- [Ch02] Chernov N. *Invariant measures for hyperbolic dynamical systems*. In: Handbook of Dynamical Systems, **1A**, pp. 321–407, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [Ch06a] Chernov N. *Regularity of local manifolds in dispersing billiards*. Math. Phys. Electr. J. **12**, 2006, No. 1, 54 p.
- [Ch06b] Chernov N. *Advanced statistical properties of dispersing billiards*. J. Stat. Phys. **122**, 2006, No. 6, pp. 1 061–1 093.
- [CM92] Chernov N. I., Markarian R. *Entropy of non-uniformly hyperbolic plane billiards*. Bol. Soc. Bras. Mat. **23**, 1992, pp. 121–135.
- [CM03] Chernov N., Markarian R. *Introduction to the ergodic theory of chaotic billiards*. 2nd Ed., IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.
- [CM06] Chernov N., Markarian R. *Dispersing billiards with cusps: slow decay of correlations*. Communications in Mathematical Physics, **270**, 2006, No. 3, pp. 727–758.
- [CY00] Chernov N. I., Young L.-S. *Decay of correlations of Lorentz gases and hard balls*. In *Hard Ball Systems and Lorentz Gas*, D. Szász, editor, Springer, Berlin, 2000, pp. 89–120.
- [CZ05] Chernov N., Zhang H.-K. *Billiards with polynomial mixing rates*. Nonlinearity **18**, 2005, pp. 1 527–1 553.
- [Den89] Denker M. *The central limit theorem for dynamical systems*. Dyn. Syst. Ergod. Th. Banach Center Publ., **23**, PWN–Polish Sci. Publ., Warsaw, 1989.
- [Dev89] Devaney R. *An introduction to chaotic dynamical systems*. 2nd Ed., Addison-Wesley, New York, 1989.
- [DM01] Del Magno G. *Ergodicity of a class of truncated elliptical billiards*. Nonlinearity **14**, 2001, pp. 1 761–1 786.
- [DMM03] Del Magno G., Markarian R. *Bernoulli elliptical stadia*. Comm. Math. Phys. **233**, 2003, pp. 211–230.
- [DMM06] Del Magno G., Markarian R. *On the Bernoulli property of planar hyperbolic billiards*. Preprint, 2006.
- [Dob68a] Добрушин Р. Л. *Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности*. — ТВП, **13:2**, 1968, с. 201–229.

- [Dob68b] Добрушин Р. Л. Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием. — Функц. анализ и его прил., 2:4, 1968, с. 44–57.
- [Dob68c] Добрушин Р. Л. Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов. — Функц. анализ и его прил., 2:4, 1968, с. 44–57.
- [Don91] Donnay V. *Using integrability to produce chaos: billiards with positive entropy*. Comm. Math. Phys. **141**, 1991, pp. 225–257.
- [DPS86] *Dependence in probability and statistics. A survey of recent results*. Eds. E. Eberlein and M. Taqqu, Progress in Probability and Statistics, **11**, Birkhäuser, Boston, MA, 1986.
- [DS00] *Dynamical Systems, Ergodic Theory and Applications*. Encycl. Math. Sciences, **100**, Ed. Ya. G. Sinai, Springer, Berlin, 2000.
- [FM88] Friedman B., Martin R. F. *Behavior of the velocity autocorrelation function for the periodic Lorentz gas*. Physica D **30**, 1988, pp. 219–227.
- [Ga74] Gallavotti G. *Lectures on the billiard*. In *Dynamical systems, theory and applications (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974)*, Lect. Notes Phys. **38**, Springer, Berlin, 1975, pp. 236–295.
- [GG94] Garrido P., Gallavotti G. *Billiards correlation function*. J. Stat. Phys. **76**, 1994, pp. 549–585.
- [GKT95] Galperin G., Krüger T., Troubetzkoy S. *Local instability of orbits in polygonal and polyhedral billiards*. Comm. Math. Phys. **169**, 1995, pp. 463–473.
- [GO74] Gallavotti G., Ornstein D. S. *Billiards and Bernoulli schemes*. Comm. Math. Phys. **38**, 1974, pp. 83–101.
- [Gur65] Гуревич Б. М. *Построение возрастающих разбиений для специальных потоков*. — ТВП, **10**:4, 1965, с. 693–712.
- [Gut86] Gutkin E. *Billiards in polygons*. Physica D **19**, 1986, pp. 311–333.
- [Gut96] Gutkin E. *Billiards in polygons: survey of recent results*. J. Stat. Phys. **83**, 1996, pp. 7–26.
- [GZ90] Гальперн Г. А., Земляков А. М. *Математические бильярды*. — Квант, **77**. — М.: Наука, 1990.
- [Had01] Hadamard J. *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles*. Bull. Soc. Math. France **29**, 1901, pp. 224–228.

- [Hal77] Halpern B. *Strange billiard tables*. Trans. AMS **232**, 1977, pp. 297–305.
- [HB00] *Hard Ball Systems and Lorentz Gas*. D. Szász, editor, Springer, Berlin, 2000.
- [Ho39] Hopf E. *Statistik der geodetischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung*. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **91**, 1939, pp. 261–304.
- [Ho40] Hopf E. *Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus, II*. Math. Annalen **117**, 1940, pp. 590–608.
- [HP70] Hirsch M., Pugh C. *Stable manifolds and hyperbolic sets*. In: Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, AMS, Providence, RI, 1970, pp. 133–163.
- [Hu01] Hu H. *Statistical properties of some almost hyperbolic systems*. In: Smooth Ergodic Theory and Its Applications (Seattle, WA, 1999), pp. 367–384. Proc. Sympos. Pure Math., **69**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [IL71] Ibragimov I. A., Linnik Y. V. *Independent and stationary sequences of random variables*. Wolters-Noordhoff, Gröningen, 1971.
- [KB94] Katok A., Burns K. *Infinitesimal Lyapunov functions, invariant cone families and stochastic properties of smooth dynamical systems*. Ergod. Th. Dynam. Syst. **14**, 1994, pp. 757–785.
- [KH95] Каток А. Б., Хасселблат Б. *Введение в современную теорию динамических систем*. — М.: Факториал, 1999.
- [KM81] Kubo I., Murata H. *Perturbed billiard systems II, Bernoulli properties*. Nagoya Math. J. **81**, 1981, pp. 1–25.
- [KMS86] Kerckhoff S., Masur H., Smillie J. *Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials*. Ann. Math. **124**, 1986, pp. 293–311.
- [KS86] Katok A., Strelcyn J.-M. with the collaboration of Ledrappier F. & Przytycki F. *Invariant manifolds, entropy and billiards; smooth maps with singularities*. Lect. Notes Math., **1222**, Springer, New York, 1986.
- [KSS90] Krámlí A., Simányi N., Szász D. *A «transversal» fundamental theorem for semi-dispersing billiards*. Comm. Math. Phys. **129**, 1990, pp. 535–560.
- [KSS91] Krámlí A., Simányi N., Szász D. *The K-property of three billiard balls*. Ann. Math. **133**, 1991, pp. 37–72.

- [KSS92] Krámlí A., Simányi N., Szász D. *The K-property of four billiard balls*. Comm. Math. Phys. **144**, 1992, pp. 107–142.
- [KT91] Козлов В.В., Трещев Д.В. *Биллиарды. Генетическое введение в динамические системы с ударами*. — М.: Издательство МГУ, 1991.
- [La73] Лазуткин В.Ф. *Существование каустик для биллиардной задачи в выпуклой области*. — Изв. АН СССР. Сер. матем., **37**:1, 1973, с. 186–216.
- [Led84] Ledrappier F. *Propriétés ergodiques des mesures de Sinai*. IHES Public. Math., **59**, 1984, pp. 163–188.
- [Leo61] Leonov V.P. *On the dispersion of time-dependent means of a stationary stochastic process*. Th. Probab. Appl., **6**, 1961, pp. 87–93.
- [L192] de la Llave R. *Smooth conjugacy and S-R-B measures for uniformly and non-uniformly hyperbolic systems*. Comm. Math. Phys. **150**, 1992, pp. 289–320.
- [LMM86] de la Llave R., Marco J., Moriyón R. *Canonical perturbation theory of Anosov systems and regularity results for the Livsic cohomology equation*. Ann. Math. **123**, 1986, pp. 537–611.
- [Lo05] Lorentz H.A. *The motion of electrons in metallic bodies*. Proc. Amst. Acad. **7**, 1905, pp. 438–453.
- [LR69] Lanford O.E., Ruelle D. *Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics*. Comm. Math. Phys. **13**, 1969, pp. 194–215.
- [LS82] Ledrappier F., Strelcyn J.-M. *A proof of the estimation from below in Pesin's entropy formula*. Erg. Th. Dynam. Syst. **2**, 1982, pp. 203–219.
- [LW95] Liverani C., Wojtkowski M. *Ergodicity in Hamiltonian systems*. Dynamics reported, Dynam. Report. Expositions Dynam. Systems (N.S.) **4**, Springer, Berlin, 1995, pp. 130–202.
- [Mac83] Machta J. *Power law decay of correlations in a billiard problem*. J. Stat. Phys. **32**, 1983, pp. 555–564.
- [Man83] Mañe R. *Introducao à Teoria Ergódica*. IMPA, Rio de Janeiro, 1983. English Ed., *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
- [Mar88] Markarian R. *Billiards with Pesin region of measure one*. Comm. Math. Phys. **118**, 1988, pp. 87–97.

- [Mar93a] Markarian R. *The fundamental theorem of Sinai–Chernov for dynamical systems with singularities*. In *Dynamical Systems*. Santiago de Chile, 1990. R. Bamón, R. Labarca, J. Lewowicz, and J. Palis, editors, Longman, Harlow, 1993, pp. 131–158.
- [Mar93b] Markarian R. *New ergodic billiards: exact results*. *Nonlinearity* **6**, 1993, pp. 819–841.
- [Mar94] Markarian R. *Non-uniformly hyperbolic billiards*. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **3**, 1994, pp. 223–257.
- [Mar04] Markarian R. *Billiards with polynomial decay of correlations*. *Erg. Th. Dynam. Syst.* **24**, 2004, pp. 177–197.
- [Mat75] Матерон Ж. *Случайные множества и интегральная геометрия*. — М.: Мир, 1978.
- [ME81] Мартин Н., Инглэнд Дж. *Математическая теория энтропии*. — М.: Мир, 1988.
- [MOP96] Markarian R., Oliffson S., Pinto S. *Chaotic properties of the elliptical stadium*. *Comm. Math. Phys.* **174**, 1996, pp. 661–679.
- [Os68] Оселедец В. И. *Мультипликативная эргодическая теорема*. — Труды Московского Математического Общества, **19**, 1968, с. 179–210.
- [OW98] Ornstein D. S., Weiss B. *On the Bernoulli nature of systems with some hyperbolic structure*. *Erg. Th. Dynam. Syst.* **18**, 1998, pp. 441–456.
- [Pes76] Песин Я. Б. *Семейства инвариантных многообразий, отвечающие ненулевым характеристическим показателям*. — Изв. АН СССР Сер. матем., **40**:6, 1976, с. 1332–1379.
- [Pes77a] Песин Я. Б. *Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория*. — УМН, **32**:4, 1977, с. 55–112.
- [Pes77b] Песин Я. Б. *Описание π -разбиения диффеоморфизма с инвариантной мерой*. — Матем. заметки, **22**:1, 1977, с. 29–44.
- [Pes92] Pesin Ya. B. *Dynamical systems with generalized hyperbolic attractors: hyperbolic, ergodic and topological properties*. *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **12**, 1992, pp. 123–151.
- [PeS82] Pesin Ya. B., Sinai Ya. G. *Gibbs measures for partially hyperbolic attractors*. *Erg. Th. Dynam. Sys.* **2**, 1982, pp. 417–438.
- [Pet83] Petersen K. *Ergodic Theory*. Cambridge U. Press, 1983.

- [PhS75] Philipp W., Stout W. *Almost sure invariance principles for partial sums of weakly dependent random variables*. Memoir. AMS **161**, 1975.
- [PP90] Parry W., Pollicott M. *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*. Astérisque **187–188**, 1990, 268 p.
- [Re95] Reháček J. *On the ergodicity of dispersing billiards*. Rand. Comput. Dynam. **3**, 1995, pp. 35–55.
- [Ro49] Рохлин В. А. *Об основных понятиях теории меры*. — Матем. сб. **25(67)**:1, 1949, с. 107–150.
- [Ro67] Рохлин В. А. *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой*. — УМН, **22**:5(137), 1967, с. 3–56.
- [Ru76] Ruelle D. *A measure associated with Axiom-A attractors*. Amer. J. Math. **98**, 1976, pp. 619–654.
- [Ru78] Рюэль Д. *Термодинамический формализм. Математические структуры классической равновесной статистической механики*. — М.–Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.
- [Ru79] Ruelle D. *Ergodic theory of differentiable dynamical systems*. Publ. Math. IHES **50**, 1979, pp. 27–58.
- [Sa76] Сантало Л. *Интегральная геометрия и геометрическая вероятность*. — М.: Наука, 1983.
- [SC87] Синай Я. Г., Чернов Н. И. *Эргодические свойства некоторых систем двумерных дисков и трехмерных шаров*. — УМН, **42**:3(255), 1987, с. 153–174.
- [Sim99] Simányi N. *Ergodicity of hard spheres in a box*. Ergod. Th. Dynam. Syst. **19**, 1999, pp. 741–766.
- [Sim03] Simányi N. *Proof of the Boltzmann–Sinai ergodic hypothesis for typical hard disk systems*. Invent. Math. **154**, 2003, pp. 123–178.
- [Sim04] Simányi N. *Proof of the ergodic hypothesis for typical hard ball systems*. Ann. H. Poincaré **5**, 2004, pp. 203–233.
- [Sin66] Синай Я. Г. *Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. II*. — Изв. АН СССР. Сер. матем., **30**:1, 1966, с. 15–68.
- [Sin68a] Синай Я. Г. *Разбиения Маркова и $\mathcal{U}$ -диффеоморфизмы*. — Функц. анализ и его прил., **2**:1, 1968, с. 64–89.
- [Sin68b] Синай Я. Г. *Построение марковских разбиений*. — Функц. анализ и его прил., **2**:3, 1968, с. 70–80.

- [Sin70] Синай Я.Г. *Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих билиардов.* — УМН, **25:2**(152), 1970, с. 141–192.
- [Sin72] Синай Я.Г. *Гиббсовские меры в эргодической теории.* — УМН, **27:4**(166), 1972, с. 21–64.
- [Sin76] Синай Я.Г. *Введение в эргодическую теорию.* — М.: Фазис, 1996.
- [Sin79] Sinai Ya.G. *Development of Krylov's ideas. Afterword to N. S. Krylov. Works on the Foundations of Statistical Physics.* Princeton U. Press, Princeton, NJ, 1979, pp. 239–281.
- [St86] Strelcyn J.-M. *Plane billiards as smooth dynamical systems with singularities.* In: *Lect. Notes Math.*, **1222**, Springer, New York, 1986, pp. 199–278.
- [SV04] Szász D., Varjú T. *Markov towers and stochastic properties of billiards.* In: *Modern Dynamical Systems and Applications*, pp. 433–445, Cambridge U. Press, Cambridge, 2004.
- [Sz92] Szász D. *On the K-property of some planar hyperbolic billiards.* *Comm. Math. Phys.* **145**, 1992, pp. 595–604.
- [Ta95] Tabachnikov S. *Billiards.* Panor. Synth. No. 1, SMF, Paris, 1995.
- [Va92] Vaienti S. *Ergodic properties of the discontinuous sawtooth map.* *J. Stat. Phys.* **67**, 1992, pp. 251–269.
- [Wa82] Walters P. *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer, New York, 1982.
- [Wo85] Wojtkowski M. *Invariant families of cones and Lyapunov exponents.* *Ergod. Th. Dynam. Syst.* **5**, 1985, pp. 145–161.
- [Wo86] Wojtkowski M. *Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents.* *Comm. Math. Phys.* **105**, 1986, pp. 391–414.
- [Wo94] Wojtkowski M. *Two applications of Jacobi fields to the billiard ball problem.* *J. Differ. Geom.* **40**, 1994, pp. 155–164.
- [Yo98] Young L.-S. *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity.* *Ann. Math.* **147**, 1998, pp. 585–650.
- [Yo99] Young L.-S. *Recurrence times and rates of mixing.* *Israel J. Math.* **110**, 1999, pp. 153–188.
- [ZE97] Zaslavsky G.M., Edelman M. *Maxwell's demon as a dynamical system.* *Phys. Rev. E* **56**, 1997, pp. 5 310–5 320.

Предметный указатель

- Н-компоненты (однородные компоненты), 175, 176, 187–189, 191–197, 199, 200, 203, 206, 248, 251, 281–283, 285, 286, 288, 289, 292–294, 296, 298
- Н-многообразия (однородные многообразия), 164, 166, 168, 170, 171, 180, 202, 203, 205, 217, 218, 220, 221, 247, 250, 253, 257–259, 271, 277, 279, 281, 282, 285–287, 292, 293, 299
- К-перемешивание (перемешивание Колмогорова), 157, 224, 225, 231, 232, 234, 235, 237, 238, 409, 445, 446, 449
- р-метрика (р-норма), 96, 115, 116, 118, 148, 150, 168, 319, 325, 332–334, 341
- и-SRB меры и плотности, 157–159, 161, 162, 166, 170, 247, 250, 257, 326, 343
- Абсолютная непрерывность, 155, 178, 180, 211, 212, 247, 280, 285, 287, 326, 347, 352, 365, 400, 402, 405
- Автокорреляции, 240
- Броуновское движение, 268
- Выравнивание (линий разрыва), 134, 166, 339
- Газ Лоренца, 42, 107, 273, 275, 364
- Гиперболичность
- неравномерная, 73, 74, 104, 145, 207, 212, 242, 322, 353, 364, 396
 - равномерная, 73, 74, 104, 115, 116, 144, 145, 147, 155, 160, 162, 171, 172, 178–181, 184, 186, 190, 206, 207, 242, 312, 331, 334, 337, 344, 346–348, 353, 354, 360, 362
- Глобальная эргодичность, 216, 222, 403, 408
- Голономное отображение, 176, 178, 180, 181, 187, 211, 233, 247, 293, 294, 347, 348, 352, 365, 402
- Диффузия в газе Лоренца, 274, 276, 277, 364
- Инволюция, 69, 74, 113, 132, 358, 384
- Интегрируемость (слоений), 229, 231, 362
- Кардиоида, 378, 409
- Каспы, 51, 69, 105, 116, 391, 394
- Квадратичные формы, 103, 372–377, 382, 396, 402, 406
- Конечный горизонт, 65, 68, 105, 112, 136, 276

- Конусы (устойчивый и неустойчивый), 101–104, 114, 118, 127, 133, 259, 309, 310, 316, 327, 368–370, 382, 385–388, 390, 406, 407
- Лемма Бореля–Кантелли, 147, 168, 431
- Локальная эргодичность, 216, 219, 222, 223, 403–405, 407, 408
- Метрика Хаусдорфа, 284
- Непрерывные дроби, 90, 92, 127–130, 313, 316, 318, 321, 323, 324, 388–390
- Обратимость времени, 69, 113, 118, 130, 144, 157, 166, 182, 202–205, 228, 321, 338, 349
- Ограничения на искажения, 155, 170–172, 185, 198, 206, 247, 248, 287, 296, 326, 343, 345–347, 352, 353, 365
- Ограниченный горизонт, 65, 68, 105, 112, 136, 276
- Поворот круга, 22, 37, 238, 443
- Показатели Ляпунова, 72, 74–76, 78, 81, 83, 87, 96–99, 101, 102, 115, 210, 226, 373, 396
- Полосы однородности, 163, 164, 191, 193, 204, 219, 246, 345
- Почти наверное принцип инвариантности (ПНПИ), 268, 269
- Продолжение (линий разрыва), 137, 166, 339, 352
- Прямоугольник
— Кантора, 277–286, 291, 292
— сплошной, 277–279, 284, 285
- Разбиение Пинскера (σ -алгебра), 156, 232, 234, 447, 450
- Регулярные накрытия, 207, 208, 364, 365, 367, 402, 404
- Свойство Бернулли, 107, 207, 224, 225, 231, 235, 237, 238, 303, 408, 409, 444–446, 449
- Скользющие столкновения, 56, 58, 62, 130, 133, 136, 138, 140, 191, 192, 391
- Слабо устойчивые (неустойчивые) многообразия, 228, 230
- Слабый принцип инвариантности (СПИ), 268, 269
- Собственное пересечение, 283, 284, 286
- Собственное семейство, 250, 251, 253, 255–257, 259, 281, 283, 284, 287, 289, 290, 292, 297
- Специальный поток, 60, 99, 226, 228, 229, 272
- Средний свободный пробег, 66, 67, 99, 100, 272, 275, 276
- Стадион, 308, 321, 327, 331, 334, 335, 339, 340, 343, 345, 347, 352, 354, 356, 358, 360–363, 367
- Стандартная пара, 246–251, 253, 255, 257, 282–285, 287, 288, 290, 294
- Теорема Оселедца, 71, 73, 74, 98, 210, 397, 399
- Точка фокусировки, 90, 91, 93, 94, 101, 305, 313, 321, 326, 332, 338, 382
- Убывание корреляций, 240, 242–245, 257, 260, 261, 363, 428, 430, 442
- Уравнение зеркала, 92, 160, 370
- Условие Линдеберга, 266, 433

- Формула энтропии Песина, 99
- Центральная предельная теорема (ЦПТ), 239, 241–243, 261, 266, 268, 272, 273, 363, 364, 432, 433
- Цепочка Хопфа, 209–211, 216, 217, 229, 231
- Энтропия, 98–100, 156, 237, 303, 390, 397, 446, 447, 450
- Эргодическая теорема Биркгофа, 67, 76, 97, 98, 213, 239, 276, 440, 448

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

<http://shop.rcd.ru>

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 415,
тел.: (499) 135-54-37, (495) 641-69-38
2. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)
3. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный,

Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409-93-28)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

***Николай Чернов
Роберто Маркарян***

ХАОТИЧЕСКИЕ БИЛЛИАРДЫ

*Дизайнер В. А. Толстоуцкая
Технический редактор А. В. Бакиев
Компьютерный набор и верстка А. И. Ереметова
Корректор Е. В. Огородникова*

Подписано в печать 23.10.2012. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,97. Уч. изд. л. 28,87.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная № 1. Заказ № 12-60.

АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

<http://shop.rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95



Николай Чернов (на фото справа) родился в 1956 году на Украине. Окончил мехмат МГУ (1979 г.) и защитил кандидатскую диссертацию в МГУ (1984 г.), в 1983–1991 гг. работал в ОИЯИ (Дубна). В 1991 году переехал в США, работал в Калифорнийском университете (Лос-Анджелес), Технологическом институте Джорджии (Атланта), Принстонском университете, и с 1994 года — в Алабамском университете (Бирмингем). Специализация — динамические системы, статистическая механика, теория вероятностей и математическая статистика.

Роберто Маркарян (на фото слева) родился в 1946 году в Монтевидео (Уругвай). Получил университетское образование в Уругвае и затем ученую степень в Институте теоретической и прикладной математики (Рио-де-Жанейро, Бразилия). Исследовательские работы посвящены билиардным динамическим системам. Активно участвует в работе математических организаций и обществ в Латинской Америке и на Карибских островах.

ISBN 978-5-4344-0080-0



9 785434 400800